Jan Vojtěch
Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 3, 273--293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120866

Typy a kontinuitní grupy kollineací v S_3.

Napsal dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

(Pokračování.)

Protože druhý bod invariantní může nabýti ∞^1 poloh, při každé pak dvojpoměr ∞^1 hodnot, má grupa uv. transformací dva parametry. Jestliže $k_2 k_1 = 1$, platí dle hořejšího vzorce pro výslednou transformaci, není-li identická, $O''_2 O_1 = 0$, tedy $O''_2 \equiv O_1$, transformace ta je typu [(00)]; limitní typus projektivní transformace je tedy produktem dvou transformací s týmž jedním bodem samodružným, jestliže jich dvojpoměry jsou reciprokých hodnot. V dvouparametrové grupě transformací [00] téhož jednoho bodu samodružného jest ovšem obsažena i jednoparametrová grupa transformací [(00)] s týmž bodem invariantním.

Dvě transformace [(00)] s různými body invariantními mají za produkt transformaci [00], neexistuje tedy širší než jednoparametrová grupa transformací [(00)].

9. Všechny kollineace v S_2 tvoří kontinuitní osmiparametrovou grupu $^1\mathfrak{g}_8$; ∞^8 je totiž počet všech kollineací nejobecnějšího typu K^1 : [000].

Obecné homologie [10] (kollineace K^4) téhož středu O a téže osy p tvoří v počtu ∞^1 kontinuitní grupu jednoparametrovou $^4\mathfrak{g}_1$; existence grupy, její kontinuita, počet parametrů i hodnota dvojpoměru výsledné kollineace ($k = k_1 . k_2$) plyne z vlastností jednoparametrové grupy proj. transformací [00] na paprscích bodem O. Limitní homologie K^5 : [(10)] s touže osou p a týmž incidentním středem O tvoří $^5\mathfrak{g}_1$, na každém paprsku bodem O existuje jednoparametrová grupa transformací [(00)].

Kollineace typu K^1 : [000] s týmž invariantním trojúhelníkem tvoří v počtu ∞^2 (každý z obou char. dvojpoměrů může nabýti ∞^1 hodnot) grupu $^1\mathfrak{g}_2$; na stranách a ve vrcholech inv.

trojúhelníka existují jednopar. grupy tranformací [00]. Existenci grupy této lze také dokázati poukazem na vytvoření kollineace [000] dvěma homologiemi; při skládání dvou takových kollineací s invar. trojúhelníkem možno pořádek čtyř homologií zde se vyskytujících libovolně měniti, pročež kollineace výsledná jeví se jako produkt dvou homologií, z nichž každá je produktem dvou téhož středu a osy.

Podobně ∞^2 kollineací typu K^2: [(00)0] s týmž invar. útvarem $O_1 O_2 p_1 (p_2)$ skládá grupu ${}^2\mathfrak{g}_2$ (konstanty k i a obecné a limitní homologie jako složek takové kollineace nabývají každá ∞^1 hodnot); na $p_2 \equiv O_1 O_2$ a v $O_2 \equiv (p_1, p_2)$ jsou jednopar. grupy transformací [00], na p_1 a v O_1 jednopar. grupy transformací [(00)]. U typu K^3 : [(000)] s invariantní přímkou p_2 a incidentním bodem O_1 možno k danému bodu sestrojiti pomocí dvou limitních homologií na ∞^3 způsobů bod korrespondující, i máme zde grupu ${}^3\mathfrak{g}_3$; na p_2 a v O_1 jsou jednopar. grupy transformací [(00)].

Uvedené grupy ${}^1g_2$, ${}^2g_2$, ${}^3g_3$, ${}^4g_1$, ${}^5g_1$ můžeme nazvati *základními* grupami příslušných typů.

10. *Širší* grupy dostaneme vždy, jestliže při kombinaci dvou nebo více kollineací téhož typu, jež mají pouze část svých invariantních útvarů společnou, vychází zase kollineace téhož typu.

Dvě homologie [10] s touže osou p a různými středy O_1, O_2 mají za produkt homologii [10] téže osy, jejíž char. dvojpoměr je součinem char. dvojpoměrů složek. Neboť výsledná kollineace má předně touž přímku invariantních bodů p, na spojnici $O_1 O_2$ středů obou složek jsou zde dvě projektivní transformace [00] s jedním spol. bodem samodružným (průsečíkem R spojnice s osou), existuje tedy při produktu jejich druhý bod samodružný O; ten je invar. bodem výsledné rovinné kollineace, jež je proto obecnou homologií. Dvojpoměr výslednice na paprsku $O_1 O_2 \equiv OR$ i ve svazku R je roven součinu dvojpoměrů složek, proto platí tento vztah vůbec. Tím prokázána existence dvouparametrové grupy ${}^4\mathfrak{g}_2$ s přímkou p bodů veskrze samodružných a invariantní přímkou $O_1 O_2$. Připojíme-li k produktu homologií (O_1, p), (O_2, p), třetí (O_3, p), jejíž střed O_3 neleží na $O_1 O_2$, dostaneme opět homologii s osou p; existuje proto

$^4\mathfrak{g}_3$ se základní přímkou p, s třemi parametry v souhlase s počtem ∞^2 poloh středu a ∞^1 hodnot dvojpoměru.

Invariantní útvar Op grupy $^4g_1$ je v celku sobě samému duální, grupa $^4g_1$ proto soběduální; jinak u $^4g_2$ a $^4g_3$, jich duální grupy $^4\gamma_2$ a $^4\gamma_3$ mají invariantní bod jako střed svazku invariantních paprsků, první mimo to druhý invar. bod, jenž je středem svazku os jednotlivých homologií v grupě.

Dvě limitní homologie [(10)] téže osy p různých středů O_1, O_2 na p dávají zase limitní homologii s osou p, jejíž střed leží ovšem na p; tyto elace v počtu ∞^2 tvoří $^5\mathfrak{g}_2$ se základní přímkou p. Její duální grupa $^5\gamma_2$ má svazek invariantních paprsků, každý z nich jest osou jednoparametrové grupy elací obsažené v $^5\gamma_2$.

U typu K^1 vyjděme od jedné strany (třebas $p_3 \equiv O_1O_2$) invariantního trojúhelníka; na ní může existovati grupa proj. transformací [00] s 1, 2, 3 parametry. V prvém případě jsou dva vrcholy trojúhelníka O_1 a O_2 samodružné body kollineace; má-li vrchol O_3 pevnou polohu, je celý trojúhelník invariantní, příslušná grupa je základní $^1g_2$. Jestliže kombinujeme dvě kollineace, jež liší se nejen char. dvojpoměry, nýbrž i polohou vrcholu O_3 tak, že O'_3 leží na $p_1 \equiv O_3O_2$ (nebo na $p_2 \equiv O_3O_1$), jest produktem jich kollineace typu K^1 s invariantními O_1, O_2 a bodem na přímce jdoucí skrze O_2 (nebo O_1); poněvadž třetí vrchol nabývá tak ∞^1 poloh, ke každé pak patří ∞^2 kollineací, tvoří všechny kollineace grupu $^1\mathfrak{g}_3$ s invariantním útvarem $O_1O_2p_1(p_3)$. Vrchol O_3 může však nabýti i ∞^2 poloh v rovině, vzniká grupa $^1\mathfrak{g}_4$ s invariantním útvarem $O_1O_2(p_3)$. Podobně v případě jednoparametrové grupy jednorozměrných transformací na p_3 s invariantním třebas bodem O_1 existují grupy: při pevné poloze bodu O_3 uvedená už $^1g_3$ s invar. $O_1O_3p_3(p_2)$, při ∞^1 polohách bodu O_3 na p_2 čtyřparametrová grupa, duální k uvedené $^1g_4$, tedy $^1\gamma_4$ s invar. útvarem $p_2p_3(O_1)$, konečně při ∞^2 polohách bodu O_3 v rovině grupa $^1\mathfrak{g}_5$ s invariantním útvarem O_1p_3. Jestliže na p_3 jest grupa tříparametrová proj. transformací, může bod O_3 míti buď polohu pevnou, máme $^1\mathfrak{g}'_4$ s invariantním útvarem O_3p_3, nebo může míti ∞^2 poloh v rovině, příslušná grupa je $^1\mathfrak{g}_6$ s invar. p_3. Vyjdeme-li duálně od jednoho vrcholu trojúhelníka $O_1O_2O_3$ jako středu svazku v celku invariantního, sestrojíme uvedeným způsobem mimo grupy už nalezené pouze jednu novou, totiž ${}^1\gamma_6$ s invar. bodem O_3. Existují tedy úhrnem (mimo základní ${}^1g_2$ a spolu s ${}^1g_8$ dříve uvedenou) tyto širší grupy kollineací typu K^1, sestrojené z grup ${}^1g_2$: ${}^1g_3$, ${}^1g_4$, ${}^1g'_4$, ${}^1g_5$, ${}^1g_6$, ${}^1g_8$ a duální ${}^1\gamma_4$, ${}^1\gamma_6$.

