Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

V. Sukdol

Steinerovy elipsy. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 5, R78--R83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120871

čtenáři) a v bodech koncových tečny P^{ϱ}, P^{σ}. Považujme P^{σ} za stopu tečné roviny σ, dotýkající se kužele podél površky vp, a P^{ϱ} za stopu roviny $\varrho \parallel \sigma$ protínající kužel podle věty Dandelinovy v parabole K'. Zvolme opět na P^{ϱ} bod q a veďme jím v rovině ϱ přímku L, kolmou na P^{ϱ} a vyhledejme její průsečíky s kuželem. Poněvadž přímka L a površka vp jsou spolu rovnoběžny, určují rovinu λ, jejíž stopa je $pq \equiv P^{\lambda}$; tato protíná kružnici K v dalším bodě c, v němž vedená površka vc kužele protíná přímku L v hledaném průsečíku m, patřícím parabole K'. Průmět jeho $m_1 \equiv$ $\equiv (L_1 \times v_1 c)$ náleží pak parabole K'_1.

Ježto $\triangle\, cm_1q$, $\triangle\, v_1pc$ jsou podobné, platí

$$\overline{q_1m_1} = \overline{m_1c};$$

připočteme-li na obě strany délku poloměru r vidíme, že

$$\overline{qm_1} + r = \overline{m_1c} + r,$$

čili

$$\overline{m_1q_0} = \overline{m_1v_1}.$$

Bod m_1 je stejně vzdálen od pevného bodu $f \equiv v_1$ a od pevné přímky D, vedené rovnoběžně s P^{ϱ} ve vzdálenosti r, leží tudíž na parabole K'_1, jejímž ohniskem je bod v_1.

Steinerovy elipsy.

Prof. Dr. *V. Sukdol.*

(Dokončení.)*)

II.

Kolem pevného bodu $P\,(p_1 : p_2 : p_3)$ nechť se otáčí přímka p, jím procházející, daná rovnicí

$$(kp_2 + p_3)\, x_1 - kp_1x_2 - p_1x_3 = 0. \tag{40}$$

Tato přímka protíná stranu BC v bodě

$$D\left(0,\ \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\beta - k\sin\gamma},\ -\frac{2kr \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\beta - k\sin\gamma}\right),$$

stranu CA v bodě

$$E\left(\frac{2rp_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\gamma},\ 0,\ \frac{2r\,(kp_2 + p_3)\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\gamma}\right)$$

a stranu AB v bodě

---

*) V I. části článku vyskytly se dvě malé tiskové chyby: Na str. 45 v rovnici (29) mocnitel ve jmenovateli má býti $\frac{4}{3}$; na str. 47 v rovnici (39) má býti: $e = \frac{2}{3} r \sqrt[4]{4[(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 - 12 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma)]}$. Prosíme zdvořile čtenáře, aby si je opravil.

$$F\left(\frac{2krp_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{kp_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\beta}, \frac{2r\,(kp_2 + p_3)\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{kp_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\beta}, 0\right).$$

Bod souměrný s bodem D podle středu S' strany BC jest

$$D'\left(0, -\frac{2kr \sin\alpha \sin^2\gamma}{\sin\beta - k\sin\gamma}, \frac{2r \sin\alpha \sin^2\beta}{\sin\beta - k\sin\gamma}\right).$$

Bod souměrný s bodem E podle středu S'' strany CA jest

$$E'\left(\frac{2r\,(kp_2 + p_3)\sin\beta \sin^2\gamma}{p_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\gamma}, 0, \frac{2rp_1 \sin^2\alpha \sin\beta}{p_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\gamma}\right).$$

Bod souměrný s bodem F podle středu S''' strany AB jest

$$F'\left(\frac{2r\,(kp_2 + p_3)\sin^2\beta \sin\gamma}{kp_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\beta}, \frac{2rkp_1 \sin^2\alpha \sin\gamma}{kp_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\beta}, 0\right).$$

Poněvadž determinant 3. stupně, vytvořený ze souřadnic bodů D', E', F', jest identicky roven nule, leží body D', E', F' v jedné přímce p', jejíž rovnice jest

$$kp_1x_1 \sin^2\alpha - (kp_2 + p_3)\, x_2 \sin^2\beta - k\,(kp_2 + p_3)\, x_3 \sin^2\gamma = 0. \quad (41)$$

Jakou čáru obaluje přímka p', otáčí-li se přímka p kolem pevného bodu P?

