Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

Poznámka o integrálech hypergeometrické differenciální rovnice

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 3, 294--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120862

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1909

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Poznámka o integrálech hypergeometrické differenciální rovnice.

Napsal K. Petr.

Vyjádříme-li integrály hypergeometrické differenciální rovnice pomocí Wirtingerovy formule, můžeme si položiti otázku, jak transformují se tyto integrály, provedeme-li lineárnou transformaci poměru period τ.*) Řešení otázky t neposkytuje zvláštních obtíží a bylo i v české literatuře předmětem dvou prací**); že se k tomu vracím, má svou příčinu v tom, že nebylo v nich uspokojivě projednáno vyšetření změny logarithmů thetafunkcí při lineární transformaci poměru period τ, což vlastně jest nejpodstatnější částí celého úkolu.

I.

Komplexní číslo a můžeme, jak známo, psáti ve tvaru $re^{i\varphi}$, kde r jest kladné a sluje absolutní hodnota a; φ nazývá se argumentem čísla a. Argument φ není jednoznačně stanoven; přísluší-li ku a argument φ_0, přísluší k témuž číslu argument $\varphi_0 + 2k\pi$ (k libovolné celé číslo). Pod mocninou a^α (α budiž pro jednoduchost reálné číslo různé od nully) budeme dle definice vyrozumívati číslo komplexní $r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$, kde r^α jest kladné a argument $\alpha\varphi$, není-li α celé a není-li φ pevně stanoveno, nabývá hodnot různých nelišících se toliko o násobky čísla 2π; můžeme tudíž v tomto případě mocnině a^α přisouditi různé hodnoty. Jest tudíž umocňování čísel komplexních mnohoznačným úkonem; stane se však jednoznačným, stanovíme-li pevně argument daného čísla komplexního a anebo což jest totéž, stanovíme-li jednoznačně jeho logarithmus.

---

*) Viz ku př. *W. Wirtinger*, »Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale«, Sitzb. der Akad. in Wien, Bd. CXI, Abth. IIa, pg. 899.

**) *Fr. Graf*, »O určení základních substitucí hypergeometrické gruppy pomocí Wirtingerovy formule«, Časopis pro pěst. math. a fys., sv. 37., str. 8.

Fr. Graf, »O všeobecném určení číselných koefficientů grupy hypergeometrické rovnice differenciální«, Rozpravy České akad., ročník XVII., č. 32.

Ve formuli Wirtingerově vyskytují se mocniny thetafunkcí. Ty jsou funkce proměnné v a poměru period

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha + \beta i$$

(α, β reálná čísla, $\beta > 0$). Jsou pak definovány těmito rozvoji *):

$$\begin{aligned}
\Theta(v, \tau) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin (2n+1) \pi v, \\
\Theta_1(v, \tau) &= 2 \sum_{0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos (2n+1) \pi v, \\
\Theta_2(v, \tau) &= 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v, \qquad (1) \\
\Theta_3(v, \tau) &= 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v; \\
q &= e^{\pi i}.
\end{aligned}$$

Lze je též psáti ve tvaru nekonečných součinů, v nichž kladeno $z = e^{\pi i v}$;

$$\begin{aligned}
\Theta(v) &= \frac{A}{i} q^{\frac{1}{4}} (z - z^{-1}) \prod_{1}^{\infty} (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}), \\
\Theta_1(v) &= A q^{\frac{1}{4}} (z + z^{-1}) \prod_{1}^{\infty} (1 + q^{2n} z^2)(1 + q^{2n} z^{-2}), \\
\Theta_2(v) &= A \prod_{1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} z^2)(1 - q^{2n-1} z^{-2}), \qquad (2) \\
\Theta_3(v) &= A \prod_{1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} z^2)(1 + q^{2n-1} z^{-2}); \\
A &= \prod_{1}^{\infty} (1 - q^{2n}).
\end{aligned}$$

Prvním naším úkolem jest stanoviti argument hodnot těchto funkcí pro různé hodnoty proměnných v, τ způsobem jednoznačným; bez tohoto stanovení nemá celý úkol vůbec smyslu.