Invariantní útvar $O_1 O_2 p_1 (p_2)$ kollineace K^2 : [(00) 0] obsahuje 2 přímky různé povahy, na p_2 je proj. transformace [00], na p_1 však [(00)]. Učiníme napřed jednu, potom druhou váchodiskem sestrojení širších grup; na p_2 může býti grupa proj. transformací s 1, 2, 3 parametry, na p_1 pouze grupa jednoparametrová. Dlužno však vždy uvážiti, není-li snad výslednicí dvou kollineací typu K^2 kollineace typu K^1, v těch případech neexistuje ovšem grupa kollineací K^2; této opatrnosti nebylo třeba při konstrukci grup kollineací K^1. Je-li na p_2 grupa jednorozměrných transformací s dvěma samodružnými body O_1, O_2, má přímka p_1 bodem O_2 buď tutéž polohu při dvou kollineacích nebo různou; v prvním případě máme uvedenou už základní grupu ${}^2g_2$, v druhém grupu ${}^2g_3$ s invariantním útvarem $O_1 O_2 (p_2)$, přímky p_1 tvoří svazek středu O_2, v němž existuje při této grupě dvoupar. grupa transformací [00] se samodružným paprskem p_2. Jestliže jest na p_2 dvoupar. grupa jest jejím jediným bodem invariantním buď O_1 nebo O_2, jež oba jako body různé povahy nutno vyšetřiti; je-li bod O_1 invariantní, vzniká ${}^2g_4$, neboť dvě kollineace K^2 se společnou p_2 a společným O_1 dávají opět kollineaci K^2 (výslednice obou má druhý bod invariantní na p_2, ve svazku O_1 a tedy duálně na protilehlé přímce druhým bodem inv. existuje při obou složkách a proto i při výslednici transformace [(00)] s týmž samodružným elementem). Je-li invariantní p_2 a na ní bod O_2, může p_1 míti polohu buď stálou nebo nabývati ∞^1 poloh ve svazku O_2; dle toho existuje jednak ${}^2\gamma_3$ s invar. $p_1 p_2 (O_2)$, jednak ${}^2g'_4$ s invar. $O_2 p_2$. Připustíme-li na p_2 grupu tříparametrovou, nedojdeme ke grupě kollineací K^2 t. j. kombinujeme-li dvě kollineace K^2 se společnou p_2, ale žádným bodem společným, jest jejich produkt kollineace K^1. S druhé strany dejme tomu, že na p_1 existuje jednopar. grupa transformací [(00)]; mimo ${}^2g_2$ obdržíme tu ${}^2\gamma_4$ s invar. $O_2 p_1$. Týchž výsledků dospějeme při postupu duálním. Celkem tedy lze konstruovati z ${}^2g_2$ tyto širší grupy : ${}^2g_3$, ${}^2g_4$, ${}^2g'_4$ a duální ${}^2\gamma_3$, ${}^2\gamma_4$.

11. *Užší grupy* existují u typů K^1, K^2, K^3. Kollineace K^1 s invariantním trojúhelníkem $O_1O_2O_3$ je charakterisována dvěma dvojpoměry k_1, k_2; při proměnlivých k_1 a k_2 vytvořují tyto kollineace grupu ${}^1g_2$. Ustanovíme-li mezi těmito dvojpoměry vztah $k_2 = k_1^r$, máme při konstantním r a proměnlivém k_1 pouze ∞^1 kollineací téhož invariantního trojúhelníka. Tyto tvoří jednoparametrovou grupu ${}^1\mathfrak{g}_{1(2)}$ s invar. trojúhelníkem a konstantou r; produkt dvou takových kollineací jest totiž opět kollineace téhož trojúhelníka a konstanty r. Neboť jsou-li při prvé kollineaci na stranách (duálně ve vrcholech) trojúhelníka proj. transformace dvojpoměrů k_1 (na O_1O_3 a v O_2), $k_2 = k_1^r$ (na O_2O_3 a v O_1) a $k_1k_2^{-1} = k_1^{1-r}$ (na O_1O_2 a v O_3), při druhé kollineaci resp.

$$k'_1,\ k'_2 = k'^r_1,\ k'^{(1-r)}_1,$$

jsou při produktu obou tamtéž transformace s dvojpoměry

$$k''_1 = k_1 \,.\, k'_1,\ k''_2 = k_2 \,.\, k'_2 = k_1^r \,.\, k'^r_1 = (k_1 \,.\, k'_1)^r = k''^r_1,$$
$$k_1^{1-r} \,.\, k'^{(1-r)}_1 = (k_1 \,.\, k'_1)^{1-r} = k''^{(1-r)}_1.$$

Jaký je geometrický význam konstanty r? Při kollineacích grupy ${}^1g_{1(2)}$ transformuje se každý bod v rovině v ∞^1 bodů, jež s původním vytvořují křivku; plyne to z kontinuity grupy transformační. Křivek těch je ∞^1 (ke každému bodu libovolné přímky patří jedna), nemají bodů společných mimo vrcholy trojúhelníka. Tečna křivky takové tvoří spolu s třemi spojnicemi dotyčného bodu s vrcholy trojúhelníka čtveřinu dvojpoměru r (duálně tečna křivky protíná strany trojúhelníka v bodech, jež spolu s dotyčným bodem tvoří čtveřinu dvojpoměru r). Sledujme k vůli důkazu kollineaci K^1 jako produkt homologií $(O_1,\ p_1 \equiv O_2O_3,\ k_1)$ a $(O_2,\ p_2 \equiv O_1O_3,\ k_1^r)$ a označme původní bod A, jeho transformovaný v první homologii B, v druhé D, transformovaný k B v druhé homologii C, průsečík spojnice AO_1 se stranou O_2O_3 označme R_1, spojnice AO_2 se stranou O_1O_3 obdobně R_2. I platí $(O_1R_1AB) = k_1$, $(O_2R_2AD) = k_1^r$; promítneme-li první čtveřinu z O_2 na O_3C, druhou z O_1 tamtéž, máme $(PO_3NC) = k_1$, $(PO_3MC) = k_1^r$, kde

$$P \equiv [O_1O_2,\ O_3C],\ N \equiv [O_2D,\ O_3C],\ M \equiv [O_1B,\ O_3C].$$

Odtud vychází

$$(O_3CPM) = 1 - k_1^r,\ (O_3CPN) = 1 - k_1,$$

a tedy

$$(O_3CNM) = \frac{1-k_1^r}{1-k_1};$$

v bodě A máme čtveřinu

$$A(O_3CNM) = A(O_3CO_2O_1) = A(O_2O_1O_3C) = \frac{1-k_1^r}{1-k_1}.$$

Blíží-li se k_1 hodnotě 1, blíží se bod C bodu A, AC blíží se tečně křivky uvažované a platí

$$A(O_2O_1O_3A) = lim\ \frac{1-k_1^r}{1-k_1} = {}^{k_1}\!\Big/^{1} \frac{-rk_1^{r-1}\,dk_1}{-dk_1} = r.$$

Dejme tomu, že tečna protíná strany trojúhelníka $O_1O_2O_3$, resp. v bodech O'_1, O'_2, O'_3; protneme-li uvažovanou čtveřinu paprsků bodem A jdoucí, totiž AO_2, AO_1, AO_3 a tečnu, na př. stranou O_2O_3 a průsek promítneme z O_1 na tečnu, dostaneme $(O'_3AO'_2O'_1)$ čili $(AO'_3O'_1O'_2) = r$.*)

Jako obsahuje základní grupa ${}^1g_2$ ∞^1 subgrup ${}^1g_{1(2)}$, jednu pro každou z ∞^1 hodnot konstanty r, obsahují i některé ze širších grup kollineací typu K^1 subgrupy charakterisované konstantou r. Musí však býti zajištěno, aby na dvou stranách trojúhelníka nebo duálně ve dvou jeho vrcholech, nebo konečně na jedné straně a v jednom incidentním vrcholu (t. j. vrcholu, který je středem svazku, v němž existují proj. transformace jiného dvojpoměru než v bodové řadě zmíněné strany) existovaly grupy jednorozměrných transformací téhož proměnlivého dvojpoměru k_1 a konstanty r; char. dvojpoměry na zbývajících stranách a v ostatních vrcholech jsou tím stanoveny. Na př. z grupy ${}^1g_5$ s invariantním útvarem O_2p_1 dostaneme subgrupu ${}^1g_{4(5)}$; neboť dvě kollineace s dvojpoměry k_1 a $k_2 = k_1^r$, resp. k'_1, $k'_2 = k'^r_1$ v O_2 a na p_1 dávají v O_2 kollineaci s dvojpo-

