Miloslav Hlaváček
Příspěvek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ čísly celými I.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 5, R73--R75

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120870`

ČÁST STŘEDOŠKOLSKÁ

Příspěvek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ čísly celými.

Dr. *Mil. Hlaváček.*

I. Buďtež x, y, z, u celá čísla hovící uvažované rovnici. Zaveďme racionální čísla p, q, r, s vztahy

$$\begin{aligned} x + yi &= (p + qi)\,(z + ui), \\ x - yi &= (p - qi)\,(z - ui), \\ x + y &= r\,(z + u), \\ x - y &= s\,(z - u), \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Rozštěpením prvé (nebo druhé) rovnice podle reálnosti obdržíme

$$\begin{aligned} x &= pz - qu, \\ y &= qz + pu. \end{aligned}$$

Připojíme 3. a 4. rovnici

$$\begin{aligned} x + y &= rz + ru, \\ x - y &= sz - su. \end{aligned} \tag{2}$$

Ježto vylučujeme triv. případ, že $x = y = z = u = 0$, platí

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & -p, & q \\ 0, & 1, & -q, & -p \\ 1, & 1, & -r, & -r \\ 1, & -1, & -s, & s \end{vmatrix} = 0,$$

čili po úpravě

$$p^2 + q^2 - p\,(r + s) + rs = 0. \tag{I}$$

Znásobením levých i pravých stran rovnic soustavy (1) dostaneme druhou základní rovnici

$$(p^2 + q^2)\,rs = 1. \tag{II}$$

Naopak, známe-li racionální řešení soustavy (I) a (II), můžeme známým způsobem ze soustavy (2) vypočísti x, y, z, u pomocí p, q, r, s (vlastně poměr těch veličin, ale o ten nám běží).

Vypočtěme ze (II) $p^2 + q^2$ a dosaďme do (I). Obdržíme

$$\frac{1}{rs} - p(r + s) + rs = 0, \text{ a z toho}$$

$$p = \frac{1 + r^2 s^2}{rs(r + s)}. \tag{3}$$

Dosaďme tento výraz zpátky do (II) a vypočtěme q^2:

$$q^2 = \frac{1}{rs} - p^2 = \frac{rs(r^2 + s^2) - r^4 s^4 - 1}{r^2 s^2 (r + s)^2}. \tag{4}$$

Čitatel ve (4) má tedy býti čtvercem rac. čísla. Známe-li tedy všechna rac. řešení rovnice

$$-r^4 s^4 + rs^3 + r^3 s - 1 = A^2, \tag{III}$$

známe i všechna x, y, z, u, jež hoví soustavě (1) a tím i rovnici v nadpise tohoto článku.

Máme-li nějaké řešení (III) ve tvaru $s = R_1(r)/R_2(r)$, kde R_1, R_2 jsou rac. celistvé funkce arg. r, dospějeme nejkratší cestou k výrazům pro x, y, z, u takto. Ježto

$$r = \frac{x + y}{z + u}, \quad s = \frac{x - y}{z - u},$$

můžeme psáti

$$x + y = kr, \qquad z + u = k, \tag{5}$$

$$x - y = l \, . \, R_1(r), \quad z - u = l \, . \, R_2(r), \tag{6}$$

a dosadíme tyto výrazy do rovnice

$$\begin{aligned}(x - y)(x + y)\,[(x - y)^2 + (x + y)^2] &= \\ = (z - u)(z + u)\,[(z - u)^2 + (z + u)^2],\end{aligned} \tag{7}$$

odkud vypočteme poměr k/l; čitatel obdrženého výrazu zvolíme za k, jmenovatelem pak jest l.

II. Pišme (III) ve tvaru

$$(r^3 s - 1)(1 - rs^3) = A^2 \tag{III'}$$

a předpokládejme, že $r = t^3$, kde t je rac. číslo. Pak máme dalším rozkladem

$$(t^9 . s - 1)(1 - ts)(1 + ts + t^2 s^2) = A^2.$$

Položme $s = s' + 1/t^9$. Obdržíme

$$\begin{aligned}(t^9 . s' + t^8 - 1) . \left(1 - \frac{1}{t^2} - ts'\right) \left[1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} + \right.\\ \left. + s'\left(t + \frac{2}{t}\right) + t^2 s'^2\right] = A^2,\end{aligned}$$

což upravíme na tvar

$$\left(t^6 s' + \frac{t^6-1}{t^3}\right)\left(1 - \frac{t^3 s'}{t^2-1}\right)\left[\frac{t^6-1}{t^3} + s'(t^2+2)(t^2-1) + \right.$$
$$\left. + s'^2 t^3 (t^2-1)\right] = A^2.$$

Položíme-li $A = \frac{t^6-1}{t^3} + s'(t^2+2)(t^2-1) + s'^2(t^2-1)t^3$, obdržíme po krácení kvadr. rovnici pro s' bez absol. členu, a z ní plyne

$$s' = \frac{t^8 - 3t^6 + 3t^2 - 1}{t^3(t^6 + t^4 - 2t^2 + 1)}$$

a tedy

$$s = s' + \frac{1}{t^3} = \frac{t^6 - 2t^4 + t^2 + 1}{t(t^6 + t^4 - 2t^2 + 1)}.$$

Z rovnic (5), (6), (7) dostaneme

$$\begin{aligned} x &= t^6 + 3t^5 - 2t^4 + t^2 + 1, \\ y &= -t^6 + 3t^5 + 2t^4 - t^2 - 1, \\ z &= t(t^6 + t^4 - 2t^2 + 3t + 1), \\ u &= t(-t^6 - t^4 + 2t^2 + 3t - 1); \end{aligned}$$

kde ještě lze položiti $t = a/b$ (a, b celá čísla) a pak výrazy pro x, y, z, u učiniti homogenními. — To je vlastně řešení p. Matějíčka (Rozhledy, roč. 5, 1925, čís. 1). (Příště dokončení.)

O průmětu kuželoseček rotačního kužele.

Podle † řed. *V. Jeřábka* sestavil dr. *J. Roháček.*

Rotační kužel budiž dán vrcholem v a podstavnou kružnicí $K(v_1 a)$ v průmětně π. K zvolené tětivě $\overline{cd}$ v kružnici K sestrojme pól p a příslušnou sdruženou poláru, kterou považujeme za stopu

P^σ roviny σ, procházející vrcholem kužele v; rovinu ϱ pak veďme přímkou cd rovnoběžně. Rovina ϱ protne kužel v elipse K' (obr. 1).

P^ϱ roviny ϱ, vedené rovnoběžně s rovinou σ, určenou stopou $cd \equiv P^\sigma$ a vrcholem v. Rovina ϱ protne kužel v hyperbole K (obr. 2).

Dokážeme nyní, že *průmětem této křivky K' je kuželosečka K'_1, jejímž jedním ohniskem je průmět v_1 vrcholu v kužele.*

Za tím účelem veďme v rovině sečné ϱ přímku L, kolmou na její stopu P^ϱ v jakémkoliv bodě q ($L_1 \perp \overline{cd}$) a hledejme její průsečíky s kuželem. Přímkou L a