Matyáš Lerch
Poznámky arithmetické. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 118–124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120881

Poznámky arithmetické.

Sdílí

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

(Dokončení.)

Píšeme-li pravou stranu ve tvaru

$$\left(a-\left[\frac{m}{\delta}\right]\right)\cdot\left(\left[\frac{k}{\delta}\right]-\left[\frac{k-1}{\delta}\right]\right),$$

netřeba připomínati, že δ je dělitelem čísla k, a máme pak

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{a}\psi\left(k,\frac{m}{\alpha}\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\delta>\frac{m}{a}}\left(a-\left[\frac{m}{\delta}\right]\right)\left(\left[\frac{k}{\delta}\right]-\left[\frac{k-1}{\delta}\right]\right),$$

kde v pravo δ probíhá všechna čísla celistvá větší než $\frac{m}{a}$.

Provedeme-li v pravo sčítání vůči k, vznikne

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{a}\psi\left(k,\frac{m}{\alpha}\right)=\sum_{\delta>\frac{m}{a}}\left(a-\left[\frac{m}{\delta}\right]\right)\left[\frac{m}{\delta}\right]$$

$$=a\sum_{\delta>\frac{m}{a}}\mathrm{E}\left(\frac{m}{\delta}\right)-\sum_{\delta>\frac{m}{a}}\mathrm{E}^2\left(\frac{m}{\delta}\right).$$

Při tom ale jest

$$\sum_{\delta>\frac{m}{a}}\mathrm{E}\left(\frac{m}{\delta}\right)=\sum_{k=1}^{m}\psi\left(k,\frac{m}{a}\right),$$

a tedy máme konečně

$$\text{(b)}\qquad \sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{a}\psi\left(k,\frac{m}{\alpha}\right)=a\sum_{k=1}^{m}\psi\left(k,\frac{m}{a}\right)-\sum_{\delta>\frac{m}{a}}\mathrm{E}^2\left(\frac{m}{\delta}\right).$$

Konečně zbývá ještě vyšetřiti součet

$$\sum_{\alpha=1}^{a}\alpha\mathrm{E}\left(\frac{m}{\alpha}\right)=f(m),$$

který za tím účelem znamenejme $f(m)$; rozdíl

$$f(m)-f(m-1)=\sum_{\alpha=1}^{a}\alpha\left\{E\left(\frac{m}{\alpha}\right)-E\left(\frac{m-1}{\alpha}\right)\right\}$$

sestává ze členů, které jen tehdy nevymizí a pak jsou rovny α, když α značí dělitele čísla m; poněvadž zároveň $\alpha \leqq a$, máme patrně

$$f(m)-f(m-1)=X(m,\ a),$$

značíme-li $X(m,\ a)$ jako výše součet dělitelů čísla m, které nepřevyšují číslo a; odtud nacházíme

$$f(m)=\sum_{k=1}^{m}X(k,\ a). \tag{c}$$

Užijeme-li těchto výsledků (a), (b), (c) při sečítání vzorce (2*), vznikne vztah

$$(a+1)\sum_{k=1}^{m}\chi(k,\ a)-\sum_{k=1}^{m}X(k,\ a)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}X(k,\ a)+a\sum_{k=1}^{m}\psi\left(k,\ \frac{m}{a}\right)-\sum_{\delta>\frac{m}{a}}E^2\left(\frac{m}{\delta}\right);$$

odtud máme

$$a\sum_{k=1}^{m}\left[\chi(k,\ a)-\psi\left(k,\ \frac{m}{a}\right)\right]+\sum_{k=1}^{m}\chi(k,\ a)$$
$$=2\sum_{k=1}^{m}X(k,\ a)-\sum_{\delta>\frac{m}{a}}E^2\left(\frac{m}{\delta}\right).$$

Prvý člen v levo dle (2*) má hodnotu $a^2E\left(\frac{m}{a}\right)$ a tedy nacházíme výsledek

$$2\sum_{k=1}^{m}X(k,a)=\sum_{k=1}^{m}\chi(k,\ a)+a^2E\left(\frac{m}{a}\right)+\sum_{\alpha=\left[\frac{m+a}{a}\right]}^{m}E^2\left(\frac{m}{\alpha}\right). \tag{8}$$

Volíme-li $a=m$, bude vždy $X(k,\ a)=\Theta_1(k)$, $\chi(k,\ a)=\Theta(k)$, znamenáme-li $\Theta(k)$ a $\Theta_1(k)$ počet, resp. součet všech dělitelů čísla k, a tedy máme

$$2\sum_{k=1}^{m}\Theta_1(k)=\sum_{k=1}^{m}\Theta(k)+\sum_{\alpha=1}^{m}E^2\left(\frac{m}{\alpha}\right),$$

kde jsme člen $a^2E\left(\frac{m}{a}\right)=m^2$ hned připojili k poslednímu součtu v pravo. Nahradíme-li zde

$$\sum_{k=1}^{m}\Theta(k) \text{ výrazem } \sum_{\alpha=1}^{m}E\left(\frac{m}{\alpha}\right),$$

vznikne

$$(8^a)\qquad \sum_{k=1}^{m}\Theta_1(k)=\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{E\left(\frac{m}{\alpha}\right)E\left(\frac{m}{\alpha}+1\right)}{2},$$

vzorec známý.