*) K týmž výsledkům dojdeme cestou analytickou; označme souřadnice původního bodu A vzhledem k inv. trojúhelníku x_1, x_2, x_3, souřadnice bodu C y_1, y_2, y_3 a pokládejme K^1 zase za výslednici dvou homologií. Obdržíme transformační rovnice kollineace K^1 ve tvaru

$$y_1 : y_2 : y_3 = k_1x_1 : k_2x_2 : x_3.$$

Rovnice křivky vytvořené body, v něž přechází A transformacemi grupy ${}^1g_{1(2)}$, jest $y_1^{-r}y_2y_3^{r-1} = x_1^{-r}x_2x_3^{r-1} = c$.

měrem $k''_1 = k_1 \,.\, k'_1$, ježto v O_2 existuje dvoupar. grupa transformací, jichž dvojpoměry se uv. způsobem kombinují; na p_1 má výsledná transformace dvojpoměr $k''_2 = k_2 \,.\, k'_2$, protože tam existuje také dvoupar. grupa, dosadíme-li pak za k_2 a k'_2, vychází $k''_2 = k_1^r \,.\, k'^r_1 = (k_1 \,.\, k'_1)^r = k''^r_1$, tedy týž proměnlivý parametr jako v O_2 a týž vztah $k''_2 = k''^r_1$, kterým se vyznačují kollineace-složky.

Tak nalezneme mimo ${}^1g_{1(2)}$ grupy: ${}^1\mathfrak{g}_{2(3)}$ s invar. dvěma body a přímkou jedním z nich (mimo spojnici bodů), ${}^1\mathfrak{g}_{3(4)}$ s invar. dvěma body (a přímkou je spojující), ${}^1\mathfrak{g}_{4(5)}$ (příkladem uvedená) s invar. bodem a incidentní přímkou; k tomu duální ${}^1\gamma_{3(4)}$ s dvěma invar. přímkami. Neexistují subgrupy toho druhu při ${}^1g'_4$, ${}^1g_6$, ${}^1\gamma_6$ a ${}^1g_8$.

Základní grupa ${}^2g_2$ kollineací K^2 obsahuje rovněž ∞^1 subgrup ${}^2\mathfrak{g}_{1(2)}$. Každá kollineace totiž s invariantními dvěma body O_1, O_2 a dvěma přímkami p_1, $p_2 \equiv O_1O_2$ je charakterisována dvojpoměrem k a konstantou a, o nichž platí kombinační vzorce $k'' = k \,.\, k'$, $a'' = a + a'$; mění-li se k i a, vzniká ∞^2 kollineací grupy ${}^2g_2$. Supponujme mezi nimi vztah $k = m^a$. Při konstantním m a proměnlivém a jest k funkcí argumentu a, jenž zůstává jediným parametrem; dvě kollineace, charakterisované hodnotami a, $k = m^a$, resp. a', $k' = m^{a'}$ mají produktem kollineaci, jejíž

$$a'' = a + a', \; k'' = k \,.\, k' = m^a \,.\, m^{a'} = m^{a+a'} = m^{a''}.$$

Tvoří tedy kollineace takové grupu jednoparametrovou ${}^2g_{1(2)}$. Při ∞^1 kollineacích K^2 grupy ${}^2g_{1(2)}$ jest opět ∞^1 křivek invariantních, každá vytvořena ∞^1 polohami, jichž některý bod její při transformacích grupy nabývá.

Ze širších grup kollineací K^2 vznikají takto užší grupy tehdy, zajištěny-li grupami jednorozměrných transformací na společné části invariantních útvarů uvedené vzorce kombinační $a'' = a + a'$, $k'' = k \,.\, k' = m^{a+a'}$. Tak lze prokázati existenci grup ${}^2\mathfrak{g}_{2(3)}$ s invar. dvěma body O_1O_2, ${}^2\mathfrak{g}_{3(4)}$ s invar. bodem O_1, středem svazku s transformacemi [(00)], a přímkou p_2; a duálních ${}^2\gamma_{2(3)}$ s invar. přímkami p_1p_2, konečně ${}^2\gamma_{3(4)}$ s invar. O_2p_1.

Při ∞^3 kollineací K^3 základní grupy ${}^3g_3$ jest v celku invariantní soustava ∞^3 kuželoseček se společnou tečnou p_1 v bodě O_2; tato soustava obsahuje ∞^1 systémů kuželoseček po ∞^2 členech, každý takový systém je tedy v celku invariantní při ∞^2 transformacích, jež tvoří subgrupu ${}^3\mathfrak{g}_{2(3)}$; kuželosečky tohoto systému mají dotyk 2. stupně. Konečně existuje ${}^3\mathfrak{g}_{1(3)}$, při níž jest invariantních ∞^1 kuželoseček speciálního svazku s dotykem 3. stupně v O_2.

12. Ze soustav ∞^1 křivek, invariantních při ${}^1g_{1(2)}$, jsou zvlášť pozoruhodné *kuželosečky*; podmínkou, aby křivky byly kuželosečkami, jest, by na dvou stranách (ve dvou vrcholech) invar. trojúhelníka byl dvojpoměr transformace týž.

Jestliže totiž platí $r = -1$, máme na stranách O_1O_3 a O_2O_3 transformace dvojpoměru k_1, resp. k_1^{-1} (na O_3O_2 dvojp. k_1); přiřadíme-li potom bodu O_3 bod O_1, resp. O_2 a dále ještě jednomu bodu L na O_1O_3 libovolný L' na O_2O_3, je tím stanovena projektivnost řad bodových na obou přímkách, v níž si korrespondují body, jež vznikají transformací bodů L, resp. L'. Spojnice korrespondujících bodů obalují kuželosečku, jež se dotýká přímek těch v bodech O_1 a O_2. Poněvadž bod L' lze zvoliti ∞^1 způsoby, máme řadu ∞^1 kuželoseček uvedené vlastnosti. Duálně svazky paprskové v O_1 a O_2 jsou projektivně sobě přiřazeny volbou jedné dvojice koresp. paprsků a vytvořují svazek kuželoseček, totožný s řadou právě nalezenou.

Tečna každé křivky svazku (řady) protíná společnou tětivu jich a společné obě tečny tak, že platí

$$(AO'_3O'_1O'_2) = -1;$$

speciální tento svazek kuželoseček má dva dvojné body základní, v nichž se kuželosečky svazku navzájem dotýkají, jich spojnice představuje jako dvojnásobná přímka degenerovanou kuželosečku svazku (dvě), třetí degenerovaná je dvojice společných tečen. Avšak každá tečna u kuželosečky svazku protíná křivky svazku toho v dvojinách involuce, jejímiž samodružnými body jsou obecně dva dotyčné body, zde jednak bod dotyčný, druhým patrně průsečík s dvojnou přímkou, spojnicí obou základních bodů svazku. Samodružnými body involuce jsou tedy body A, O'_3, kuželosečka (O_3O_1, O_3O_2) je pak protata v bodech O'_2, O'_1; a poněvadž každá dvojice involuční tvoří se samodružnými body dvojpoměr hodnoty -1, musí býti $(AO'_3O'_1O'_2) = -1$, jak vskutku jest.

V případě $r = +1$ kuželosečky degenerují, transformace redukuje se na homologii středu O_3 osy O_1O_2.

Také pro $r = 2$ a pro $r = \frac{1}{2}$ obdržíme svazky kuželoseček uvedeného druhu. Pro $(AO'_3O'_1O'_2) = 2$ máme

$$(AO'_1O'_3O'_2) = 1 - 2 = -1,$$

jest tedy O_2O_3 společnou tětivou kuželoseček svazku, základními body O_3, O_2. Při $(AO'_3O'_1O'_2) = \frac{1}{2}$ jest $(AO'_3O'_2O'_1) = 2$ a $(AO'_2O'_3O'_1) = -1$, i jest O_1O_3 společnou tětivou svazku. Podél společné tětivy má transformace ve všech třech případech ($r = -1, 2, \frac{1}{2}$) dvojpoměr, jenž je čtvercem dvojpoměru platného pro projektivní transformace podél tečen.

