

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Logarithmus faktorielly

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 129–132

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/120879>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1895

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Logarithmus faktorielly.

Pfšc M. Lerch,

docent při české vysoké šk. technické v Praze.

V rovině mějme soustavu pravouhlých souřadnic X , Y a v ní definujme křivku K rovnicí*)

$$y = \log x.$$

Na pořadnicích příslušných k úsečkám

$$x = 10, 11, 12, \dots, n$$

leží body s celistvými pořadnicemi y ; chceme stanoviti počet všech těchto bodů majících celistvé a kladné souřadnice, pokud leží mezi osou X , čarou K a pořadnicí MP bodu $M(n, \log n)$; některé z nich padnou na čaru K , jiné na pořadnici MP , ale žádný na osu X , poněvadž tam y jest nullou, tedy nikoliv kladným číslem.

K úsečce $x = k$ patříci pořadnice obsahuje z těchto bodů ony, jichž pořadnice jsou $y = 1, 2, \dots, [\log k]$, znamená-li nám $[\log k]$ celky (charakteristiku) obyčejného logarithmu čísla k . Počet jich jest $[\log k]$, a tedy je počet všech bodů uvažované soustavy dán součtem

$$S = [\log 10] + [\log 11] + \dots + [\log n].$$

Tyto body ale obdržíme ještě jiným způsobem, když totiž z obdélníka $OPMQ$, jehož vrcholy jsou $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(n, \log n)$, a $(0, \log n)$, vyloučíme body položené mezi osou Y , čarou K a přímkou MQ . Body ty se rozkládají po jednotlivých rovnoběž-

*) Při tom netřeba zvláště podotýkatí, že \log značí tu obyčejný logarithmus briggický.

kách s osou X , vedených body $y = 1, 2, \dots [\log n]$. Na přímce $y = h$ leží body

$$x = 1, 2, \dots 10^h,$$

poněvadž rovnici čáry K lze též psát $x = 10^y$; bodů těch je 10^h a tedy v celém obrazci jich jest obsaženo

$$S_1 = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{[\log n]}$$

čili po provedeném sčítání

$$S_1 = \frac{10}{9} (10^{[\log n]} - 1).$$

V obdélníku $OPMQ$ leží body s celistvými a kladnými souřadnicemi jsou v počtu

$$n[\log n],$$

a tedy jest

$$n[\log n] - S_1$$

bodů ležících v obrazci tomto „pod čarou“ K . Připočteme-li k nim ještě body (naší soustavy) ležící na čáře K , obdržíme hledaný počet S . Body ty ale mají úsečky

$$x = 10, 10^2, \dots 10^{[\log n]}$$

a jich počet obnáší $[\log n]$. Máme tedy vzorec

$$S = (n + 1)[\log n] - S_1$$

čili

$$(1) \quad \begin{aligned} & [\log 10] + [\log 11] + [\log 12] + \dots + [\log n] \\ & = (n + 1)[\log n] - \frac{10}{9} (10^{[\log n]} - 1). \end{aligned}$$

Avšak

$$[\log k] = \log k - \mu_k,$$

kde μ_k značí mantissu logaríthmu k , tedy ryzí kladný zlomek; levou stranu rovnice (1) lze tedy psát

$$\begin{aligned} & \log 10 + \log 11 + \log 12 + \dots + \log n - (\mu_{10} + \mu_{11} + \dots + \mu_n) \\ & = \log(n!) - \log(9!) - (\mu_{10} + \mu_{11} + \dots + \mu_n). \end{aligned}$$

Součet

$$\mu_{10} + \mu_{11} + \dots + \mu_n$$

jest mezi 0 a n , i lze jej znamenati $\tilde{\omega} \cdot n$, kde $\tilde{\omega}$ značí kladnou veličinu, která jest menší jedné. Máme pak vzorec

$$(2) \quad \log(n!) = (n+1) [\log n] - \frac{1}{9} \cdot 10^{(\log n)} + \\ + \log 9! + \frac{10}{9} + \tilde{\omega} \cdot n,$$

kde $0 < \tilde{\omega} < 1$ značí blíže neznámou jinak veličinu.

Odtud na př. soudíme, že

$$\log(100!) = 202 - \frac{1000}{9} + \log 9! + \frac{10}{9} + 100 \cdot \tilde{\omega};$$

můžeme tedy pomocí tohoto vzorce určití logaríthmus čísla 100! s chybou nedosahující čísla 100, která jest tedy poměrně značnou; chyba stává se poměrně nepatrnou teprvé pro tak veliká n , že i jich logaríthmus je veliký. Na příklad pro $n = 10^{50}$ je prvý člen

$$n \log n = 50 \cdot 10^{50}$$

a proti tomuto všechny ostatní členy jsou poměrně malé. Výsledek náš lze vyjádřiti v ten způsob, že podíl

$$\frac{\log(n!)}{n \log n}$$

tím je bližší jednotce, čím n jest většší.

Pravou stranu rovnice (2) můžeme skutečně psáti

$$n \log n - n\mu_n + [\log n] - \frac{10^{1-\mu_n}}{9} \cdot n + \log 9! + \frac{10}{9} + \tilde{\omega} \cdot n$$

a tedy budou ve výrazu

$$\frac{\log(n!)}{n \log n} = 1 + \frac{\tilde{\omega} - \frac{10^{1-\mu_n}}{9} - \mu_n}{\log n} + \frac{[\log n]}{n \log n} + \frac{\log 9! + \frac{10}{9}}{n \log n}$$

všichni členové pravé strany až na první blízky nulle, je-li n velmi veliké. Máme tedy

$$(3) \quad \frac{\log(n!)}{n \log n} = 1 + \delta_n,$$

kde δ_n jest veličina pro veliká n velmi malá, a sice tak, že součin $\delta_n \cdot \log n$ zůstává konečným.

O některých úlohách z arithmografie.

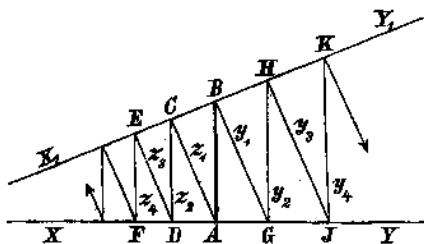
Pojednává

Vavř. Jelínek,

prof. v Novém Městě u Vídne.

(Dokončeno.)

II. K důležitým úlohám grafického počítání náleží též znázorňování mocnin a odmocnin. I tu chceme upozorniti na některé výhodné obraty.



Obr. 3.

1. Mocniny $(z_1)^{\pm m}$ zlomku z_1 jednotky dané úsečkou sestrojíme, znamená-li m číslo celistvé, dle obr. 3., kde jest

$AB = 1$, $XY \perp AB$, $z_1 = AC$, $X, Y_1 \perp AC$, pak
 $z_2 = CD \perp XY$, $z_3 = DE \perp X_1Y_1$, $z_4 = EF \perp XY$, a t. d.,
 $y_1 = BG \perp X_1Y_1$, $y_2 = GH \perp XY$, $y_3 = HI \perp X_1Y_1$, a t. d.

Najdemež z podobných trojúhelníků úměry:

$$z_2 : z_1 = z_1 : 1, \text{ tedy } z_2 = (z_1)^2;$$

$$z_3 : z_2 = z_2 : z_1, \text{ tedy } z_3 = \frac{z_2^2}{z_1} = (z_1)^3;$$

$$z_4 : z_3 = z_3 : z_2, \text{ tedy } z_4 = \frac{z_3^2}{z_2} = (z_1)^4. \quad \text{a t. d.}$$