Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr; Jan Sobotka

O životě a činnosti Eduarda Weyra

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 5, 457,458,458--464,466,465--516

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120853

Weyr

O životě a činnosti Eduarda Weyra.

I. O životě Eduarda Weyra.

Napsal K. Petr.

Eduard Weyr narodil se 21. června 1852. v Praze (v Krakovské ulici, č. 581.).

Otec jeho František Weyr (nar. r. 1820.) stal se — zakusiv dříve následkem nepříznivých poměrů hmotných mnoho svízelů ve svém životě — professorem mathematického odboru na německé reálce Pražské v Mikulandské ulici a byl tenkráte, když se narodil Eduard „provisorním učitelem fysiky“ na této škole.*) Ačkoliv otec zaujímal pěkné společenské postavení, nevyrostl přece Eduard v přebytku; postačí si připomenouti malé platy professorů na středních školách v té době a veliký počet sourozenců; mělť Eduard tři bratry a šest sester. Než vychování jeho bylo pečlivé, zvláště pak se strany jeho otce, jenž byl vynikající pedagog a muž pro znamenité vlastnosti povahy a rozumu velice vážený.

Jsa šestiletý počal choditi do obecné školy a vychodiv třetí třídu na německé hlavní škole u sv. Trojice, přešel do čtvrté na českou hl. školu u P. Marie Sněžné. Pak vstoupil na reálku v Mikulandské ulici, na níž otec jeho byl učitelem. Na reálce patřil mezi nejprvnější žáky.**) Zvláště pak jevil — po-

*) Viz životopis Frant. Weyra od prof. Aug. Pánka v Časop. pro pěst. math. a fys., svaz. 24., r. 1895, str. 163., kam též odkazuji čtenáře, hledající podrobnější životopisná data o rodičích Eduardových.

**) Dle pořadí byl vždy druhý anebo třetí mezi 54—66 žáky, v poslední třídě, kterou na reálce navštěvoval, byl první.

dobně jako jeho o čtyři roky starší bratr Emil — neobyčejné vlohy v mathematice a geometrii, což dobře postihl jich otec, jenž tím, že s nimi doma se cvičil a vědomosti jich v těchto vědách ve škole získané značně rozšiřoval, veliký zápal pro mathematiku u Emila a Eduarda vzbudil.

Do poslední však třídy reálné (tenkráte šesté) Eduard již nevstoupil ze zdravotních ohledů. V útlém věku postižen byl totiž spálou a následky této nemoci byly patrny i v pozdějším věku, zejména trpíval bolestmi v hlavě téměř nesnesitelnými. Poslouchal pak v tomto roce (1867—68) jako host přednášky o mathematice prvního i druhého ročníku na německém oddělení techniky.*) Již tehdy započal sotva šestnáctiletý svojí literární činnost, zaslav vídeňské akademii dvě práce, z nichž prvá „O rozšíření věty Désarguesovy a jejím použití“ ve spisech této akademie byla uveřejněna. Právě tak jako bratr Emil a bezpochyby jeho vlivem a návodem počal i on se zvláštní zálibou zabývati se projektivnou geometrií (tehdy nazývanou novější anebo vyšší geometrií).

V následujícím roce školním 1868—69 byl přijat jako řádný posluchač na pražskou techniku a to na základě přijímacích zkoušek a poslouchal opětně přednášky o mathematice prvého a druhého ročníku u Liebleina a Durègea, pak o deskriptivní geometrii a o fysice u Küppera a Waltenhofena. V roce 1869—70 byla technika rozdělena na český a na německý polytechnický ústav král. Českého. Eduard pak stal se řádným posluchačem české techniky a navštěvoval přednášky převahou mathematické Studničkovy a Šolínovy a rovněž přednášky Zengrovy o technické fysice a jiné. V tomto roce a následujícím, kdy ve svých studiích na české technice pokračoval, uveřejnil Weyr další pojednání geometrická a to jednak zase ve spisech vídeňské akademie, jednak v Crellově Journalu.