Kuželosečka má mezi všemi křivkami, invariantními při jednoparametrové grupě, tu zvláštnost, že připouští více než ∞^1, totiž ∞^3 kollineací (mimo přímku, která dovoluje, jak uvedeno, ∞^6 kollineací grupy ${}^1g_6$). Kollineace tyto tvoří grupu ${}^1\mathfrak{g}_3^k$; je-li totiž předně při dvou kollineacích kuželosečka invariantní, jest invariantní i při jejich produktu, poněvadž pak možno každý ze dvou vrcholů invar. trojúhelníka voliti na kuželosečce ∞^1 způsoby (třetí je dán jako průsečík invar. tečen v oněch dvou ke kuželosečce) a ke každému trojúhelníku patří ∞^1 transformací grupy ${}^1g_{1(2)}$ ($r = -1, 2, \frac{1}{2}$), existuje ∞^3 kollineací kuželosečky.

Grupa ${}^1g_3^k$ s invariantní kuželosečkou má dvě subgrupy, známou už ${}^1g_{1(2)}$ pro $r = -1, 2, \frac{1}{2}$ (možno ji zde označiti ${}^1\mathfrak{g}_1^k$), při níž existuje celý svazek ∞^1 invar. kuželoseček, a dvouparametrovou ${}^1\mathfrak{g}_2^k$ s invariantní kuželosečkou a invar. bodem na ní (a tedy i tečnou k ní v bodě tom).

Mimo hořejší grupy ${}^1g_3^k$ a ${}^1g_2^k$, sestrojené z grup jednoparametrových ${}^1g_{1(2)}$ při $r = -1$, lze ovšem z takových grup složiti užší grupy ${}^1g_{2(3)}$, ${}^1g_{3(4)}$, ${}^1\gamma_{3(4)}$, ${}^1g_{4(5)}$, uvedené při obecném r. Vznikají však ještě grupy ${}^1\mathfrak{g}''_3$ ($r = -1$), ${}^1\mathfrak{g}'_{3(4)}$ ($r = -1$), ${}^1\mathfrak{g}_{5(6)}$ ($r = -1$), ${}^1\gamma_{5(6)}$ ($r = -1$). Při první z nich je v celku invariantní speciální svazek ∞^1 kuželoseček se společnou tečnou v bodě, v němž mají spolu dotyk 3. stupně; při každé ${}^1g_2^k$, obsažené v grupě je invariantní jedna z těchto kuželoseček. Ostatní tři jsou složeny z ${}^1g_{1(2)}$ $(r = -1)$, neexistujíce při obecné hodnotě konstanty r.

B) Základní grupy kollineací v S_3.

13. Všech ∞^{15} kollineací v prostoru S_3 tvoří kontinuitní grupu G_{15}; neboť produkt dvou kollineací jest opět kollineace, jak plyne z definice této nejjednodušší transformace. Všechny grupy v dalším uvedené jsou subgrupami této.

Obecné homologie (K^{12}) téhož středu O a téže roviny základní ϱ tvoří grupu: neboť produkt dvou takových transformací, charakterisovaných dvojpoměrem k', resp. k'', jest opět homologie obecná s týmž invariantním útvarem, jejíž dvojpoměr jest $k = k' \,.\, k''$. Bod A a jeho transformované B, C leží totiž na témž paprsku, jdoucím středem homologie (a bodem R základní roviny); zde platí $(ORAB) = k'$, $(ORBC) = k''$, pročež $(ORAC) = k' \,.\, k''$. Tato grupa jest, jak patrno, kontinuitní a jednoparametrová s prom. parametrem k; označíme ji ${}^{12}\mathsf{G}_1$. Na každé rovině jdoucí středem homologie O a v každém prost. svazku se středem na ϱ existuje podřazená grupa dvourozměrných homologií ${}^4g_1$.

Kollineace dvojosé K^{10} : [11] s týmiž osami tvoří rovněž kontinuitní jednoparametrovou grupu ${}^{10}\mathsf{G}_1$; body A, B, C leží totiž vždy na paprsku, jenž protíná obě osy a proj. transformace v těchto S_1 skládají při invariantních dvou bodech jednopar. grupu jednorozměrných transformací s prom. parametrem k. Při kollineacích grupy ${}^{10}G_1$ jsou, jak patrno, invariantní všechny paprsky, protínající obě společné osy těchto kollineací; paprsky ty tvoří kongruenci 1. stupně 1. třídy, jejíž řídícími přímkami jsou osy kollineací.

Produkt dvou osových kollineací K^6 s týmiž základními prostory, přímkou a dvěma body, jež jsou určeny konstantami k'_1 a k'_2, resp. k''_1 a k''_2, jest osová kollinace s týmž útvarem invariantním, jejíž konstantní dvojpoměry jsou $k_1 = k'_1 \,.\, k''_1$ a $k_2 = k'_2 \,.\, k''_2$. Body A, B, C leží v téže rovině, jdoucí oběma body pevnými; v této existuje grupa ${}^1g_2$ kollineací rovinných s prom. parametry k_1 a k_2. Grupa kollineací prostorových K^6 je dvouparametrová ${}^6\mathbf{G}_2$ a indukuje v každém S_2 (rovinném poli, resp. svazku prost.), v celku invariantním, uvedenou ${}^1g_2$.

Konečně obecné kollineace typu K^1 s týmž invariantním čtyrstěnem tvoří grupu tříparametrovou ${}^1\mathbf{G}_3$ s parametry k_1, k_2, k_3. Jedna kollineace jest, dejme tomu, charakterisována konstantami k'_1, k'_2, k'_3, druhá dvojpoměry k''_1, k''_2, k''_3; poněvadž každá je produktem tří homologií, je produkt obou vlastně výslednicí šesti homologií, na jichž pořádku nezáleží; odtud plyne pro výsledné konstanty totéž kombinační pravidlo jako při homologii, char. dvojpoměry výslednice jsou tedy $k_l = k'_l \,.\, k''_l$ při $l = 1, 2, 3$. Existence grupy ${}^1G_3$ plyne také odtud, že na stěnách a ve vrcholech invar. čtyrstěnu existují grupy ${}^1g_2$.

Při kollineacích grupy ${}^1G_3$ jest mimo 6 speciálních komplexů lineárních, jichž osami jsou hrany invariántního čtyrstěnu, invariantních ∞^1 kvadratických komplexů t. zv. tetraedrálních (čili Reyeových); libovolná přímka v prostoru protíná totiž stěny čtyrstěnu ve 4 bodech, jichž dvojpoměr d, rovný dvojpoměru čtyř rovin, které spojují přímku onu s vrcholy čtyrstěnu, jest týž na ∞^3 přímkách, ježto soustavě ∞^4 přímek v prostoru klade se tím jedna podmínka. Kollineace grupy ${}^1G_3$ transformují přímky komplexu navzájem, protože kollineacemi převádí se přímka se čtveřinou bodů určitého dvojpoměru zase v přímky se čtveřinami téhož dvojpoměru. Poněvadž konstanta d může míti ∞^1 hodnot, existuje při ${}^1G_3$ ∞^1 invariantních komplexů tetraedrálních. Každý takový komplex (určitého d) je vytvořen spojnicemi korrespondujících bodů při ∞^2 kollineacích této grupy, při těch, jichž konstanty k_1, k_2, k_3 vyhovují vztahu (dříve nalezenému)

$$d = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - 1}{k_2 - 1}.$$

14. Homologie limitní K^{13} s touže rovinou ϱ a incidentním bodem O invariantními vytvořují grupu ${}^{13}\mathbf{G}_1$; konstanta a produktu dvou homologií takových (s konstantami a_1, a_2) jest

součtem konstant složek $a = a_1 + a_2$, neboť ze vztahů

$$\frac{1}{OB} = \frac{1}{OA} + a_1, \quad \frac{1}{OC} = \frac{1}{OB} + a_2$$

plyne

$$\frac{1}{OC} = \frac{1}{OA} + (a_1 + a_2).$$

Jak patrno, existuje na každém paprsku bodem O jednoparametrová grupa limitních transformací [(OO)], na každé rovině bodem O (a v každém prost. svazku se středem na ϱ) grupa ${}^5g_1$.

Kollineace typu K^{11} s jedinou přímkou r ve všech bodech invariantní tvoří základní grupu čtyřparametrovou ${}^{11}\mathbf{G}_4$; v každé rovině jdoucí přímkou r jest dvouparametrová grupa ${}^5g_2$ elací se základní přímkou r, v každém pak prost. svazku se středem na r jest také dvouparam. taková grupa, nezávislá na předešlé. Jest zde tedy ∞^4 kollineací následkem 4 proměnlivých parametrů.