Derivací rovnice (41) podle proměnného parametru k obdržíme

$$p_1x_1 \sin^2\alpha - p_2x_2 \sin^2\beta - (2kp_2 + p_3)\, x_3 \sin^2\gamma = 0. \quad (42)$$

Eliminací k z rovnic (41) a (42) obdržíme rovnici obálky přímky p':

$$\begin{aligned} p_1^2x_1^2 \sin^4\alpha - 2p_1p_2x_1x_2 \sin^2\alpha \sin^2\beta + p_2^2x_2^2 \sin^4\beta - \\ - 2p_1p_3x_1x_3 \sin^2\alpha \sin^2\gamma - 2p_2p_3x_2x_3 \sin^2\beta \sin^2\gamma + \\ + p_3^2x_3^2 \sin^4\gamma = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Obálkou přímky p' je tedy kuželosečka vepsaná do základního trojúhelníka, jak se snadno přesvědčíme srovnáním s rovnicí (15): $c_1 = p_1 \sin^2\alpha$, $c_2 = p_2 \sin^2\beta$, $c_3 = p_3 \sin^2\gamma$.

Každému bodu P odpovídá určitá kuželosečka vepsaná do $\triangle ABC$ a naopak každé kuželosečce vepsané do $\triangle ABC$ odpovídá určitý bod P.

Kuželosečka (43) je hyperbola, parabola nebo elipsa podle toho, jsou-li její průsečíky s přímkou úběžnou (20) dva reálné body různé nebo splývající anebo dva imaginární body, t. j. podle toho, je-li

$$p_1p_2p_3\,(p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma) \lesseqgtr 0.$$

Je-li bod P v nekonečnu, t. j. platí-li

$$p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma = 0,$$

je kuželosečka (43) parabola. Jinak je vždy

$$p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma > 0 \quad (44)$$

a tedy není-li kuželosečka (43) parabola, je hyperbola nebo elipsa podle toho, je-li

$$p_1p_2p_3 \lesseqgtr 0.$$

Je-li ovšem některá ze souřadnic bodu P rovna nule, t. j. leží-li bod P v jedné ze stran základního trojúhelníka, je kuželosečka zvrhlá.

Kuželosečka (43) je tedy elipsou, leží-li bod P uvnitř $\triangle ABC$ anebo uvnitř některého z úhlů vrcholových k vnitřním úhlům $\triangle ABC$: v prvém případě bude elipsa vepsána dovnitř $\triangle ABC$, v druhém bude trojúhelníku *vně* vepsána.

Souřadnice středu kuželosečky (43) vypočteme jako souřadnice pólu úběžné přímky (20). Polára bodu S $(s_1 : s_2 : s_3)$ vzhledem ke křivce (43) má rovnici

$$\begin{aligned} p_1 \sin^2 \alpha \,(p_1 s_1 \sin^2 \alpha - p_2 s_2 \sin^2 \beta - p_3 s_3 \sin^2 \gamma)\, x_1 &+ \\ + p_2 \sin^2 \beta \,(- p_1 s_1 \sin^2 \alpha + p_2 s_2 \sin^2 \beta - p_3 s_3 \sin^2 \gamma)\, x_2 &+ \\ + p_3 \sin^2 \gamma \,(- p_1 s_1 \sin^2 \alpha - p_2 s_2 \sin^2 \beta + p_3 s_3 \sin^2 \gamma)\, x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Srovnáním s rovnicí (20) obdržíme

$$s_1 : s_2 : s_3 = \frac{p_2 \sin \beta + p_3 \sin \gamma}{\sin \alpha} : \frac{p_3 \sin \gamma + p_1 \sin \alpha}{\sin \beta} : \frac{p_1 \sin \alpha + p_2 \sin \beta}{\sin \gamma}. \tag{45}$$

