Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 124--128

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120878`

aneb jest $\left[\frac{m}{u+a}\right] = [\sqrt{m}] + 1$, a pak se v druhém součtu v pravo objeví o jeden člen více: $a = [\sqrt{m}] + 1$, jeho hodnota $E\left(\frac{m}{[\sqrt{m}]+1}\right) = [\sqrt{m}]$ se však zruší se součástí hodnoty

$$(u+a)E\left(\frac{m}{u+a}\right) = [\sqrt{m}] \cdot ([\sqrt{m}] + 1)$$

a zbude opětně vzorec (10).

Připomeňme, že vzorec (3^a) platil za podmínky $m \gtreqq u(a+u)$, která v našem případě zní $m \gtreqq u[\sqrt{m}]$ a je splněna pro

$$(10^a) \qquad m \gtreqq u^2. ^{*)}$$

Věstník literární.

Traité d'Analyse par **Émile Picard,** Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. T. II. Paris, 1893.

Tento druhý svazek, podávající výklady, jež byl autor během dvou let na Sorbonně konal, obsahuje jen dvě kapitoly věnovaných původnímu cíli knihy, t. differencialným rovnicím, vše ostatní se vztahuje k funkcím harmonickým a analytickým. Z toho patrno, že spisovatel — jakož v předmluvě sám praví — obor svých výkladů rozšířil, a to, připojme ihned, ve prospěch čtenářův.

První čtyři kapitoly věnovány funkcím harmonickým dvou proměnných x, y, t. j. funkcím hovícím rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

*) Ke konci první části vloudila se na třech místech chyba tisková. Na str. 33. má v řádku 9. v pravo, pak ve druhém členu pravých stran vzorců v řád. 12. a 14. všude státi litera X místo χ.

K nim vede definice analytické (monogenní) funkce $u+iv$ komplexní proměnné $x+iy$ jakožto funkce o určité derivaci; pro takovou funkci musí u a v hověti rovnicím

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

z nichž dle úvah o křivočarých integralech v I. díle vyvinutých především plyne základní věta *Cauchy*-ova o nezávislosti integralu analytické funkce na cestě integrační, a dále hořejší t. z. *Laplace*-ova rovnice jak pro u tak pro v.

Naopak, hoví-li u oné rovnici, lze pouhou kvadraturou ustanoviti v tak, by $u+iv$ byla analytickou funkcí komplexní proměnné $x+iy$. Z toho jest patrno, že studium napsaných differencialných rovnic jest v podstatě totožné se studiem funkcí analytických; že k tomuto stanovisku, jež vytkl *Riemann*, zde stejnou měrou přihlíženo jako k obvyklejšímu stanovisku *Cauchy*-a, jenž béře přímo v úvahu komplexní hodnotu $u+iv$, jest nemalou zásluhou autorovou.

Poukázav v I. kap. dále ku generalisaci *Beltrami*-ho týkající se komplexních proměnných na libovolné ploše, vyvinuje autor hlavní vlastnosti harmonických funkcí v rovině; úvahy ty jsou ovšem obdobny k úvahám I. dílu o harmonických funkcích v prostoru. Rozšířiv sám některé z těchto výsledků na funkce hovící jiným rovnicím, než jest *Laplace*-ova, formuluje problem *Dirichlet-ův*, požadující vyčíslení harmonické funkce o daných hodnotách podél uzavřené čáry v rovině, a podává dle *C. Neumann-a* řešení v tom případě, kdy daná čára jest vypouklá.

Kap. II. jedná o rozvinutí funkcí harmonických v mocninové řady jak v konečnu tak v nekonečnu — a to pomocí transformace reciprokými průvodiči — a o jich propagaci; applikace na harmonické funkce u, v vcházející do analytické funkce $u+iv$ rázem vede k základnímu theoremu *Cauchy*-ovu, dle něhož analytickou funkci, jednoznačnou a spojitou v jistém kruhu, opsaném kolem počátku, lze rozvinouti v řadu pokračující dle celistvých mocností proměnné a konvergující v onom kruhu, k rozvoji *Mac-Laurin-ovu* a *Taylor-ovu*, a k propagaci analytické funkce. Zároveň zde rozšířeny a doplněny úvahy I. dílu o mocninových řadách vzhledem k řadám komplexním a vše objasněno příklady; mimo jiné vyvozen pěkný výsledek, že nutná a postačující výminka, by řada