Kollineace K^7 s týmž útvarem invariantním skládají grupu ${}^7\mathbf{G}_2$. Body A, B, C leží totiž v téže rovině, jež prochází přímkou s; na každé takové rovině (a v každém svazku středu na r) existuje grupa ${}^2g_2$.

Kollineace K^8 téhož útvaru invariantního tvoří rovněž dvouparam. ${}^8\mathbf{G}_2$, neboť na každé rovině, jdoucí přímkou s a v každém bodě na r vytvořuje se transformacemi uvažovanými grupa ${}^2g_2$.

Jinak jest u kollineací typu K^9. Zde tvoří kollineace téže přímky r ve všech bodech invariantní, téže invariantní přímky s (jich průsečíku a roviny) grupu tříparametrovou ${}^9\mathbf{G}_3$. Na každé rovině jdoucí skrze s indukuje tato grupa grupu ${}^3g_3$ kollineací rovinných typu [(OOO)], duálně v každém svazku prost., jehož střed leží na r.

Kollineace K^2 tvoří základní grupu ${}^2\mathbf{G}_3$; její parametry skládají se dle vzorců $k_1 = k'_1 \,.\, k''_1$, $k_2 = k'_2 \,.\, k''_2$, $a = a' + a''$. Neboť na rovinách pevných a v pevných bodech vznikají při kollineacích K^2 téhož invar. útvaru dvouparametrové grupy kollineací dvourozměrných buď ${}^1g_2$ nebo ${}^2g_2$.

Kollineace K^3 vytvořují grupu ${}^3\mathbf{G}_3$, jejíž všechny transformace mají týž útvar invariantní; o konstantách výsledné kollineace (k, a, b) jako produktu dvou kollineací tohoto typu platí $k = k' . k''$, $a = a' + a''$, $b = b' + b''$. Na invar. rovinách a v invar. bodech existují totiž grupy ${}^2g_2$ s parametry jednak k, a, jednak k, b.

Kollineace K^4 s týmiž invariantními dvěma body O_1, O_2, dvěma rovinami ϱ_1, ϱ_3 a dvěma přímkami O_1O_2 a (ϱ_1, ϱ_3) jsou v počtu ∞^4 členy grupy ${}^4\mathbf{G}_4$. Ke kollineaci typu K^9 stačí totiž připojiti obecnou homologii (O_1, ϱ_1, k), bychom dostali kollineaci K^4; z každé transformace grupy ${}^9G_3$ dostaneme tím ∞^1 kollineací K^4, jež všechny tvoří tedy grupu čtyřparametrovou. Na invar. rovině ϱ_1 (a v O_1) existuje ${}^3g_3$ s třemi parametry, na O_1O_2 jednoparametrová grupa proj. transformací [00], jejíž parametr je nezávislý na oněch a tedy čtvrtým parametrem grupy uvažované; na ϱ_3 a v O_2 indukuje ${}^4G_4$ grupu ${}^2g_2$.

Kollineace K^5 s invariantními týmiž elementy, totiž bodem, přímkou a rovinou incidentními, tvoří šestiparametrovou grupu ${}^5\mathbf{G}_6$. Počet ∞^6 kollineací plyne z konstrukce bodu korrespondujícího danému. Při ${}^5G_6$ existuje na pevném poli rovinném grupa ${}^3g_3$ ∞^3 kollineací dvourozměrných typu [(000)] s invar. přímkou a incidentním bodem, v prostorovém svazku pak se středem v invar. bodě také grupa ${}^3g_3$ kollineací dvourozměrných téhož typu s invar. rovinou a incidentní přímkou; obě grupy jsou na sobě nezávislé, jich parametry představují 6 parametrů grupy prostorové ${}^5G_6$.

Všechny grupy základní jsou soběduální, ježto jich invariantní útvary jsou ve svém celku k sobě samým duální.

C) Širší grupy kollineací v S_3.

15. Dvě homologie K^{12} s touže rovinou ϱ bodů invariantních, ale s různými středy mají za produkt zase kollineaci typu K^{12}, jejíž rovina invariantní je ovšem táž jako u složek, jejíž střed leží na spojnici středů složek a jejíž charakteristický dvojpoměr je součinem dvojpoměrů složek. Neboť platí-li $(O'R'AB) = k'$, $(O''R''BC) = k''$, kde R' a R'' jsou průsečíky spojnic $O'A$, resp. $O''B$ s ϱ, leží všechny tyto body v téže rovině; jestliže pak $M \equiv (O'O'', \varrho)$ a promítneme-li z bodu M

čtveřinu $O''R''BC$ na přímku $O'B$, platí na této $(O'R'BC') = k''$ (C' průmět bodu C), vedle toho však platí zde $(O'R'AB) = k'$, tedy $(O'R'AC') = k'k''$. Poslední čtveřina, promítnuta na přímku AC z bodu M, dává čtveřinu $ORAC$, kde O je průsečík spojnice AC se spojnicí $O'O''$, R průsečík oné spojnice s rovinou ϱ; a platí zde $(ORAC) = k' . k''$. Následkem toho tvoří homologie K^{12} téže invar. roviny, jichž středy leží v přímce, grupu homologií ${}^{12}\mathbf{G}_2$; nabývá totiž dvojpoměr ∞^1 hodnot a střed homologie ∞^1 poloh na pevné přímce, ${}^{12}\mathbf{G}_2$ obsahuje ∞^1 grup ${}^{12}G_1$.

Tři homologie K^{12} s touže rovinou samodružných bodů, ale s různými středy, dávají, postupně applikovány, opět homologii téže invar. roviny, jejíž střed leží v rovině stanovené středy složek a jejíž dvojpoměr $k = k' . k'' . k'''$. Stačí k důkazu použíti dvakrát hořejšího rozboru, neboť produkt dvou prvých homologií a třetí homologie je zase dvojice homologií těch vlastností jako první dvě. I vytvořují homologie téže invar. roviny, jichž středy leží v pevné rovině, grupu homologií ${}^{12}\mathbf{G}_3$ (tříparametrovou v souhlase s počtem ∞^1 hodnot dvojpoměru a ∞^2 poloh středu).

Konečně čtyři homologie s touže rovinou invariantní, ale se středy v prostoru nezávisle položenými (ne v téže rovině) určují grupu homologií ${}^{12}\mathbf{G}_4$; neboť produkt takových čtyř homologií je zase homologie téže invar. roviny, jejíž dvojpoměr je součinem dvojpoměrů složek.

Ke grupám homologií ${}^{12}G_2$, ${}^{12}G_3$, ${}^{12}G_4$ přiřadíme tři grupy duální ${}^{12}\Gamma_2$, ${}^{12}\Gamma_3$, ${}^{12}\Gamma_4$, určené resp. 2, 3, 4 homologiemi téhož středu, jichž roviny bodů jednotlivě invariantních tvoří resp. svazek rovin jednorozměrný (s osou), svazek rovin prostorový (dvourozměrný, se středem) a systém rovin trojrozměrný. Grupy ${}^{12}\Gamma_2$, ${}^{12}\Gamma_3$, ${}^{12}\Gamma_4$ indukují na každé rovině obecně společným středem položené grupy ${}^4\gamma_2$ a ${}^4\gamma_3$ (prvá na jedné rovině ${}^4g_1$, druhá na ∞^1 rovinách ${}^4\gamma_2$); podobně grupy ${}^{12}G_2$, ${}^{12}G_3$, ${}^{12}G_4$ ve svazcích se středem na společné rovině osové; při ${}^{12}\Gamma_2$ ve svazcích se středem na ose invar. rovin, při ${}^{12}G_2$ na rovinách jdoucích osou středů jednotlivých homologií existuje ${}^4g_2$ a pod.

16. Bylo uvedeno, že kollineace K^{10} s týmiž mimoběžnými osami tvoří základní ${}^{10}G_1$. Při tom každá K^{10} vzniká ze

dvou homologií $H_1(O_1, \varrho_1)$, $H_2(O_2, \varrho_2)$ [místo K^{12} pišme pohodlněji H]; každá K^{10} může vzniknouti ∞^2 způsoby jako produkt dvou homologií takových. Obě homologie kollineaci K^{10} vytvořující jsou kommutativní.