Těžiště $\triangle ABC$ jest T $(\sin \beta \sin \gamma : \sin \gamma \sin \alpha : \sin \alpha \sin \beta)$.

A poněvadž determinant třetího stupně vytvořený ze souřadnic bodů P, S, T jest identicky roven nule, leží tyto 3 body v jedné přímce.

Značí-li p_1, p_2, p_3 vzdálenosti bodu P od stran základního trojúhelníka, dále pak

$$\frac{p_2 \sin \beta + p_3 \sin \gamma}{2 \sin \alpha}, \quad \frac{p_3 \sin \gamma + p_1 \sin \alpha}{2 \sin \beta}, \quad \frac{p_1 \sin \alpha + p_2 \sin \beta}{2 \sin \gamma},$$

vzdálenosti bodu S od stran základního trojúhelníka a

$$\tfrac{2}{3} r \sin \beta \sin \gamma, \quad \tfrac{2}{3} r \sin \gamma \sin \alpha, \quad \tfrac{2}{3} r \sin \alpha \sin \beta$$

vzdálenosti bodu T od stran základního trojúhelníka, jest dělicí poměr bodu S vzhledem k bodům P, T

$$\left(\frac{p_2 \sin \beta + p_3 \sin \gamma}{2 \sin \alpha} - p_1\right) : \left(\frac{p_2 \sin \beta + p_3 \sin \gamma}{2 \sin \alpha} - \tfrac{2}{3} r \sin \beta \sin \gamma\right),$$

neboli vzhledem k (44)

$$(r \sin \beta \sin \gamma - \tfrac{3}{2} p_1) : (\tfrac{1}{3} r \sin \beta \sin \gamma - \tfrac{1}{2} p_1) = 3 : 1.$$

Střed S kuželosečky vepsané do $\triangle ABC$ leží tedy vně úsečky PT a jeho vzdálenost od těžiště T se rovná polovině vzdálenosti PT.

Předpokládejme $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, t. j. že křivka (43) je elipsou vepsanou do $\triangle ABC$. Kdy má tato elipsa maximální obsah?

Transformujme souřadnice na pravoúhlou soustavu, v níž by elipsa měla rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

vztahy (11), (12) a (13) nabudou tvaru

$$\begin{aligned} C(a^2 + b^2) = {} & p_1{}^2 \sin^4 \alpha + p_2{}^2 \sin^4 \beta + p_3{}^2 \sin^4 \gamma + \\ & + 2p_2p_3 \cos \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + 2p_1p_3 \sin^2 \alpha \cos \beta \sin^2 \gamma + \\ & + 2p_1p_2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos \gamma, \end{aligned} \tag{11''}$$

$$C^2a^2b^2 = 8rp_1p_2p_3 \sin^4 \alpha \sin^4 \beta \sin^4 \gamma, \tag{12''}$$

$$-C^3a^4b^4 = -16r^2p_1{}^2p_2{}^2p_3{}^2 \sin^6 \alpha \sin^6 \beta \sin^6 \gamma. \tag{13''}$$

Eliminací C z rovnic (12″) a (13″) vypočteme

$$ab = \sqrt{\tfrac{1}{2}rp_1p_2p_3}. \tag{46}$$

Obsah elipsy $E = \pi\sqrt{\tfrac{1}{2}rp_1p_2p_3}$, kdež mezi proměnnými p_1, p_2, p_3 platí vztah (44). Jde tedy o vyšetření maximální hodnoty funkce dvou proměnných

$$\mathrm{f}(p_1, p_2) = 2rp_1p_2 \sin \alpha \sin \beta - p_1{}^2p_2\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} - p_1p_2{}^2\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \tag{47}$$