Tenkráte (1869—70) započala svoji činnost „Jednota českých mathematiků“, vzniknuvši ze „spolku pro volné přednášky z mathematiky a fysiky“. Založení tohoto spolku bylo pro českou

*) Technika byla tehdy v Praze jediná a to obojjazyčná; její úplný název byl „polytechnický ústav království Českého“. Česky o mathematice přednášeli Blažek a Studnička; německy Lieblein a Durège.

literaturu mathematickou událostí velikého významu, k čemuž přispěla hlavně ta okolnost, že bylo hned na počátku dosti mužů vynikajících, kteří novému spolku z plna byli oddáni. Mezi tyto patří také Ed. Weyr, jenž byl od počátku členem „Jednoty" a horlivým přispěvatelem do všech periodických publikací jí vydávaných. Hned „první zpráva Jednoty", vydaná v roce 1870, přináší na prvém místě jeho článek „O promětných tvarech v rovině".

Avšak ještě jinak — již jako posluchač techniky — prospěl Eduard české math. literatuře. Vydal r. 1871 společně se svým bratrem Emilem první díl „Základů vyšší geometrie", až do nejnovější doby jedinou to učebnici projektivné geometrie v jazyku českém. V roce 1871—72 byl jednoročním dobrovolníkem v Praze a zároveň — jako i v létech dřívějších — mimořádným posluchačem na universitě pražské.

Četnými pracemi doposud uveřejněnými doma i za hranicemi upoutal na sebe pozornost nejenom svých učitelů, avšak i vzdálenějších kruhů a nebylo mu nesnadno zjednati si státní stipendium, aby mohl ve svých studiích pokračovati v cizině.

V té době jedním z mathematiků nejvíce činných a to i literárně i jako učitel byl Alfred Clebsch v Göttinkách. Jméno vynikající tohoto muže, jakož i směr jeho prací velmi se zamlouvající Eduardovi rozhodly, že se odebral Eduard Weyr do Götting v druhé polovině října 1872. Clebsch, kterému mladý Weyr byl již znám svými pracemi, velmi vlídně jej přijal, a jemu ochotně radou i skutkem byl nápomocen. Poslouchal pak Weyr jeho přednášky („Elemente der Theorie der Abelschen Functionen; allgemeine Theorie der alg. Gleichungen"). Avšak k velikému neštěstí pro vědu a žáky jeho Clebsch po krátké nemoci (difterii) umřel dne 7. listopadu (ve 40. roce věku). Událostí touto byl Weyr ohromen; jeho pobyt v Göttinkách ztratil následkem toho na svém významu. Avšak zůstal již tam, ačkoliv jej prof. Klein tenkráte v Erlangenu, se kterým se Eduard sešel na pohřbu Clebschově, zval do Erlangenu, by tam společně pracovali. Navštěvoval pak přednášky Scheringovy, Klinkerfuesovy a j. Vypracoval v tomto roce vynikající svoji práci „Über alg. Raumcurven", kterouž na universitě Göttingské jako dissertaci podal a na základě jejímž stal se (28. května 1873) doktorem filosofie.

V roce následujícím obdržel opětně státní stipendium (1000 zl.), čímž mu bylo umožněno, že mohl v zimním semestru 1873—74 studovati v Paříži. Poslouchal tam přednášky Serretovy o počtu infinitesimálním a Hermitovy o theorii funkcí zvláště elliptických. S tímto slavným mathematikem, jenž byl snad hlavní pohnutkou jeho cesty do Paříže, seznámil se osobně*); jakož vůbec pobyt v cizině byl mu užitečným také z té příčiny že stýkal se s řadou vynikajících později mathematiků. V létech 1873 a 1874 uveřejnil pojednání vztahující se ku křivkám prostorovým 6. a 7. řádu.

Vrátiv se v létě r. 1874 do Prahy, habilitoval se jako soukromý docent mathematiky na české technice (potvrzen dne 10. března 1875)**) a ohlásil ve školním roce 1875—76 přednášky „Úvod do theorie funkcí elliptických" a „O rovnicích". Zatím však sběhly se dvě pro Weyra důležité věci. Prvá byla, že mu byla nabídnuta mimořádná professura mathematiky na zřízené nově universitě v Záhřebě, druhá pak, že bratr jeho Emil, jenž od roku 1872 byl mimořádným professorem na české technice, jmenován byl řádným professorem mathematiky na universitě ve Vídni (23. září 1875).