Z rozvojů (1) jakož i součinů (2) jest patrno, že thetafunkce jsou pro reálná v a ryze imaginárná τ reálné a jsou

*) Viz: *C. Jordan*, Cours d'Analyse, t. II, 2. vyd., str. 409 a násl. K této knize odkazuji čtenáře i vzhledem k ostatním formulím v násl. se vyskytujícím a dotýkajícím se thetafunkcí.

kladné pro $0 < v < \frac{1}{2}$. Budiž v_0 jedna taková hodnota reálná, že $0 < v_0 < \frac{1}{2}$ a τ_0 nějaké ryze imaginární číslo; $\tau_0 = \beta_0 i$, $\beta_0 > 0$. Stanovme, že pro toto τ_0, v_0 jest argument hodnot $\Theta(v_0, \tau_0)$, $\Theta_i(v_0, \tau_0)$ rovný nulle. Argument pro ten případ, že $v = v_0$ a pro libovolnou hodnotu poměru period $\tau = \tau_1$ stanovíme, že jest to hodnota, ke které argument hodnoty

$$\Theta_i(v_0, \tau), \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

spojitě od počáteční hodnoty (rovné nulle) s τ se měníc, dospěje, když τ se mění od τ_0 do τ_1 (ovšem tak, že stále jest $\beta > 0$). Tento argument jest jednoznačně stanoven (nezávisle od způsobu, jak se přeměna τ od τ_0 do τ_1 dála); neboť dle součinů (2) nerovnají se thetafunkce při reálném

$$v = v_0, \quad (0 < v_0 < \tfrac{1}{2})$$

pro žádnou hodnotu τ, při níž $\beta > 0$, nulle. Tím jest provedeno určení argumentu hodnot thetafunkcí pro $v = v_0$ a při libovolné hodnotě poměru period τ.

Co se proměnné v tkne, omezíme se na obor T'_τ omezený na rovině této komplexní proměnné dvěma rovnoběžnými přímkami, první obsahuje osu čísel reálných, druhá prochází bodem $\frac{\tau}{2}$. Přímky tyto přibereme ku oboru T'_τ vyjmouce body na těchto přímkách, pro něž $\Theta_i(v, \tau)$ rovnají se nulle; t. j. vyjma body

$$\frac{k}{2}, \quad \frac{k}{2} + \frac{\tau}{2};$$

k celé. Pro naše úvahy jest toto omezení úplně vystačující.

Jestliže jest v_1 libovolná hodnota oboru T'_{τ_1}, stanovíme argument hodnoty $\Theta_i(v_1, \tau_1)$ tak, že jest to argument, ke kterému dospějeme vycházejíce od argumentu hodnoty $\Theta_i(v_0, \tau_1)$ právě stanoveného spojitě měníce v od v_0 do v_1, požadujíce při tom, aby i argument hodnoty $\Theta_i(v, \tau_1)$ spojitě se měnil. Tím jest argument onen úplně stanoven, neboť $\Theta_i(v, \tau)$ jsou v oboru T'_τ stále od nully různé.

Tak jsme určili jednoznačné argumenty hodnot každé thetafunkce pro každé τ a pro každé v oboru T'_τ.

Jest snadno dokázati, že, ať si zvolíme v_0, τ_0 jakkoliv chceme (v_0 ovšem reálné, $0 < v_0 < \frac{1}{2}$ a τ_0 ryze imag., $\beta_0 > 0$), argumenty hodnot $\Theta_i(v_1, \tau_1)$ ku libovolnému v_1, τ_1 předešlou úvahou stanovené jsou vždy tytéž. Za tím účelem zvolme si pár hodnot v'_0, τ'_0, kde v'_0 reálné a $0 < v'_0 < \frac{1}{2}$, τ'_0 pak ryze imaginárné,

$$\tau'_0 = \beta'_0 i, \quad \beta'_0 > 0.$$

Vezměme pak v úvahu následující po sobě jdoucí změny neodvisle proměnných v, τ, při čemž pro jednoduchost předpokládáme, že při každé jednotlivé změně neodvisle proměnné provádí se tato změna přímočaře v rovině komplexní proměnné v resp. τ:

1) (v_0, τ_0) nechť změní se ve (v_0, τ_1),
2) (v_0, τ_1) nechť změní se ve (v'_0, τ_1),
3) (v'_0, τ_1) nechť změní se ve (v_1, τ_1);

potom změny (rovněž dle přímých čar)

4) $(v_0, \tau_0) \dots\dots\dots (v'_0, \tau'_0)$,
5) $(v'_0, \tau'_0) \dots\dots\dots (v'_0, \tau_1)$,
6) $(v'_0, \tau_1) \dots\dots\dots (v_1, \tau_1)$.