Podmínky pro maximum $\mathrm{f}(p_1, p_2)$ jsou

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial p_2} = 0, \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial p_1{}^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial p_2{}^2} < 0, \tag{49}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial p_1\, \partial p_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial p_1{}^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial p_2{}^2} < 0. \tag{50}$$

Podmínky (48) vedou k rovnicím

$$2rp_2 \sin \alpha \sin \beta - 2p_1p_2\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} - p_2{}^2\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 0,$$

$$2rp_1 \sin \alpha \sin \beta - p_1{}^2\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} - 2p_1p_2\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 0.$$

Z těchto dvou rovnic vyplývá čtvero řešení:

a) $p_1 = 0$, $\quad p_2 = 0$;
b) $p_1 = 2r \sin \beta \sin \gamma$, $\quad p_2 = 0$;
c) $p_1 = 0$, $\quad p_2 = 2r \sin \alpha \sin \gamma$;
d) $p_1 = \tfrac{2}{3}r \sin \beta \sin \gamma$, $\quad p_2 = \tfrac{2}{3}r \sin \alpha \sin \gamma$.

První tři řešení nutno hned předem vyloučiti, neboť pak by nešlo o elipsu, nýbrž o kuželosečku zvrhlou. Zbývá řešení d), pro něž jest

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = -\tfrac{4}{3}r \sin\alpha \sin\beta, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2} = -\tfrac{4}{3}r \sin\alpha \sin\beta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2} = -\tfrac{2}{3}r \sin\alpha \sin\beta,$$

takže podmínky (49') a (50) jsou splněny.

Rovnici *Steinerovy* elipsy maximálního obsahu, vepsané do $\triangle\, ABC$, tedy obdržíme, dosadíme-li do rovnice (43)

$$p_1 = \tfrac{2}{3}r \sin\beta \sin\gamma, \quad p_2 = \tfrac{2}{3}r \sin\alpha \sin\gamma$$

a vzhledem k (44)

$$p_3 = \tfrac{2}{3}r \sin\alpha \sin\beta.$$

Tak nám vyjde rovnice *Steinerovy* elipsy vepsané

$$x_1^2 \sin^2\alpha - 2x_1x_2 \sin\alpha \sin\beta + x_2^2 \sin^2\beta - 2x_1x_3 \sin\alpha \sin\gamma - \\ - 2x_2x_3 \sin\beta \sin\gamma + x_3^2 \sin^2\gamma = 0. \tag{51}$$

Její obsah jest $E = \pi\Delta/3\sqrt{3}$.

Souřadnice středu *Steinerovy* elipsy vepsané najdeme dosazením nalezených hodnot $p_1, p_2\, p_3$, do (45); tak obdržíme

$$\sin\beta \sin\gamma : \sin\gamma \sin\alpha : \sin\alpha \sin\beta.$$

Střed elipsy maximálního obsahu, vepsané do $\triangle\, ABC$, splývá tedy s těžištěm trojúhelníka. Body P, T, S se v tomto případě ztotožňují.

Průměr elipsy (51) sdružený s těžnicí příslušnou na př. straně BC, danou rovnicí

$$x_2 \sin\beta - x_3 \sin\gamma = 0,$$

má rovnici

$$2x_1 \sin\alpha - x_2 \sin\beta - x_3 \sin\gamma = 0, \tag{52}$$

což je rovnice přímky rovnoběžné se stranou BC. Tedy strana základního trojúhelníka a těžnice k ní příslušná mají směry sdružené vzhledem k elipse (51).

Výpočtem vzdálenosti průsečíku G přímky (52) s elipsou (51) od těžiště T nalezneme délku poloměru $\varrho_1 = TG = r \sin\alpha/\sqrt{3}$; délka sdruženého poloměru $\varrho_2 = TS' = \tfrac{1}{3}t_a$.