Přijetí nabídky ze Záhřebu překážela poněkud ta okolnost, že měl Eduard Weyr po dvě léta státní stipendium a byl vázán propůjčením jeho na země rakouské (Cislajtanii). Avšak zvláštním přípisem ministerským (ze dne 10. srpna 1875) byl jakýchkoliv závazků v té příčině sproštěn, „poněvadž ministerstvo v tomto okamžiku, ačkoliv pravděpodobně jen krátký čas, nemělo příležitost rovné postavení mu nabídnouti".***) Současně pak

*) Patřil později Eduard mezi četné mathematiky, s nimiž Hermite si dopisoval; některé z těchto dopisů (Weyrových, resp. Hermitových) byly, pokud řešením vědeckých otázek se zabývaly, uveřejněny. (Weyrovy v „Bulletin des sciences math.", Hermitovy v Časop. pro pěst. m. a fys., ve Věstníku kr. č. uč. sp. n.).

**) V měsících březnu, dubnu a květnu roku 1875 byl assistentem při stolici deskriptivní geometrie na německé technice (u prof. Küppra), kteréžto místo se tenkráte počátkem února uprázdnilo odchodem Karla Pelze (nyní professora deskriptivní geometrie na české technice v Praze a proslulého geometra) na reálku do Těšína.

***) Doslovně: ...., so will ich demselben die Annahme dieses Postens deszhalb nicht verweigern, weil ich in Augenblicke, wenn auch vorprojevilo ministerstvo ochotu dáti Weyrovi roční honorář 800 zl. počínaje školním rokem 1875—76, zůstane-li dále činným při české technice. Tuto ochotu Weyr s vděčností přijal a povolání do Záhřebu odmítl, ač nabídka ještě jednou — a to již professury řádné — velmi vřelými slovy byla opětována a on prošen, aby aspoň činnost 3 roků universitě Záhřebské věnoval.*)

V důsledku pak odchodu svého bratra do Vídně suppleval na počátku školního roku 1875 76 mimořádnou professuru mathematiky na české technice po návrhu professorského sboru a počátkem pak roku 1876 jmenován mimořádným professorem mathematiky na této škole, čímž ve 24. roku svého věku zbaven veškerých těžkých starostí o hmotné své zaopatření v budoucnosti.

Současně (v roce 1876) habilitoval se za soukromého docenta pro novější geometrii na Pražské universitě. Tehdy vyšly další důležité jeho práce ve Zprávách o zased. č. spol. n. a to jedna o rovnicích differenciálných 1. řádu a druhá o funkcích elliptických a jméno Weyrovo ve vědeckém světě tak vyniklo, že již r. 1878 navržen byl na prvním místě za řádného professora mathematiky na universitu v Inšpruku,**) místa tohoto však neobdržel. Na podzim pak téhož roku byl vyzván jménem sboru professorského university v Černovicích, aby se vyjádřil, zdali by tam přijal místo; Weyr odpověděl záporně.

V roce 1881 (15. února) jmenován řádným professorem na české technice a vzdal se téhož roku docentury na české universitě; tato získala tenkráte nového docenta mathematiky L. Krause, vynikajícího to žáka Weierstrassova. S tímto žil Ed. Weyr v poměrech zvláště přátelských a zdá se, že vlivem tohoto mathematika tak záhy zesnulého (v r. 1886) sesíleno bylo v Eduardovi přání vniknouti v methody Weierstrassovy. Než

---

aussichtlich nur kurze Zeit, noch nicht in der Lage bin ihm eine gleiche Anstellung zu bieten.

*) Jak známo, stal se řádným professorem mathematiky na universitě Záhřebské Dr. K. Zahradník, jenž pak při založení české techniky brněnské na tuto byl jmenován.

**) Na druhém místě jako mimořádní byli ex aequo Escherich a Gegenbauer (později professoři mathematiky na vídeňské universitě) a na třetím místě Dantscher (nyní prof. ve Štýrském Hradci).

tyto methody jen částečně známy byly ze spisů Weierstrassových, který málo psal a do té doby uveřejnil ze theorií funkcí jen několik pojednání k tomu se vztahujících a proto nezbylo Weyrovi než odebrati se do Berlína, aby tam poslouchal velikého mathematika. To on učinil, vyžádav si dovolenou, v zimním semestru 1885—86. Tam mimo Weierstrassovy navštěvoval pilně též přednášky Kroneckrovy a činil si o nich podrobné záznamy, které zachovány jsou v jeho pozůstalosti.