Mění-li si argument hodnot thetafunkcí při těchto změnách spojitě, dostaneme, provedeme-li změny 1. + 2. + 3., pro argumenty hodnot $\Theta_i(v_1, \tau_1)$ ty argumenty, jaké jim svrchu byly přiřaděny. Provedeme-li změny 4. + 5. + 6., dospěje argument thetafunkcí k hodnotám, které bychom pro ty argumenty svrchu byli dostali, kdybychom místo od hodnot (v_0, τ_0) byli vycházeli od hodnot (v'_0, τ'_0); během změny 4. totiž argument thetafunkcí se nemění, jelikož tu thetafunkce $\Theta_i(v, \tau)$ stále reálnými a kladnými zůstávají.

Že v obou případech jest výsledný argument týž, přesvědčíme se, když dokážeme, že celková změna argumentu, provedeme-li postupně tyto změny (přímočaré) neodvisle proměnných

$$\left.\begin{array}{l}(v_0, \tau_0) \dots\dots (v_0, \tau_1),\\ (v_0, \tau_1) \dots\dots (v'_0, \tau_1),\\ (v'_0, \tau_1) \dots\dots (v'_0, \tau'_0),\\ (v'_0, \tau'_0) \dots\dots (v_0, \tau_0),\end{array}\right\} \qquad (3)$$

jest rovna nulle. Že tomu vskutku tak jest, vyplývá z výrazů součinových (2) pro thetafunkce. Argumenty jednotlivých faktorů *)

*) Argumentům jednotlivých faktorů lze tu vždy takové hodnoty přisouditi, že argumenty ty tvoří řadu konvergentní.

doznají při (3) celkovou změnu rovnou nulle. Neboť při změnách (3) ve faktoru $1 - q^m z^{m'}$ jest $|q| < 1$ a $|z| = 1$; (v_0 a v'_0 jsou reálná) a opisuje komplexní číslo $1 - q^m z^{m'}$, provedeme-li postupně změny ve (3), uzavřenou křivku, jejíž body mají od bodu (1, 0) roviny komplexních čísel vzdálenost menší nežli jednu; neobsahuje tudíž ona uzavřená křivka bod (0, 0) ve svém nitru, z čehož uvedené tvrzení o změně celkové argumentu činitele $1 - q^m z^{m'}$ vyplývá.

Argumenty numerických hodnot stanovíme v následujícím, že je píšeme ve tvaru $re^{i\varphi}$ jednoznačně argument stanovící. Argumenty funkcí v následujícím se ještě vyskytujících $-i\tau$, v, $\frac{1}{2} - v$, $e^{\pi i \tau v^2}$ stanovíme jednoznačně týmž způsobem jako svrchu argumenty hodnot thetafunkcí kladouce pro $v = v_0$, $\tau = \tau_0$ argument těchto funkcí rovný nulle a omezujíce se při v na obor T'_τ. Tu jest bezprostředně jasno, že v, resp. $\frac{1}{2} - v$, stanou-li se pro reálné v zápornými, nabývají argumentů π, resp. $-\pi$.

Pro $\Theta(v, \tau)$ lze psáti $\Theta(v, \tau) = v\varphi(v, \tau)$ a můžeme k určení jednoznačnému argumentu funkce $\Theta(v, \tau)$ stanoviti argument hodnoty funkce $\varphi(v, \tau)$, neboť argument faktoru proměnného v byl právě stanoven. Argument hodnoty $\varphi(v, \tau)$ určíme právě tak jako svrchu argument hodnot thetafunkcí, s tím však rozdílem, že můžeme ku stanovení argumentů hodnot $\varphi(v, \tau)$, $\Theta_1(v, \tau)$, $\Theta_2(v, \tau)$, $\Theta_3(v, \tau)$ voliti reálné v_0, pro něž $-\frac{1}{2} < v_0 < \frac{1}{2}$, předpokládajíce, že tyto argumenty pro $v = v_0$ a $\tau = \tau_0$ mají hodnotu rovnou nulle. Úvaha svrchu provedená zůstává tu v platnosti i tenkráte, když obor pro v_0, resp. v'_0 rozšíříme na interval $-\frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}$; zejména lze tu při stanovení hodnot argumentů vycházeti od hodnoty $v_0 = 0$.

Bezprostředně vychází platnost rovnic pro reálné v a při $0 < v < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\varphi(-v, \tau) \equiv \varphi(v, \tau) \quad (\text{a tedy } \Theta(-v, \tau) \equiv e^{\pi i}\Theta(v, \tau)), \\ &\Theta_i(-v, \tau) \equiv \Theta_i(v, \tau), \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4}$$

V rovnicích těchto užito místo obvyklé značky rovnosti znaménka $\equiv$, aby se naznačilo, že nejenom obě strany jsou si rovny, nýbrž že i argumenty obou stran (svrchu určitě stanovené) jsou si rovny.