Složme dvě K^{10}, jichž invar. přímky jsou r, s, resp. r', s'; a budiž $r' \equiv r$, s' ať protíná s. První kollineace jest produkt $H_1 . H_2$, druhá $H'_1 . H'_2$; produkt obou kollineací

$$H_1 . H_2 . H'_1 . H'_2$$

jest opět kollineace K^{10}, jež má touž jednu invar. přímku jako obě složky, jejíž druhá invar. přímka patří do rovinného svazku přímek určeného paprsky s a s'. Neboť můžeme střed a rovinu homologie H'_1 voliti v O_1 resp. ϱ_1, rovinu ϱ'_2 homologie H'_2 v ϱ_2, avšak střed O'_2 v rovině ϱ_1 mimo bod O_2, lze pak uvedený produkt upraviti na tvar

$$H_1 . H_2 . H'_2 . H'_1 \text{ a dále } H_1 H'_1 . H_2 H'_2.$$

Produkt $H_1 H'_1$ je homologie středu O_1 a roviny ϱ_1, produkt $H_2 H'_2$ homologie roviny ϱ_2 středu ležícího na spojnici $O_2 O'_2$; produkt obou je kollineace K^{10} uvedených vlastností. I tvoří kollineace K^{10} s jednou inv. přímkou pevnou r, jichž druhé inv. přímky s tvoří svazek paprskový, grupu $^{10}\mathbf{G}_2$.

Tři kollineace typu K^{10}, jichž první (třebas) složky mají týž střed a rovinu invariantní, druhé složky mají touž rovinu sice, ale středy v rovině prvních homologií různě položené, svědčí o existenci grupy $^{10}\mathbf{G}_3$ s jednou inv. přímkou pevnou (r), kde druhé inv. přímky (s, s', s'', . .) jednotlivých kollineací skládají prostorový svazek ∞^2 paprsků.

Docela podobně vzniká jiná tříparametrová grupa $^{10}\mathbf{G}'_3$; její kollineace mají všechny jednu inv. přímku pevnou (r), druhé pak přímky s, s', . . . tvoří systém ∞^2 přímek, jež protínají dvě mimoběžky. Tvoří-li speciálně přímky s pole rovinné, máme grupu $^{10}\Gamma_3$, duální ku $^{10}G_3$.

Tímto způsobem přesvědčíme se také o existenci grupy $^{10}\mathbf{G}_4$, jejíž kollineace mají r jako společnou přímku invariantní, přímky druhé s tvoří pak systém ∞^3 paprsků spojujících ∞^1 bodů přímky obsažené v ϱ_1 s ∞^2 bodů roviny ϱ_2.

Konečně existuje grupa $^{10}\mathbf{G}_5$ kollineací dvojosých s jednou osou společnou, jichž druhé osy tvoří soustavu všech ∞^4 přímek v prostoru; určena je třemi K^{10}, jichž prvé složky mají středy v ϱ_2, druhé složky své středy v ϱ_1.

Grupy ${}^{10}G_2$, ${}^{10}G'_3$, ${}^{10}G_4$, ${}^{10}G_5$ jsou soběduální. Podřazené grupy v rovinách jdoucích přímkou r, invariantních při všech nalezených širších grupách typu 10., jakož i grupy v prost. svazcích se středy na r, jsou zase obecně buď ${}^4g_2$ nebo ${}^4g_3$.

Grupy uvedené můžeme nalézti také vyjdouce od těchto podřazených grup kollineací dvourozměrných; vedle toho nalezneme tak ještě jednu tříparametrovou grupu ${}^{10}\mathbf{G}''_3$. Osy r kollineací grupy ${}^{10}G''_3$ tvoří rovinný svazek paprsků, rovněž osy s; v každé z obou inv. rovin těchto svazků, rovněž v obou středech jejich existuje ${}^4g_2$. Grupa tato je soběduální.

17. Kollineace K^6 skládají vedle základní grupy ${}^6G_2$ řadu širších grup, jichž kollineace mají jenom část invariantního útvaru společnou. Grupy ty jsou vytvořeny základními grupami ${}^6G_2$; některé z nich nalezneme způsobem, jímž odvozena většina širších grup typu 10.

Všechny kollineace K^6, jež mají touž přímku r invariantních bodů, tvoří grupy ${}^6\mathbf{G}_3$, ${}^6\mathbf{G}_4$, ${}^6\mathbf{G}'_4$, ${}^6\mathbf{G}''_4$, ${}^6\mathbf{G}_5$, ${}^6\mathbf{G}_6$. Jestliže totiž K^6 je produkt dvou homologií H_1H_2, druhá K^6 pak produkt $H'_1H'_2$ (při tom ovšem O_2 a ϱ_1, O_1 a ϱ_2, O'_2 a ϱ'_1, O'_1 a ϱ'_2 incidentní), můžeme nejprve voliti $O'_1 \equiv O_1$, $\varrho'_1 \equiv \varrho_1$, $\varrho'_2 \equiv \varrho_2$, O'_2 mimo O_2 na rovině ϱ_1; i jest

$$K^6 \,.\, K'^6 = H_1H_2 \,.\, H'_1H'_2 = H_1H'_1 \,.\, H_2H'_2,$$

avšak $H_1H'_1$ jest homologie středu O_1 roviny ϱ_1, $H_2H'_2$ zase homologie roviny ϱ_2 středu ležícího na $O_2O'_2$ v ϱ_1. Vznikající kollineace má touž r jako K^6 i K'^6, její s jest paprskem rovinného svazku paprsků, určeného přímkami s obou složek. Kollineace grupy ${}^6G_3$ mají tudíž tutéž invar. r, jejich s tvoří rovinný svazek, jehož střed je jedním invar. bodem všech přímek s, druhé invar. jejich body leží v přímce, jež protíná r. Na ϱ_2 existuje podřazená ${}^4g_1$, na ϱ_1 grupa ${}^4g_2$, na rovině svazku přímek s grupa ${}^1g_3$.

Podobně kollineace grupy ${}^6G_4$ mají pevnou r, jejich s tvoří pak prost. svazek paprsků; střed svazku toho je jedním invar. bodem všech s, druhé inv. body jejich leží v rovině procházející přímkou r. Grupa ta stanovena je třemi kollineacemi, jichž prvé složky — homologie mají týž střed a rovinu, druhé složky mají sice touž rovinu, ale středy leží nezávisle v společné rovině prvních složek. Na ϱ_2 jest opět podřazená ${}^4g_1$, na ϱ_1 však ${}^4g_3$.

Grupa ${}^6G'_4$ obsahuje kollineace s pevnou r, jichž s tvoří soustavu ∞^2 paprsků, protínajících dvě mimoběžky, které obě protínají přímku r; obě mimoběžky jsou geom. místem invariantních bodů přímek s. Na ϱ_1 i ϱ_2 existují ${}^4g_2$. Jestliže speciálně zmíněná soustava ∞^2 přímek s je systémem všech přímek v rovině, máme ${}^6G''_4$, invariantní body O_1 a O_2 leží na dvou přímkách, obsažených v ϱ_1, resp. ϱ_2 a protínajících se na r, Při této grupě jsou na ϱ_1 i ϱ_2 rovněž ${}^4g_2$, na rovině přímek s grupa ${}^1\gamma_4$.

Kollineace v ${}^6G_5$ mají pevnou r, přímky s tvoří systém ∞^3 paprsků, spojujících body přímky, která protíná r, a body roviny procházející skrze r. Dotčené body přímky i roviny jsou invar. body přímek s; na jedné z rovin ϱ_1 a ϱ_2 existuje ${}^4g_2$ na druhé ${}^4g_3$.

Konečně kollineace v ${}^6G_6$ mají zase pevnou r, přímky s však leží v počtu ∞^4 v prostoru, jejich invar. body vyplňují dvě roviny jdoucí pevnou přímkou r, na obou (ϱ_1 i ϱ_2) indukuje tato grupa podřazené ${}^4g_3$.

Jako jsme při tvoření předešlých grup volili pouze dvě roviny invariantních bodů ϱ_1, ϱ_2, jednu jako společnou inv. rovinu prvních homologií-složek, druhou pro druhé složky jednotlivých K^6 (následkem čehož existovala pevná r a invar. body přímek s ležely v přímkách nebo rovinách jdoucích skrze r); tak můžeme duálně voliti pevnou přímku v celku invariantní s s dvěma body samodružnými O_1, O_2, společnými všem grupám ${}^6G_2$, z nichž tvoříme širší grupy, tedy i všem kollineacím K^6 širších grup. Roviny prvních homologií, po případě zároveň roviny druhých homologií mohou tvořiti svazek ∞^1 nebo ∞^2 rovin, jehož osa je incidentní nebo střed totožný s invar. bodem na s. Tak obdržíme šest grup ${}^6\Gamma_3$, ${}^6\Gamma_4$, ${}^6\Gamma'_4$, ${}^6\Gamma''_4$, ${}^6\Gamma_5$, ${}^6\Gamma_6$, duálních k uvedeným, u nichž přímky r jednotlivých kollineací grupy tvoří systém ∞^1 až ∞^4 paprsků (obdobně jako prve přímky s).