Brzy po návratu jeho z Berlína nastaly v rodinném životě Weyrově změny. V roce 1889 téměř v stejnou dobu zemřeli jeho rodiče v dosti vysokém věku a v r. 1890 se oženil se sl. Leopoldinou Pazderníkovou, se kterou však žil v manželství pouze pětiletém.

Roku 1890 nabídnuta mu byla patrně prostřednictvím professora Eschericha*) professura na vídeňské universitě. Toto nabídnutí Weyr nepřijal — z lásky ku svému domovu — ku veliké radosti svých přátel a opravdových přátel české vědy. Byla to již čtvrtá universita nečeská, která Ed. Weyrovi podávala takovým způsobem největší uznání vědeckých úspěchů znamenitého jeho ducha a zároveň mu poskytovala pole přiměřenější jeho činnosti. Techniky totiž jsou u nás ústavy vychovávající muže hlavně pro praktické účely, pěstování vědy náleží tam teprve do druhé řady. Tím nechci snad říci, že by techniky nepotřebovaly mužů v jednotlivých vědách vynikajících; mé přesvědčení jest právě opáčné, že takoví muži pro rozkvět jich jsou zcela nezbytni. Avšak za daných poměrů zajisté nastávají také případy, kdy pro vědu vzniká výhoda, jestliže některý zástupce vědy změní své působení na škole technické za působení na universitě; neboť volnost ve volbě látky a prostředků vzdělávacích jest jistě pravidelně na universitě (fil. fak.) větší nežli na technice. To zvláště platilo o Ed. Weyrovi, on by byl získal na volném čase (na technice byl vázán 10 hod. týdně), nebyl by téměř nijak omezován ve svých přednáškách, kteréžto obě věci by dovolily využitkovati více tvořivého ducha a skvělého nadání jeho v mathematice, a učitelská činnost jeho získala by na svém významu.

*) Viz Časop. pro pěst. m. a fys. ročník 19, str. 302.

A tu přirozeně vnucuje se otázka, proč nestal se Eduard Weyr professorem při universitě české v Praze, zvláště když na české universitě přednášel o mathematice jediný professor Studnička, což dojista při vědě tak obsáhlé a pro jiné vědy tak důležité bylo naprosto nedostatečné. I byla mu, jak se zdá, nabízena professura na české universitě již v roce 1882, avšak tenkráte po úradě s prof. Blažkem povolání to odmítl*) a podobně tomu asi bylo po smrti Krausově. Před rokem 1890 přál si však Ed. Weyr přejíti na universitu, příslušný návrh prof. Studničky také sborem filosofické fakulty byl přijat, avšak nebyl z neznámých mi příčin uskutečněn. Prof. Studnička vyjednával v té příčině osobně s ministerským referentem a tu „poněvadž nová professura by prý měla obtíže u finančního ministerstva,“ usjednotili se na tom Ed. Weyra za honorář na tři hodiny týdně pro universitu zjednati.

Na neštěstí přišlo toto nešťastné rozřešení Weyrovi dosti vhod. Různé potřeby nejbližších i vzdálenějších příbuzných jeho vyžadovaly na něm velikých obětí finančních a zvláště po smrti svých rodičů byl různými závazky velmi obtížen, vůbec pak jsa povahy velmi dobrosrdečné, byl velmi štědrý těm, již o podporu jej žádali. Jeho plat mu následkem toho nepostačoval a on supplování geometrie na universitě přijal. S tím byla spojena povinnost přednášeti tři hodiny týdně za honorář 600 zl. za rok, kterýžto obnos později (v r. 1899) byl na 800 zl. zvýšen.