Připojíme-li v pravo vzorce (8) k poslednímu součtu členy

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{a}\right]}E^2\left(\frac{m}{\alpha}\right)$$

a nahradíme-li pak výraz

$$\sum_{\alpha=1}^{m}E^2\left(\frac{m}{\alpha}\right)$$

jeho hodnotou

$$2\sum_{k=1}^{m}\Theta_1(k)-\sum_{k=1}^{m}\Theta(k),$$

užijeme-li dále rozkladů

$$\Theta(k)=\chi(k,\ a)+\psi(k,\ a),$$
$$\Theta_1(k)=X(k,\ a)+\Psi(k,\ a),$$

kde $\Psi(k,\ a)$ značí *součet dělitelů čísla k, které převyšují a*, obdržíme vztah

$$(8^*)\qquad \sum_{k=1}^{m}\{2\Psi(k,\ a)-\psi(k,\ a)\}=\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{a}\right]}E^2\left(\frac{m}{\alpha}\right)-a^2E\left(\frac{m}{a}\right).$$

Vzorec (2) poskytne zajímavý výsledek, volíme-li v něm

$a = [\sqrt{m}] = \mu$, načež bude $\left[\frac{m}{a}\right] = \mu$ aneb $\mu + 1$, a v obou případech objeví se výsledek

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \mathrm{E}\left(\frac{m}{\alpha}\right) = 2\sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m}]} \mathrm{E}\left(\frac{m}{\alpha}\right) - \mathrm{E}^2(\sqrt{m}). \tag{9}$$

Důležitost jeho vysvitne z úvahy následující: Je-li m velmi veliké, je stanovení součtu (9) namahavé, a kdybychom se omezili na hodnotu sblíženou

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{m}{\alpha} = m \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\alpha},$$

kterou umíme analyticky vystihnouti, byla by chyba tvaru $\tilde{\omega} \,.\, m$, kde $\tilde{\omega}$ je ryzí zlomek. Užijeme-li však pravé strany, tu bude

$$\sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m}]} \mathrm{E}\left(\frac{m}{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m}]} \frac{m}{\alpha} - \tilde{\omega}_1 \sqrt{m}, \quad (\tilde{\omega}_1 < 1)$$

a my tak nacházíme pro součet (9) hodnotu

$$2m \sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m}]} \frac{1}{\alpha} - [\sqrt{m}]^2 - \tilde{\omega}_1 \sqrt{m},$$

kde chyba $\tilde{\omega}_1 \sqrt{m}$ je mnohem menší než chyba $\tilde{\omega} m$.

Vzorec (9) možno velmi jednoduše takto dokázati:

Číslo k má dělitele dvojí: $\delta < \sqrt{k}$, a $\delta' > \sqrt{k}$, jichž je stejný počet, a je-li k úplným čtvercem, má mimo to dělitele $\sqrt{k}$.

Značí-li $\Theta(k)$ počet dělitelů čísla k, $\Theta'(k)$ však počet dělitelů menších než $\sqrt{k}$, bude

$$\Theta(k) = 2\Theta'(k) + \begin{cases} 1, & \text{je-li } \sqrt{k} \text{ celistvé} \\ 0, & \text{není-li } „ \quad „ \end{cases}.$$

Odtud plyne, že součet

$$\sum_{k=1}^{m} \Theta(k)$$

splývá se součtem

$$2\sum_{k=1}^{m}\Theta'(k)$$

zvětšeným o počet případů, kdy $\sqrt{k}$ je celistvý, tedy případů $k = 1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$, jichž jest $[\sqrt{m}]$.