Že argumenty hodnot obou stran rovnic (4) jsou stejné, jest nejprve jasno pro $\tau = \tau_0$ a $v = v_0$, $0 \leqq v_0 < \frac{1}{2}$; tu jsou argumenty obou stran rovny nulle. Měníme-li spojitě τ_0 v τ, mění se spojitě i argumenty obou stran (dle přijatého za základ stanovení argumentů) a tudíž mění se i spojitě i rozdíl argumentu obou stran. Jelikož však rozdíl argumentů obou stran jest vždy nějaký celistvý násobek čísla 2π a pro $\tau = \tau_0$, v reálné kladné a menší než $\frac{1}{2}$, jest rozdíl rovný nulle, jest i pro libovolné τ rovný nulle a rovnice (4) tak dokázány. Platnost rovnic (4) rozšířiti nelze pro komplexní (nereálné) v, jelikož při komplexním v oboru T'_τ není — v obsaženo v oboru T'_τ, pro kterýžto jedině obor argumenty hodnot $\varphi(v, \tau)$, $\Theta_i(v, \tau)$ jsou svrchu definovány.

Podobně dokážeme (kladouce $\Theta_1(v, \tau) = (\frac{1}{2} - v)\,\varphi_1(v, \tau)$ a rozšiřujíce intervall pro v_0 na $0 \ldots 1$), že pro v oboru T_τ platny jsou vztahy

$$\begin{aligned} &\Theta(v + \tfrac{1}{2}, \tau) \equiv \Theta_1(v, \tau), \quad \Theta_1(v + \tfrac{1}{2}, \tau) \equiv e^{-i\pi}\,\Theta(v, \tau), \\ &\Theta_2(v + \tfrac{1}{2}, \tau) \equiv \Theta_3(v, \tau), \quad \Theta_3(v + \tfrac{1}{2}, \tau) \equiv \Theta_2(v, \tau). \end{aligned} \tag{5}$$

Bezprostředně téměř vyplývají rovnice platné toliko pro reálné v intervallu $0 \ldots \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\Theta(\tfrac{1}{2} - v, \tau) \equiv \Theta_1(v, \tau), \quad \Theta_1(\tfrac{1}{2} - v, \tau) \equiv \Theta(v, \tau), \\ &\Theta_2(\tfrac{1}{2} - v, \tau) \equiv \Theta_3(v, \tau), \quad \Theta_3(\tfrac{1}{2} - v, \tau) \equiv \Theta_2(v, \tau). \end{aligned} \tag{6}$$

Bez potíží lze upraviti rovnice pro transformaci lineárnou thetafunkcí tak, aby v sobě rovnice ty zahrnovaly i rovnost argumentů obou stran. Provedeme to pouze pro trasformace fundamentální. Vezměme v úvahu nejprve substituci $\tau_1 = \tau + 1$. Tu máme ihned

$$\begin{aligned} \Theta(v, \tau + 1) &\equiv e^{\frac{\pi i}{4}}\,\Theta(v, \tau), \\ \Theta_1(v, \tau + 1) &\equiv e^{\frac{\pi i}{4}}\,\Theta_1(v, \tau), \\ \Theta_2(v, \tau + 1) &\equiv \Theta_3(v, \tau), \\ \Theta_3(v, \tau + 1) &\equiv \Theta_2(v, \tau). \end{aligned} \tag{7}$$

Platnost těchto rovnic stačí dokázati pro jedno reálné v_0 (uvnitř intervallu $0 \ldots \frac{1}{2}$) a jedno τ_0, ($\tau_0 = \beta_0 i$). Platnost jejich se rozšiřuje ihned pro jakékoliv τ a v oboru T_τ způsobem svrchu vylíčeným. Zvoliti si k tomu cíli můžeme β_0 tak veliké že $q_0 = e^{-\beta_0}$ jest libovolně malé; avšak

$$\Theta(v_0, \tau) = q^{\frac{1}{4}} \,.\, P(q^2),$$

kde $P(q^2)$ jest potenční řada postupující dle stoupajících celistvých mocnin q^2, jejíž první člen jest nezávislý od q a zároveň od nully různý (při $0 < v_0 < \frac{1}{2}$); mění-li se tedy τ_0 spojitě v $\tau_0 + 1$, tu argument $P(q^2)$ (současně spojitě se měnící) při q_0 dosti malém nabude své původní hodnoty, argument $q^{\frac{1}{4}}$ pak při této změně se zvětší $\frac{\pi}{4}$. Tak jest dokázána první z rovnic (7) pro $v = v_0$, $\tau = \tau_0$; stejně vyplývají ostatní rovnice.

