Václav Jeřábek

Kterak lze sestrojiti průsečné body ellipsy s kružnicí mající s ellipsou jeden průměr společný

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 3, 335--337

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120855

mezi ellipsou a kruhem (O', r'), pročež protíná osa CC_2 kružnici (O', r') v bodě Q, který též přináleží ellipse.

Kruhy (O, r_1), (O', r') jsou podobně položeny dle středu S a ellipsa jest v affinní poloze s kruhem (O, r_1) ve směru CC_1 vzhledem k ose AB a s kruhem (O', r') ve směru AA' a dle osy CC_1. Vytkneme-li tedy v kruzích (O, r_1), (O', r') podobně položené body N_1, N', protne dle čl. 9. na str. 327. rovnoběžka vedená bodem N_1 k CC_1 rovnoběžku, jdoucí bodem N' k AB, v bodě N ellipsy.

Obdobně lze sestrojiti body ellipsy pro vnitřní střed podobnosti S_1 kruhů (O, r_1), (O', r') a vzhledem ku směrům AB' a CC_2,

Kdybychom pošinuli kruh (O', r') ve směru $O'O$ do polohy (O, r'), stal by se bod O středem podobnosti kruhů (O, r_1), (O, r'), paprsek jdoucí středem O protínal by kruhy (O, r_1), (O, r') v podobně položených bodech L_1, L', na př. po téže straně středu O, a rovnoběžka L_1L k C_1C protínala by rovnoběžku $N'N$ k AA' v bodě L ellipsy. Kdyby body N_1, N' ležely po různých stranách středu O, pak by místo směru C_1C nastoupil směr CC_2*). Též vysvítá, že koncové body průměrů kruhu (O, r') rovnoběžné k CC_1 a CC_2 přináležejí ellipse, ježto průměry tyto jsou osy příslušných affinit mezi kruhem (O, r') a ellipsou.

Kterak lze sestrojiti průsečné body ellipsy s kružnicí mající s ellipsou jeden průměr společný.

Napsal **V. Jeřábek.**

Dříve, než k vlastnímu úkolu přikročíme, připomeňme si některých vlastností affinní polohy, ellipsy a s ní soustředné kružnice, o které při řešení úkolu budeme se opírati:

Ellipsa (M) budiž dána průměrem AB a sdruženou tětivou MN v bodu M_0 rozpůlenou průměrem AB. Kružnice (M_1) nad průměrem AB sestrojená protíná kolmici postavenou v bodu M_0 ku AB v bodech M_1, M_2.

*) Viz Dr. J. Sobotka: Deskriptivní geometrie str. 262, obr. 198.

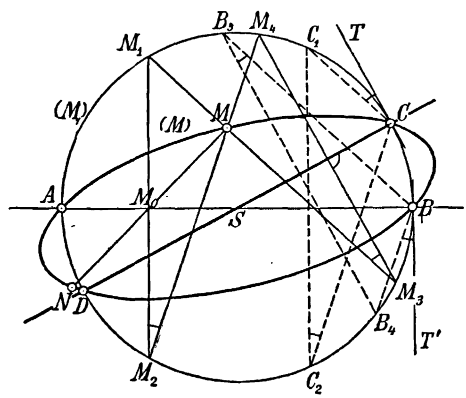
1. *Kruh* (M_1) *a ellipsa* (M) *jsou dvakráte v affinní poloze dle osy* AB, *a to jednou ve směru* M_1M *a podruhé ve směru* M_2M.

2. *Jsou-li dány affinní polohy bodů* M, M_1 *a* M, M_2 *ellipsy* (M) *a kružnice* (M_1), *jest kolmice spuštěná ze společného středu* S *těchto čar na tětivu* M_1M_2 *společnou osou dvou affinních poloh ellipsy* (M) *a kruhu* (M_1).