T. j. jinými slovy

$$\sum_{k=1}^{m}\Theta(k) = 2\sum_{k=1}^{m}\Theta'(k) + [\sqrt{m}].$$

Avšak

$$\Theta'(k) = \sum_{\alpha < \sqrt{k}}\left\{E\left(\frac{k}{\alpha}\right) - E\left(\frac{k-1}{\alpha}\right)\right\},$$

tedy bude

$$\sum_{k=1}^{m}\Theta'(k) = \sum_{k \leq m,\ \alpha < \sqrt{k}}\left\{E\left(\frac{k}{\alpha}\right) - E\left(\frac{k-1}{\alpha}\right)\right\};$$

součtové podmínky pravé strany, t. j.

$$k \leqq m, \quad \alpha < \sqrt{k}$$

lze nahraditi těmito: $m > \alpha^2$, $k > \alpha^2$, $m \geqq k$, takže pravou stranou lze psáti

$$\sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m-1}]}\ \sum_{k=\alpha^2+1}^{m}\left\{E\left(\frac{k}{\alpha}\right) - E\left(\frac{k-1}{\alpha}\right)\right\} = \sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m-1}]}\left\{E\left(\frac{m}{\alpha}\right) - \alpha\right\};$$

máme tedy

$$2\sum_{k=1}^{m}\Theta'(k) = 2\sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m-1}]}E\left(\frac{m}{\alpha}\right) - [\sqrt{m-1}]\,.\,[1 + \sqrt{m-1}]$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{m}\Theta(k) = 2\sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m-1}]}E\left(\frac{m}{\alpha}\right) - E^2(\sqrt{m-1}) + \{E\sqrt{m} - E\sqrt{m-1}\}.$$

Není-li $\sqrt{m}$ celistvé, bude

$$E(\sqrt{m}) = E(\sqrt{m-1}),$$

a tím dokázán vzorec (9) v tomto případě; je-li však $\sqrt{m}$ celistvé číslo, bude $E(\sqrt{m}-1)=\sqrt{m}-1$, v pravo máme výraz

$$2\sum_{\alpha=1}^{\sqrt{m}-1} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)-\sqrt{m}^2+2\sqrt{m},$$

v němž lze patrně výraz $2\sqrt{m}$ připojiti k součtu jako poslední člen $\alpha=\sqrt{m}$, ježto $2E\left(\frac{m}{\sqrt{m}}\right)=2\sqrt{m}$, čímž se objeví v pravo konečně

$$2\sum_{\alpha=1}^{\sqrt{m}} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)-\sqrt{m}^2,$$

což právě jest výraz (9) v případě $\sqrt{m}=E(\sqrt{m})$.

Vzorec (9) pochází od *Dirichleta* a byl rozmanitými způsoby dokázán, mezi jinými zvláště podal p. *Hermite* jednoduché jeho odvození,*) s nímž odvození právě vyložené má princip společný.

Vzorec (3^a) pišme nyní

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+1}\right]} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{u+a} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{m}{u+a}\right]} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)-(u+a)E\left(\frac{m}{u+a}\right)$$
$$+uE\left(\frac{m}{u+1}\right)-\sum_{\alpha=1}^{u} E\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Klademe-li v něm $u+a=[\sqrt{m}]$, jest buď $\left[\frac{m}{u+a}\right]=[\sqrt{m}]$ a pak máme z něho

$$(10)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left(\frac{m}{u+1}\right)} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)$$

$$=2\sum_{\alpha=1}^{[\sqrt{m}]} E\left(\frac{m}{\alpha}\right)-E^2(\sqrt{m})+uE\left(\frac{m}{u+1}\right)-\sum_{\alpha=1}^{u} E\left(\frac{m}{\alpha}\right);$$

---

*) Acta mathematica, sv. 2.

aneb jest $\left[\frac{m}{u+a}\right] = [\sqrt{m}] + 1$, a pak se v druhém součtu v pravo objeví o jeden člen více: $\alpha = [\sqrt{m}] + 1$, jeho hodnota $E\left(\frac{m}{[\sqrt{m}]+1}\right) = [\sqrt{m}]$ se však zruší se součástí hodnoty

$$(u+a)E\left(\frac{m}{u+a}\right) = [\sqrt{m}]\,.\,([\sqrt{m}] + 1)$$

a zbude opětně vzorec (10).

Připomeňme, že vzorec (3^a) platil za podmínky $m \geqq u(a+u)$, která v našem případě zní $m \geqq u[\sqrt{m}]$ a je splněna pro

$$(10^a) \qquad m \geqq u^2.*($$

Věstník literární.

Traité d'Analyse par **Émile Picard,** Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. T. II. Paris, 1893.

Tento druhý svazek, podávající výklady, jež byl autor během dvou let na Sorbonně konal, obsahuje jen dvě kapitoly věnovaných původnímu cíli knihy, t. differencialným rovnicím, vše ostatní se vztahuje k funkcím harmonickým a analytickým. Z toho patrno, že spisovatel — jakož v předmluvě sám praví — obor svých výkladů rozšířil, a to, připojme ihned, ve prospěch čtenářův.

První čtyři kapitoly věnovány funkcím harmonickým dvou proměnných x, y, t. j. funkcím hovícím rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

---

*) Ke konci první části vloudila se na třech místech chyba tisková. Na str. 33. má v řádku 9. v pravo, pak ve druhém členu pravých stran vzorců v řád. 12. a 14. všude státi litera X místo χ.