Ještě snadněji vyplývají rovnice pro transformaci

$$\tau_1 = -\frac{1}{\tau}.$$

Ty jsou

$$\begin{aligned}
\varphi\left(v, -\frac{1}{\tau}\right) &\equiv -i\tau\sqrt{-i\tau}\,\varphi(\tau v, \tau) \,.\, e^{\pi i \tau v^2},\\
\Theta_1\left(v, -\frac{1}{\tau}\right) &\equiv \sqrt{-i\tau}\,\Theta_2(v\tau, \tau) \,.\, e^{\pi i \tau v^2},\\
\Theta_2\left(v, -\frac{1}{\tau}\right) &\equiv \sqrt{-i\tau}\,\Theta_1(v\tau, \tau) \,.\, e^{\pi i \tau v^2},\\
\Theta_3\left(v, -\frac{1}{\tau}\right) &\equiv \sqrt{-i\tau}\,\Theta_3(v\tau, \tau) \,.\, e^{\pi i \tau v^2}.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Platnost těchto rovnic, (máme-li zřetel toliko na rovnost argumentů), vyplývá bezprostředně pro

$$v = 0 \text{ a } \tau = \tau_0 = \beta_0 i = \beta_0 e^{\frac{\pi i}{2}}, \quad -i = e^{-\frac{\pi i}{2}},$$

rozšiřuje pak se bez potíží pro jakékoliv τ a pro jakékoli v obsažené v rovnoběžníku, jehož rohy jsou

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau},\ -\frac{1}{2\tau}.$$

Jestliže v nachází se v tomto rovnoběžníku, jest $v\tau$ obsaženo v rovnoběžníku o rozích

$$0,\ \frac{\tau}{2},\ \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$$

a vyskytují se na pravé i na levé straně hodnoty thetafunkcí pro takové hodnoty první proměnné, pro něž argument thetafunkcí jest pevně stanoven (na levé straně jest obor proměnné v část oboru $T'_{-\frac{1}{\tau}}$, na pravé straně pak pro obor $v\tau$ část oboru T'_{τ}).

Místo prvé z rovnic (8) lze psáti (násobíme-li obě strany v)

$$\Theta\left(v, -\frac{1}{\tau}\right) \equiv e^{-\frac{\pi i}{2}}\sqrt{-i\tau}\;\Theta(v\tau, \tau)\,.\,e^{\pi i\tau v^2}. \qquad (8')$$

V předcházejícím omezil jsem se pro jednoduchost při určování argumentů hodnot thetafunkcí vzhledem ku proměnné v na obor T'_{τ}; toto omezení jest však zbytečné. Můžeme docíliti stanovení jednoznačného argumentů těch pro každé v též následujícím — v analysi obvyklým — způsobem.

Učiníme řezy v rovině komplexní proměnné v tak, abychom vyloučili možnost, aby proměnná v, spojitě se měníc a nepřekročujíc řezy, nemohla opsati uzavřenou křivku, obsahující ve svém nitru nullové body thetafunkcí. Ku př. učiníme tyto řezy: nejprve řez vycházející z 0 přes bod $-\frac{\tau}{2}$ do ∞; pak z ostatních bodů nullových thetafunkcí (od 0 různých) řezy do ∞, tak, že kdybychom je prodloužili opačným směrem, procházely by bodem 0. Požadavkem pak, aby argument hodnoty thetafunkce spojitě měnil s v (při konstantním τ), pokud v nepřekročuje řezy, definujeme (na základě toho, že známe argument hodnoty $\Theta_i(v_0, \tau)$) argument hodnoty $\Theta_i(v, \tau)$ v celé rovině komplexní proměnné v (vyjma ovšem v bodech řezů, ve kterých zbývající dvojznačnost dalším stanovením bylo by lze odstraniti).