3. *Je-li ellipsa a s ní soustředný kruh v affinní poloze dle osy ve dvou směrech a vedeme-li v kruhu kolmou tětivu k ose affinity, protnou se přímky, vedené krajními body této tětivy rovnoběžně se směry obou affinních poloh, v bodě ellipsy.*

Úloha, která jest předmětem následujících řádků zní:

Ellipsa (M) *a kružnice* (M_1) *mají společný průměr* AB; *sestrojiti jest druhé dva společné body* C, D *těchto čar, je-li ještě dána tětiva* MN *ellipsy s průměrem* AB *sdružená,*



Řešení. Budiž C dosud neurčeným společným bodem čar (M) a (M_1). Bodu C nechť přísluší v kružnici (M_1) ve směru $CC_1 \parallel MM_1$ příbuzný bod C_1 a ve směru $CC_2 \parallel MM_2$ affinní bod C_2, potom jest dle (2) tětiva C_1C_2 kolma k průměru AB a tedy rovnoběžna s tětivou M_1M_2. Prodlužme M_1M, M_2M až k bodům M_3, M_4 kružnice (M_1). Sestrojme v bodu C tečnu CT ke kruhu (M_1). Tečna tato svírá s tětivou CC_1 úhel C_1CT stejně veliký s obvodovými úhly C_1C_2C a $M_1M_2M_4$, jejichž ramena jsou při vytknuté poloze bodu M ve stejném směru rovnoběžna. Úhly C_1CT a $M_1M_3M_4$ jsou si rovny, neboť každý z nich rovná se úhlu $M_1M_2M_4$, a že ramena M_3M_1, CC_1 uvedených úhlů jsou rovnoběžna, jest i rameno M_3M_4 téhož směru jako rameno CT; avšak rameno CT stojí kolmo na průměru CD, pročež musí na tomto průměru též státi kolmo rameno M_3M_4 a z toho soudíme dle (1), že bod M přináleží ellipse (M'), která jest dvakráte affinně položena s kružnicí (M_1) dle osy CD, a to jednou dle směru M_3M a podruhé dle směru M_4M.

Nyní dokážeme, že ellipsa (M') jest totožna s ellipsou (M). K tomu cíli veďme v kruhu (M_1) stejnosměrně tětivu BB_3 s tětivou M_3M_1 a tětivu BB_4 s M_4M_2. Dokážeme-li, že B_3B_4 stojí kolmo na průměru CD, pak jest dle (3) B též bodem ellipsy (M'). Důkaz snadno provedeme, když sestrojíme v bodě B tečnu BT' ke kruhu (M_1) ve směru M_1M_2 a uvážíme, že úhel $BB_3B_4 = T'BB_4 = M_1M_2M_4 = M_1M_3M_4$ a že ramena B_3B_4 a M_3M_1 stejných úhlů BB_3B_4 a $M_1M_3M_4$ jsou v protivném směru rovnoběžna, čímž i rovnoběžnost ramen B_3B_4 a M_3M_4 ve směrech protivných na jevo vychází, a následkem kolmé polohy ramen M_3M_4 a CD též i B_3B_4 na CD kolmo stojí. Leží tudíž bod B na ellipse (M'), jak jsme nahoře tvrdili. Z týchž důvodů patří i bod A ellipse (M'). Kdybychom v mysli promítli bod N z bodu M_1 na kružnici (M_1) do bodu N_3 a z bodu M_2 do bodu N_4, stála by též tětiva N_3N_4 kolmo na CD. Jest tedy bod N též bodem ellipsy (M'), takže (M) a (M') mají společný průměr AB a sdruženou tětivu MN a proto jsou totožny, což ostatně též z toho vysvítá, že (M') a (M) mají společných pět bodů A, B, C, D a M.

Úkol daný a jeho řešení můžeme v jedno shrnouti takto:

Je-li ellipsa dána průměrem AB a sdruženou tětivou MN a mají-li se sestrojiti body C, D, ve kterých kruh (M_1) nad průměrem AB sestrojený protíná ještě ellipsu, sestrojí se ve středu M_0 tětivy MN v kruhu (M_1) tětiva M_1M_2 kolmá ku AB a prodlouží se spojnice M_1M, M_2M až k bodům M_3, M_4 kružnice (M_1); kolmice spuštěná ze středu ellipsy na tětivu M_3M_4 protíná kružnici (M_1) v hledaných bodech C, D.