V každé rovině $\varkappa$, vedené přímkou s, existuje při K^6 kollineace typu [000] s invariantními body O_1, O_2 a R (kde R je průsečík roviny $\varkappa$ s přímkou r); grupa ${}^6G_2$ indukuje na každé takové rovině grupu ${}^1g_2$. Na $\varkappa$ však může existovati při pevné přímce s a bodu R také ${}^1g_3$ a ${}^1g'_4$; ona má invariantní bod R, přímku s a na ní bod třebas O_1, tato jenom R a s v celku. Odtud plyne existence dvou nových grup v prostoru ${}^6\mathbf{G}'_3$ a ${}^6\mathbf{G}'''_4$; všechny kollineace těchto grup mají touž přímku invar. bodů r a touž přímku s v celku invariantní, u první grupy ještě invar. bod na s (a ovšem invar. rovinu jím procházející). Grupy ${}^6G'_3$ a ${}^6G'''_4$ jsou soběduální.

Tím však nejsou vyčerpány širší grupy typu 6. Uvedené grupy a četné nové nalezneme, vyšetříme-li všechny možné případy, kdy na jedné z obou invariantních rovin ϱ_1 (nebo ϱ_2) obsahujících grupu homologií ${}^4g_1$ existuje buď tato nebo širší ${}^4g_2$, resp. ${}^4\gamma_2$ nebo ${}^4g_3$, resp ${}^4\gamma_3$; bod O_1 (nebo O_2) může při jednotlivých ${}^6G_2$ zaujímati buď touž polohu nebo ∞^1, ∞^2, ∞^3 poloh v prostoru. Duální úvaha, při které vycházíme od grup homologií dvourozměrných ve svazku O_1 (nebo O_2) a rovině ϱ_1 (nebo ϱ_2) dáváme týž počet poloh jako prve bodu O_1, vede pouze k některým grupám duálním (novým), jichž existence ostatně prokázána existencí grup, ke kterým je jako duální přiřaďujeme. Konečně nutno vyšetřiti supposici, že grupám ${}^6G_2$ společny jsou buď obě invar. přímky r i s nebo aspoň jedna, v řadě bodové na s nebo ve svazku rovin osy r že pak existují grupy proj. transformací o 1, 2, 3 parametrech. Nabudeme zde mimo grupy jinak odvozené pouze jedné nové a její duální.

Na př. supponujeme-li na ϱ_1 grupu homologií ${}^4g_1$, jsou pro invariantní bod O_1 jednotlivých ${}^6G_2$ přípustny buď jediná poloha nebo ∞^1 poloh na přímce s nebo ∞^1 poloh na přímce protínající osu r nebo ∞^2 poloh v rovině incidentní s r nebo ∞^2 poloh v rovině protínající r nebo konečně ∞^3 poloh v prostoru. Těmto případům odpovídají pořadem grupy už uvedené ${}^6G_2$, ${}^6G'_3$, ${}^6G_3$, ${}^6G_4$ a nové: ${}^6\mathbf{G}_4^{\mathrm{IV}}$, s invariantní rovinou ϱ_1 obsahující přímku invar. bodů r, bod mimo ni O_2 a grupu ${}^4g_1$, a druhou invar. rovinou δ, jdoucí bodem O_2 a obsahující mimo něj jako druhý inv. bod svůj průsečík s přímkou r a grupu ${}^1g_4$; potom ${}^6\mathbf{G}'_5$ s inv. rovinou ϱ_1 (na ní r, O_2) obsahující ${}^4g_1$.

Takto postupujíce nalezneme mimo dříve konstruované grupy a mimo dvě právě příkladem uvedené (${}^6G_4^{IV}$, ${}^6G'_5$) tyto grupy: ${}^6\mathbf{G}_4^{V}$ s invar. ϱ_1, na ní O_2 a jiný bod D jako střed rovinného svazku přímek r (na ϱ_1 grupa ${}^4\gamma_2$), a přímkou skrze D (v rovině touto přímkou a bodem O_2 určené jest ${}^1g_3$). ${}^6\mathbf{G}''_5$ s invariantní ϱ_1, na ní r a druhá přímka t v celku invar. (grupa ${}^4g_2$) a druhou invar. rovinou $\varkappa$ procházející přímkou t (na ní ${}^1g_5$). ${}^6\mathbf{G}'''_5$ s invar. ϱ_1, na ní bod O_2 a jiný bod D jako střed svazku ∞^1 přímek r (grupa ${}^4\gamma_2$) a druhou rovinou invar. skrze O_2D (na této ${}^1g_4$). ${}^6\mathbf{G}'_6$ s invariantní ϱ_1, na ní r a druhá přímka t (grupa ${}^4g_2$). ${}^6\mathbf{G}''_6$ s invar. ϱ_1, na ní O_2 a jiný bod D, střed svazku ∞^1 přímek r (grupa ${}^4\gamma_2$). ${}^6\mathbf{G}_7$ s invar. ϱ_1, na ní r (grupa ${}^4g_3$). ${}^6\mathbf{G}'_7$ s invar. ϱ_1, na ní bod O_2 (grupa ${}^4\gamma_3$). ${}^6\mathbf{G}_8$ s invariantní přímkou r, společnou všem grupám ${}^6G_2$ (v počtu ∞^6).

Z grup těch jsou ${}^6G_4^{V}$, ${}^6G'''_5$, ${}^6G'_7$ soběduální, k ostatním existují duální grupy, totiž ${}^6\Gamma_4^{IV}$, ${}^6\Gamma'_5$, ${}^6\Gamma''_5$, ${}^6\Gamma'_6$, ${}^6\Gamma''_6$, ${}^6\Gamma_7$, ${}^6\Gamma_8$, jichž invariantní útvary netřeba uváděti.

18. Zvlášť pohodlné jest stanovení širších grup u kollineací nejobecnějšího typu K_1. Dvě kollineace typu tohoto, jež nemění nějakou část invariantního čtyrstěnu, mají za produkt kollineaci, jež jest předně zase typu K^1 a za druhé má touž část čtyrstěnu invariantní. Stačí tedy zvoliti část čtyrstěnu za samodružnou při všech kollineacích; tím zařaďujeme takové kollineace do grupy, a počtem možných voleb zbývající části čtyrstěnu spolu s počtem konstant (3) ustanovíme počet kollineací v grupě. Grupy ty jsou vesměs složeny ze základních grup ${}^1G_3$.

Abychom soustavně nalezli všechny grupy takové, zvolíme za základ invariantní rovinu (duálně bod), na ní připustíme postupně všechny známé grupy kollineací dvourozměrných typu [000] a vyšetřujeme pokaždé, které polohy může zaujati neincidentní (čtvrtý) vrchol (duálně rovina) čtyrstěnu. Zbude pak vzíti v úvahu dvě mimoběžky, konečně jednu přímku invariantní, na nichž zvolíme všechny grupy proj. transformací typu [00].

Existuje-li na invar. rovině ${}^1g_8$, může neincidentní vrchol čtyrstěnu zaujati buď ∞^3 poloh v prostoru nebo míti touž polohu při všech kollineacích, odtud plyne existence grup ${}^1\mathbf{G}_{12}$ a ${}^1\mathbf{G}_9$ s invar. rovinou třebas ϱ_1, resp. ϱ_1 a O_1. Připustíme-li na

ϱ_1 grupu ${}^1g_6$ (O_2), t. j. s invariantním bodem O_2, může O_1 míti buď 1 nebo ∞^1 nebo ∞^3 poloh; existují tedy grupy ${}^1\mathbf{G}_7$ $(\varrho_1 O_2 O_1)$, ${}^1\mathbf{G}_8$ $(\varrho_1 O_2 p_{21})$, ${}^1\mathbf{G}_{10}$ $(\varrho_1 O_2)$. Při třetí na př. jest invar. rovina ϱ_1 a na ní bod O_2, ježto pak z vrcholů O_3, O_4 lze voliti každý ∞^2 způsoby, O_1 ∞^3 způsoby, jest zde $\infty^{2+2+3} = \infty^7$ čtyrstěnů, tedy i ∞^7 grup ${}^1G_3$, proto uvedený počet parametrů grupy ${}^1G_{10}$; nebo můžeme počet 6 parametrů grupy ${}^1g_6$ rozšířiti počtem ∞^3 poloh bodu O_1 a počtem ∞^1 hodnot třetího dvojpoměru k_1 (grupy ${}^1g_2$ skládající ${}^1g_6$ mají totiž proměnné dvojpoměry k_2 a k_3). Při grupě ${}^1G_8$ jest invariantní ϱ_1, na ní O_2 a přímka p_{21}, jdoucí bodem O_2 a neincidentní s ϱ_1 (indexy u p označíme stručně hrany inv. čtyrstěnu tak, že p_{ik} bude přímka jdoucí vrcholy O_i a O_k); 6 parametrů grupy ${}^1g_6$ nutno rozšířiti o 1 následkem ∞^1 poloh bodu O_1 a o 1 nový prom. dvojpoměr.