Bylo by pak snadno upraviti vzorce (7), (8) a (8') tak, aby nám udávaly vztahy mezi argumenty transformovaných a argumenty původních hodnot thetafunkcí tak stanovených pro libovolné v. Vzorce (7) a (8) zůstávají ostatně — jak bezprostředně jasno — beze změny platny i pro takto rozšířenou definici argumentů hodnot thetafunkcí pro každé v; ve formuli (8') nastává změna jenom potud, že pravou stranu jest násobiti $e^{2\pi i}$, když v jest ve výseku roviny omezeném polopaprsky $\left(0\ldots-\frac{1}{2}\ldots\infty\right)$, $\left(0\ldots+\frac{1}{2\tau}\ldots\infty\right)$.

Tato rozšířená definice při naznačené volbě řezů jest vhodná zvláště proto, že nám běží především o přímočaré integrály v mezích 0, $\frac{k + k'\tau}{2}$ (k, k' celá bez společné míry, (resp. o integrály dle dvojoběhů kolem těchto bodů. V následujícím však nepotřebujeme tohoto rozšíření a omezíme se jako svrchu na obor T'_τ. Pro přeměnu ostatně integrálů přímočarých na integrály dle jiné dráhy integrační lze pohodlněji užíti jiného stanovení argumentu hodnot thetafunkcí v příslušném oboru proměnné v.

II.

Integrály hypergeometrické differenciální rovnice jakož i P-funkce Riemannovy *) lze vyjádřiti jako funkce

$$x = k^2 = \frac{\Theta_1^4(o, \tau)}{\Theta_3^4(o, \tau)}$$

ve tvaru integrálním

$$\Theta_1^{a_1}(o,\tau)\,\Theta_2^{a_2}(o,\tau)\,\Theta_3^{a_3}(o,\tau)\int \Theta^{\alpha_0}(v,\tau)\,\Theta^{\alpha_1}(v,\tau)\,\Theta^{\alpha_2}(v,\tau)\,\Theta^{\alpha_3}(v,\tau)\,dv,$$

kde

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2,$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

a kde, jestliže reálné části čísel α_0, α_1, α_2 jsou větší než -1, což budeme předpokládati, lze při přímé integrační čáře za integrační meze vzíti jednak $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, jednak $\left(0, \frac{\tau}{2}\right)$. Mimo to při následujícím výpočtu položíme $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 2$, čímž se přiblížíme co nejvíce na str. 294. cit pojednáním. Zavedu pak toto označení ($\Theta_i(o, \tau)$ pišme krátce Θ_i)

$$J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau) = \Theta_3^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \Theta^{\alpha_0}(v,\tau)\,\Theta_1^{\alpha_1}(v,\tau)\,\Theta_2^{\alpha_2}(v,\tau)\,\Theta_3^{\alpha_3}(v,\tau)\,dv,$$

$$J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau) = \Theta_3^2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \Theta^{\alpha_0}(v,\tau)\,\Theta_1^{\alpha_1}(v,\tau)\,\Theta_2^{\alpha_2}(v,\tau)\,\Theta_3^{\alpha_3}(v,\tau)\,dv. \tag{9}$$

*) *Riemann*, Gesammelte Math. Werke, II. Aufl., pg. 67 a násl.

Z rovnic (8), (8′) plyne ihned

$$J_1\left(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\ -\frac{1}{\tau}\right)$$

$$= -i\tau e^{-\frac{\pi i\alpha_0}{2}}\Theta_3^2\int_0^{\frac{1}{2}}\Theta^{\alpha_0}(v\tau,\tau)\,\Theta_1^{\alpha_2}(v\tau,\tau)\,\Theta_2^{\alpha_1}(v\tau,\tau)\,\Theta_3^{\alpha_3}(v\tau,\tau)\,dv,$$

$$J_2\left(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\ -\frac{1}{\tau}\right)$$

$$= -i\tau e^{-\frac{\pi i\alpha_0}{2}}\Theta_3^2\int_0^{-\frac{1}{2\tau}}\Theta^{\alpha_0}(v\tau,\tau)\,\Theta_1^{\alpha_2}(v\tau,\tau)\,\Theta_2^{\alpha_1}(v\tau,\tau)\,\Theta_3^{\alpha_3}(v\tau,\tau)\,dv.$$

Substitucí $v\tau = v_1$ v obou integrálech a použitím (4) ve druhém integrálu dostáváme

$$\begin{aligned} J_1\left(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ -\frac{1}{\tau}\right) &= -i e^{-\frac{\pi i\alpha_0}{2}} J_2(\alpha_0,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\ \tau), \\ J_2\left(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ -\frac{1}{\tau}\right) &= i e^{\frac{\pi i\alpha_0}{2}} J_1(\alpha_0,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\ \tau). \end{aligned} \tag{10}$$