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

konvergovala pro každé z, jest vyjádřena rovnicí

$$\lim_{m=\infty}\sqrt[m]{|a_m|}=0.$$

Kap. III. věnována t. z. alternující methodě p. *Schwarze* jíž lze řešiti *Dirichlet*-ův problém v případě složitějšího obvodu a methoda tato applikována též na jiné differencialné rovnice než jest *Laplace*-ova; tím doplnil autor své zajímavé generalisace nahoře vytčené. Kap. IV. pak se zabývá logarithmickým potencialem a obecnou methodou, kterou p. *Poincaré* řešil problém *Dirichlet-ův.*

Kapitoly V. a VI. podávají základy theorie funkcí komplexní proměnné dle *Cauchy*-ových koncepcí a applikace na rozklad celistvých funkcí na primarní faktory *Weierstrass*-ovy (s rozšířením autorovým za účelem sestrojení funkcí o singularné čáře), na stanovení omezených integralův, na rozvoj funkcí v součet racionalných zlomkův, vyvození řady *Fourier-ovy* a řad obdobných, konečně na stanovení počtu kořenů dané rovnice obsažených uvnitř daného obvodu, zvlášť pak na *Cauchy*-ovu theorii indexův.

V kap. VII. vyvinuje autor část výsledkův, jichž se dodělal v příčině počtu řešení dvou rovnic $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, zapadajících do dané plochy, při čemž x, y pojímá jakožto pravoúhlé souřadnice; na výsledky ty jsme již v referatu o I. díle upozornili. Přibrav totiž třetí souřadnici z a rovnici

$$z\mathrm{D} = 0,$$

kde D značí funkcionalný determinant $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, uvažuje souhrn hodnot x, y, příslušných bodům uvnitř daného obvodu, a hodnot z v mezích $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$, při libovolném kladném ε. Počet řešení všech tří rovnic vzhledem k supposici, že jsou naskrz jednoduché, t. j. že $\mathrm{D} \gtrless 0$, jest týž jako počet řešení daných dvou rovnic; a poněvadž funkcionalný determinant všech tří funkcí jest D^2 a tedy kladný, podává formule *Kronecker-ova*, již v I. dílu vyvinutá, řešení problemu.

Kap. VIII. věnována hyperelliptickým integralům; vyvozeny jich periody, pojem základních (neodvislých) period, ukázáno, že jich počet nemůže býti menší než 2, a přičiněny příklady, zvlášť integral elliptický a — dle p. *Goursat*-a — integraly hypergeometrické. Mnohoznačnost těchto integralů (period) závislých na integračních cestách, vytčena zvlášť pro elliptický integral a applikována k důkazu krásné věty autorovy, *že není možná, aby celistvá funkce nenabyla dvou a aby podíl dvou celistvých funkcí nenabyl tří různých hodnot, ač není-li funkce stálou.*

V kap. IX. podán rozvoj funkce více komplexních proměnných v řadu mocninovou a do jisté míry i rozklad takové funkce na faktory, jehož důležitou applikací pak jest důkaz existence funkcí implicitních. Kapitolu zakončuje zobecnění základní věty *Cauchy*-ovy, k němuž dávají podnět dvojné integraly funkce dvou komplexních proměnných, uvažované p. *Poincaré*-em; krásným upotřebením těchto velice abstraktních úvah jest pak vyvození řady *Lagrange*-ovy a jejího zobecnění pro případ dvou rovnic, *Laplace*-em podaného.

Kap. X. věnována theorii konformního (isogonalného) zobrazování rovinných ploch: poukázáno k jeho totožnosti s problemem *Dirichlet*-ovým a podány úvahy p. *Schwarz*-e, vedoucí k zobrazení plochy omezené analytickými oblouky.