Naznačeným způsobem dojdeme těchto dalších výsledků: Zvolíme-li na ϱ_1 grupu ${}^1g_2$ $(O_2 O_3 O_4)$, dostaneme v prostoru grupy: základní ${}^1G_3$, dále ${}^1\mathbf{G}_4$ $(\varrho_1 O_2 O_3 O_4 p_{21})$, ${}^1\mathbf{G}_5$ $(\varrho_1 O_2 O_3 O_4 \varrho_2)$, ${}^1\mathbf{G}_6$ $(\varrho_1 O_2 O_3 O_4)$. Máme-li na ϱ_1 grupu ${}^1g_3$ $(O_2 O_3 p_{24})$, nalézáme uvedenou už ${}^1G_4$, potom ${}^1\Gamma_5$ $(\varrho_1 O_2 O_3 p_{24} p_{21})$, ${}^1\mathbf{G}'_5$ $(\varrho_1 O_2 O_3 p_{24} p_{31})$, ${}^1\mathbf{G}'_6$ $(\varrho_1 O_2 O_3 p_{24} \varrho_4)$, ${}^1\mathbf{G}''_6$ $(\varrho_1 O_2 O_3 p_{24} \varrho_3)$, ${}^1\mathbf{G}'_7$ $(\varrho_1 O_2 O_3 p_{24})$. Ke grupě ${}^1g_4$ $(O_2 O_3)$ přísluší: ${}^1G_5$, ${}^1G'_6$, ${}^1\mathbf{G}''_7$ $(\varrho_1 O_2 O_3 \varrho_4)$, ${}^1\mathbf{G}'_8$ $(\varrho_1 O_2 O_3)$. Grupu ${}^1\gamma_4$ $(p_{23} p_{24})$ indukují na ϱ_1 tyto grupy v prostoru: ${}^1\Gamma_5$, ${}^1\Gamma_6$ $(\varrho_1 p_{23} p_{24} p_{21})$, tedy s bodem invar., v němž existuje ${}^1g_2$, dále ${}^1\Gamma'_7$ $(\varrho_1 p_{23} p_{24} \varrho_3)$ a ${}^1\mathbf{G}''_8$ $(\varrho_1 p_{23} p_{24})$. Jestliže na ϱ_1 jest grupa ${}^1g'_4$ $(O_2 p_{34})$, přísluší jí v prostoru ${}^1\mathbf{G}''_5$ $(\varrho_1 O_2 p_{34} O_1)$, ${}^1\mathbf{G}'''_6$ $(\varrho_1 O_2 p_{34} p_{21})$, ${}^1\Gamma_7$ $(\varrho_1 O_2 p_{34} \varrho_2)$ a ${}^1\Gamma_8$ $(\varrho_1 O_2 p_{34})$. Ke grupě ${}^1g_5$ $(O_2 p_{23})$ na ϱ_1 nalezneme uvedené ${}^1G''_6$, ${}^1\Gamma'_7$ a ${}^1\Gamma'_8$ $(\varrho_1 O_2 p_{23} \varrho_4)$, ${}^1\mathbf{G}'_9$ $(\varrho_1 O_2 p_{23})$. Při grupě ${}^1\gamma_6$ (p_{34}) na ϱ_1 dostaneme v prostoru konečně grupy ${}^1\Gamma_7$, ${}^1\mathbf{G}''_9$ $(\varrho_1 p_{34} \varrho_2)$ a ${}^1\mathbf{G}'_{10}$ $(\varrho_1 p_{34})$.

Při dvou mimoběžkách (třebas p_{12}, p_{34}) invariantních může na obou býti tříparametrová grupa proj. transformací, i vzniká v prostoru ${}^1\mathbf{G}'''_7$ $(p_{12} p_{34})$; supponujeme-li však jen na jedné přímce grupu s 3 parametry, na druhé s 2 nebo 1 parametrem atd., neobdržíme v těchto 5 možných případech nové grupy. Je-li invariantní pouze jedna přímka (p_{12}), na ní pak grupa proj. transformací s 3, 2, 1 parametrem, jsou příslušné grupy kollineací v S_3 pořadem ${}^1\mathbf{G}_{11}$ (p_{12}), ${}^1\Gamma'_{10}$ $(p_{12} O_1)$, ${}^1\Gamma''_9$ $(p_{12} O_1 O_2)$.

Při duální úvaze, kde vyjdouce od bodu a možných grup dvourozměrných v jeho svazku, klademe neincidentní rovinu do přípustných poloh, neobdržíme žádné nové grupy, vyjma jedinou ${}^1\Gamma_{12}$ (O_1), duální ke grupě ${}^1G_{12}$ s invar. rovinou a grupou ${}^1g_8$ v ní.

Z grup takto sestrojených jsou ${}^1G_{11}$, ${}^1G_{10}$, ${}^1G_9$, ${}^1G'_9$, ${}^1G''_8$, ${}^1G''_7$, ${}^1G'''_7$, ${}^1G'_6$, ${}^1G''_6$, ${}^1G'''_6$, ${}^1G'_5$, ${}^1G''_5$ a ${}^1G_4$ soběduální; k nim patří ovšem také základní ${}^1G_3$ a nejširší grupa ${}^1G_{15}$; ostatní, totiž ${}^1G_{12}$, ${}^1G'_{10}$, ${}^1G''_9$, ${}^1G_8$, ${}^1G'_8$, ${}^1G_7$, ${}^1G'_7$, ${}^1G_6$ a ${}^1G_5$ mají své příslušné duální.

19. Limitní homologie K^{13} téže roviny osové a téhož středu incidentního tvoří, jak bylo uvedeno, základní grupu ${}^{13}G_1$. K^{13} téže roviny ϱ, jichž středy leží v incidentní přímce, vytvořují grupu ${}^{13}\mathsf{G}_2$; na každé rovině, jdoucí zmíněnou přímkou, existuje ${}^5g_2$ (vyjímaje ovšem ϱ), v každém prost. svazku se středem na ϱ jest ${}^5\gamma_2$, pouze ve svazcích se středem na oné přímce ${}^5g_1$.

Duálně K^{13} téhož středu O, jichž roviny tvoří svazek s osou procházející středem O, skládají grupu ${}^{13}\Gamma_2$. V každé rovině bodem O existuje ${}^5\gamma_2$ (na rovinách jdoucích osou svazku inv. rovin ovšem ${}^5g_1$), ve svazcích se středem na ose jest ${}^5g_2$ (vyjímaje svazek se středem v O, v němž je transformace identická). Na každém paprsku bodem O máme totiž při této grupě podřazenou jednoparametrovou grupu proj. transformací typu [(00)]; o její členech platí, že konstanty jich skládají se additivně. Odtud vidíme, že při ${}^{13}\Gamma_2$ (a tedy duálně při ${}^{13}G_2$) mají dvě kollineace grupy s konstantami a', resp. a'' produktem třetí, jejíž konstanta $a = a' + a''$.

Tři limitní homologie téže osové roviny ϱ, jichž středy leží nezávisle v této, mají výslednici, která má opět touž osovou rovinu a střed v ní; existuje tedy grupa ${}^{13}\mathsf{G}_3$ s rovinou ϱ invariantních bodů. Duální grupa ${}^{13}\Gamma_3$ má invariantní bod O, společný střed všech kollineací grupy, osové roviny těchto kollineací tvoří prost. svazek středu O; při obou grupách tříparametrových platí o konstantě a produktu tří homologií s konstantami a', a'', a''' zase vztah $a = a' + a'' + a'''$. Při ${}^{13}G_3$ a ${}^{13}\Gamma_3$ existují v prost. svazcích a na rovinách v celku invariantních podřazené ${}^5\gamma_2$. (Pokračování.)