Podobně z rovnic (7) máme ihned

$$J_1(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\ \tau+1)$$

$$= e^{\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_1)}{4}}\Theta_2^2\int_0^{\frac{1}{2}}\Theta^{\alpha_0}(v,\tau)\,\Theta_1^{\alpha_1}(v,\tau)\,\Theta_2^{\alpha_3}(v,\tau)\,\Theta_3^{\alpha_2}(v,\tau)\,dv,$$

$$J_2(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \tau+1)$$

$$= e^{\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_1)}{4}}\Theta_2^2\int_0^{\frac{1+\tau}{2}}\Theta^{\alpha_0}(v,\tau)\,\Theta_1^{\alpha_1}(v,\tau)\,\Theta_2^{\alpha_3}(v,\tau)\,\Theta_3^{\alpha_2}(v,\tau)\,dv,$$

ze kterýchžto rovnic, pak z integrální věty Cauchy-ovy a z rovnice (5) ihned vyplývá

$$\begin{aligned} J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \tau+1) &= e^{\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_1)}{4}}\frac{\Theta_2^2}{\Theta_3^2} J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_2;\ \tau), \\ J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \tau+1) &= e^{\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_1)}{4}}\frac{\Theta_2^2}{\Theta_3^2}\left[J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_2;\ \tau)\right. \\ &\quad \left. + e^{-\pi i\alpha_1} J_2(\alpha_1, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_3;\ \tau)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Ze vztahů (11) vyplývá dvojnásobným použitím se zřetelem ku (6)

$$J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau+2) = e^{\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_1)}{2}} J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau)$$

$$J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau+2) = e^{\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_1)}{2}} [(1+e^{-\pi i\alpha_1}) \,. \qquad \text{(I)}$$
$$. J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau) + e^{-\pi i(\alpha_0+\alpha_1)} J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau)].$$

Na základě rovnic

$$\tau_1 = -\frac{1}{\tau}, \qquad \tau_2 = \tau_1 - 2, \qquad \tau_3 = -\frac{1}{\tau_2} = \frac{\tau}{2\tau+1}$$

lze postupně z (10) a (I) vypočítati

$$J_1\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \frac{\tau}{2\tau+1}\right) = e^{-\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_2)}{2}}$$
$$[e^{\pi i(\alpha_0+\alpha_2)} J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau) + (1+e^{\pi i\alpha_2}) J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau)], \qquad \text{(II)}$$
$$J_2\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \frac{\tau}{2\tau+1}\right) = e^{-\frac{\pi i(\alpha_0+\alpha_2)}{2}} J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau).$$

Pomocí (I) a (II) lze stanoviti

$$J_1\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right), \qquad J_2\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right), \qquad (12)$$

kde pro celá čísla a, b, c, d vyžadují se kongruence

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0, \quad d \equiv 1; \quad (\text{mod. } 2),$$

a rovnost

$$ad - bc = 1.$$

Neboť substituci

$$\left(\tau, \frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$$

o koefficientech a, b, c, d, hovících uvedeným podmínkám (substituci první třídy), lze vždy snadno vyjádřiti pomocí substitucí fundamentálních*)

$$(\tau, \tau+2), \qquad \left(\tau, \frac{\tau}{2\tau+1}\right).$$

---

*) C. Jordan, Cours d'Analyse, t. II, str. 335.

Z formulí pak (I) a (II) jest ihned patrno, že výrazy (12) jsou lineárné formy výrazů $J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau)$, $J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau)$. *Determinant z koefficientů těchto forem jest rovný 1* *).

Vyjádření obecné výrazů (12) při obecných hodnotách čísel $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ výrazy (9) neposkytůje, jak se zdá, nějakých výhod a není asi v přehledné formě vůbec možné.

Jelikož $x = k^2 = \dfrac{\Theta_1^4(o, \tau)}{\Theta_3^4(o, \tau)}$ při transformacích $(\tau, \tau + 1)$, resp. $\left(\tau, -\dfrac{1}{\tau}\right)$ mění se v $\dfrac{x}{x-1}$ resp. v $1 - x$, můžeme pomocí formulí (10) a (11) vyjádřiti ihned hodnoty funkcí J pro tyto hodnoty neodvisle proměnné

$$x, \quad \frac{x}{x-1}, \quad 1 - x, \quad 1 - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x}$$

jakožto lineárné formy funkcí J, jichž exponenty, nehledě k pořádku, jsou zase $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a při nichž neodvisle proměnná má hodnotu x. To jest známá vlastnost Riemannových P-funkcí **).