Z rovnic (11''), (12''), (13'') vypočteme délky poloos *Steinerovy* elipsy vepsané do $\triangle\, ABC$:

$$\tfrac{1}{6}r\,[\sqrt{2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sqrt{3}\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)} \\ \pm \sqrt{2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sqrt{3}\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)}] \tag{53}$$

a lineární výstřednost

$$\tfrac{1}{3}r \sqrt[4]{4[(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 - 12\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma]}. \tag{54}$$

Srovnáním s (38) shledáme, že jsou to právě poloviční hodnoty délek poloos a lineární výstřednosti *Steinerovy* elipsy minimálního obsahu, opsané $\triangle ABC$.

Z rovnice (51) jest na první pohled patrno, že $BC \equiv x_1 = 0$, $CA \equiv x_2 = 0$, $AB \equiv x_3 = 0$ jsou tečnami elipsy (51). Body dotyčné jsou středy S', S'', S''' stran. Je tedy *Steinerova* elipsa vepsaná do $\triangle ABC$ zároveň *Steinerovou* elipsou opsanou $\triangle S'S''S'''$.

Maximální elipsa vepsaná do $\triangle ABC$ a minimální elipsa opsaná témuž trojúhelníku mají společný střed a společné směry os; jsou spolu homothetické: středem homothetie je těžiště a poměr homothetie je 1 : 2.

Z astronomie dvojhvězd.

B. Hacar.

(Dokončení.)

První dva z těchto elementů (P, T) nazýváme dynamické, ostatní geometrické.

V obr. 2 jest C střed dráhy, ΩC uzlová přímka, CN směr k sev. pólu (východisko počítání posič. úhlů), $\Omega QP\mho$ pomocný kruh o poloměru $2a$ v rovině skutečné dráhy, elipsa $\Omega Q'P'\mho$ jeho průmět do báně nebeské. Elipsa zdánlivé dráhy není v obrazci zakreslena. Bod P je periastron ve skutečné, P' ve zdánlivé dráze,*) S' průmět skutečného ohniska S, jest tedy $CP = a$ velká poloosa skutečné dráhy, $CP' = a'$ její průmět. Budiž dále Q_0 koncový bod malé poloosy skutečné dráhy, Q'_0 jeho průmět, tedy $CQ_0 = b$ malá poloosa, $CQ'_0 = b'$ její průmět, dále je $CQ = a$ a $CQ' = b'_1$ průmět. Budiž dále α posiční úhel poloosy a' a β p. ú. poloosy b', Ω p. ú. vzestupného uzlu. Spusťme nyní kolmice PR a QT na uzlovou přímku, pak bude $\triangle CPR \cong \triangle QTC$ ($\sphericalangle PCQ = 90^0$) a proto platí o průmětech těchto trojúhelníků $\triangle CRP' = CTQ'$. A ježto

$$\triangle CRP' = -a'^2 \sin(\alpha - \Omega)\cos(\alpha - \Omega),$$
$$\triangle CTQ' = b'^2_1 \sin(\beta - \Omega)\cos(\beta - \Omega).$$

Ze srovnání obou trojúhelníků plyne základní rovnice

$$-a'^2 \sin(\alpha - \Omega)\cos(\alpha - \Omega) = b'^2_1 \sin(\beta - \Omega)\cos(\beta - \Omega) \quad (6)$$

neboli

$$\sin 2(\alpha - \Omega) = -\frac{b'^2_1}{a'^2}\sin 2(\beta - \Omega). \quad (7)$$

Posiční úhel uzlové přímky Ω. Předpokládejme, že zdánlivou elipsu i s oběma konjugovanými průměry $2a'$ a $2b'$ máme

*) Poznačení bodů P' a Q' nedopatřením v obr. 2 vynecháno, lze je však snadno doplniti.