Kap. XI. a XII. obsahují základy theorie differencialných rovnic. Nejprve vyvinuty dle *Cauchy*-a dva důkazy o existenci integralův soustavy obyčejných differencialných rovnic, jakož i autorova methoda založená na posloupných approximacích, jakož i důkaz o existenci integralův soustavy partialných linearných rovnic, poprvé též od *Cauchy*-ho podaný. V kap. XII. uvažovány specialně differencialné rovnice prvního řádu, jich body singularné, rovnice *Riccati*-ova, provedena inverse elliptického integralu, čímž získána funkce dvojperiodická a tato vyjádřena podílem dvou celistvých funkcí, jež v případě kanonického tvaru elliptického integralu jsou *Weierstrass*-ovy funkce Al a Al_1. Čtenáři tak předvedeny krásné a důležité applikace obecné theorie funkční.

V kap. XIII. studovány algebraické funkce jedné proměnné: povaha jich bodů kritických, jich rozvinutí v řady mocninové — dle klassické práce *Puiseux*-ovy, odvozena věta p. *Nöther*-a, dle níž lze obapolně racionalnou transformací proměnných toho dojíti, že vícenásobné body transformované algebraické čáry nemají splývajících tečen, a sestrojena stručným a přece jasným způsobem t. z. *Riemann*-ova plocha příslušná algebraické funkci, jejíž všecky kritické body jsou rázu nejjednoduššího, čehož lze vždy racionalnou transformací dosáhnouti. Deformací převedena tato plocha dle *Clifford-a* na desku opatřenou jistým počtem otvorův, ku kteréž připojeny další úvahy o souvislosti, o uzavřených čarách a t. z. řezech na ploše. Kapitola končí rozšířením *Cauchy*-ových vět na funkce jednoznačné v *Riemann*-ově ploše.

Kap. XIV. jedná na základě předchozích obecných úvah o *Abel*-ových integralech, o jich periodách, o proslulém theoremu *Abel*-ovu, o integralech prvního druhu: jich počtu, t. linearně neodvislých, jenž jest t. z. *rodem* (genre, Geschlecht) dané algebraické čáry, o normalném jich tvaru, o relacích mezi jich periodami, a podává obdobné úvahy o integralech druhého a třetího druhu.

V kap. XV. proveden rozklad libovolné funkce, jež jest jednoznačna na *Riemann*-ově ploše, na jednoduché elementy t. integraly druhého druhu a ukázáno, že nelze na takové funkci žádati, by měla μ libovolně daných polů, nepřesahuje-li μ rod *Riemann*-ovy plochy: věta, jež u *Weierstrass*-e jest definicí rodu algebraické funkce; dále vyvinuta věta *Riemann-Roch-ova*, birationalné transformace na algebraické čáře, zařaďování jich do tříd a pojednáno specialně o čarách hyperelliptických, zvlášť o čarách rodu 2.

Kap. XVI., přidržujíc se prvního z obou stanovisek na počátku vytčených, vychází z dané *Riemann*-ovy plochy a ukazuje nejprve existenci jistých harmonických funkcí a pak funkcí analytických 1. a 2. druhu, a konečně algebraických funkcí jednoznačných na oné ploše; na konec provedena generalisace příslušná koncepci *Beltrami*-ho nahoře naznačené.

Poslední XVII. kap. věnována algebraickým čarám rodu nulltého čili unikursalním a čarám rodu prvního, jichž studium zde přirozeně vede k základním vlastnostem dvojperiodických funkcí.

Tento stručný nástin obsahu II. svazku díla p. *Picard*-ova svědčí o bohatosti látky v něm směstnané; v příčině způsobu, jakým tato podána, platí to, co bylo řečeno o I. svazku: exposice jest při vší přesnosti a stručnosti přece jasná a elegantní a studium podrobnější usnadněno četnými citaty, vztahujícími se až k nejnovějším publikacím. Dosud vydané dva svazky již jasně ukazují, jak široce a pevně spisovatel zakládá slíbené výklady o differencialných rovnicích, čímž jen sesíleno naše přání, by i další části tak krásného spisu byly v brzku v rukou čtenářův.

Ed. Weyr.