Rovněž význam rovnic (I) a (II) vzhledem ku proměnné x lze snadno udati. Mění-li se τ spojitě v $\tau + 2$, jest ihned jasno,

---

*) Formy y_1, y_2, jichž transformací zabývá se p. Graf ve svrchu uvedených pojednáních, transformují se při substitucích $(\omega'_1 = \omega_1, \omega'_2 = 2\omega_1 + \omega_2)$ a $(\omega'_1 = \omega_1 + 2\omega_2, \omega_2 = \omega'_2)$ stejně jako $J_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau)$, $J_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau)$ v (I) a (II) a jsou tudíž $\Theta_{\binom{\alpha,\beta}{\gamma,\delta}} y_1$, $\Theta_{\binom{\alpha,\beta}{\gamma,\delta}} y_2$ (viz druhé pojednání str. 7 a 8) lineárné formy proměnných y_1, y_2 o determinantu rovném 1, čímž l. c. zavedené konstanty $C_{\binom{\alpha,\beta}{\gamma,\delta}}$ až na znaménko jsou stanoveny. Ale i znaménko z rovnic (I) a (II) bez potíží lze stanoviti. Že se faktory $C_{\binom{\alpha,\beta}{\gamma,\delta}}$ kombinují multiplikativně, provedeme-li po sobě dvě substituce (první třídy), jest zcela jasno; neboť běží o formy jednoznačně definované pro každé ω_1, ω_2. Totéž platí i pro transformaci thetafunkcí se zřetelem ku faktorům nezávislým na v.

Že determinant z koefficientů forem pro výrazy (12) jest jedna, jest též patrno, vyjádříme-li $J_i(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \tau)$; $(i = 1, 2)$ jako P-funkci Riemannovu. Viz o tómto vyjádření práci p. *A. Čermáka* »Některé poznámky k theorii hypergeometrické funkce na základě thetafunkcí«; Časopis pro pěst. math. a fys. sv. 36, str. 458.

**) Riemann, l. c. str. 70.

zvolíme-li si β dosti veliké ($\tau = \alpha + \beta i$), že $k^2 = x$ opisuje uzavřenou křivku kolem bodu 0 ve směru kladném a to tak, že argument čísla x se zvětší o 2π a ona křivka neobsahuje ve svém nitru bod 1.

Podobně jest to u substituce $\left(\tau, \frac{\tau}{1 + 2\tau}\right)$; rozložíme-li si ji v substituce

$$\tau_1 = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau_2 = \tau_1 - 2, \quad \tau_3 = -\frac{1}{\tau_2} = \frac{\tau}{2\tau + 1}$$

jako svrchu, seznáme bez potíže, provádějíce postupně tyto změny spojitě a přímočaře a volíce si β_1 dosti veliké, že bod x opíše ve směru záporném jednou uzavřenou křivku kolem 1 a neobsahující již bod 0.

Jsou tedy (I) a (II) vskutku fundamentální transformace, z nichž všecky ostatní přeměny J-funkcí (vznikající, když neodvisle proměnná x proběhne uzavřenou křivku) lze složiti.

Několik poznámek ku přednášce „O zjevu Hallově". Odpověď na článek prof. Dra. Vlad. Nováka.*)

Napsal Dr. **Václav Felix**, prof. čes. vys. školy technické v Praze.

Dne 8. června m. r. měl jsem ve schůzi fysikální sekce IV. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů přednášku „O zjevu Hallově" [1]), v níž jsem porovnával theorii Goldhammerovu a Drudeho a pronesl náhled, že první theorie je neúplná. Důvodem k tomu byl mi pokus provedený s vrstvou rtuťovou v magnetickém poli: ukázalo se, že se mění odpor rtuti vlivem pole magnetického a to nezávisle na směru silokřivek. Poněvadž Hallův zjev u rtuti nebyl pozorován, soudil jsem, že spíše lze hledati výklad v elektronové theorii (*Drude*) nežli v theorii t. zv. aeolotropických změn materiálu (*Goldhammer*).

Přednáška moje nenalezla zalíbení v očích professora české vysoké školy technické v Brně, pana Dra. *Vladimíra Nováka*,

*) Článek tento byl panem autorem dodán krátce po uzavření redakce II. čísla, pročež musil do tohoto (III.) čísla býti odložen. *R.*

[1]) Věstník IV. sjezdu, 1908, str. 455.