Na podzim roku 1897 oženil se po druhé s paní Terezií Teigeovou, roz. Štětkovou, vdovou po professoru gymnasijním a vynikajícím odborníku hudebním. K její rodině a zvláště k oběma jejím dítkám z prvního manželství (Mařičce a Karlovi) přilnul Weyr velikou láskou a naopak jeho ušlechtilá povaha získala mu lásku a oddanost všech členů nové jeho rodiny. Rodinný život, jenž potom mu nastal, měl pro něj blahodárný účinek. Zejména mohl se Weyr věnovati ve větší ještě míře vědeckým svým pracím.

Vydal v krátké době posobě dvě učebnice a to „Projektivnou geometrii“ (r. 1898) a „Differenciální počet“ (ke konci

*) Dle dopisu prof. Studničky Ed. Weyrovi, ze dne 13. listopadu roku 1902.

r. 1901). Než veliká námaha spojená s jeho učitelskou činností na technice a na universitě, vědecká práce a práce vydáním spisů zmíněných spojená počaly míti nepříznivý vliv na jeho zdraví. Ke konci r. 1901 stížen byl silným zánětem průdušek a odebral se na radu lékaře v měsíci prosinci k pobytu do Nizzy.

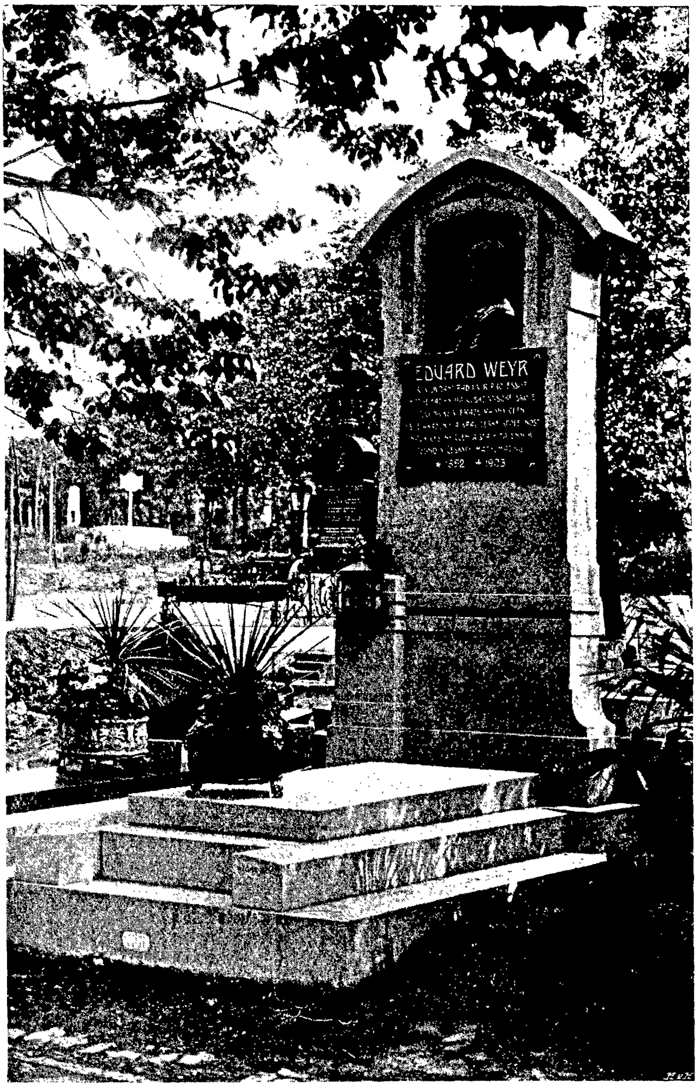
Fakultou filosofickou české university byl tehdy opětně navržen za professora mathematiky a ke konci roku 1902 byl úředně uvědoměn přípisem od ministerstva vyučování o ochotě jej pro universitu jmenovati od 1. října 1903. Tato nastávající změna splňovala Weyrovo přání; poskytovala mu úlevy, jíž potřeboval; hmotná pak nevýhoda, která mu tím vznikala, neměla pro něho tenkráte již žádné důležitosti. Často se těšil v kruhu své rodiny na své působení na universitě, těšil se, že pozvedne na ní úroveň studia mathematického; jak z jeho zápisků patrno, připravoval si již i látku pro cvičení seminární.

Zatím v druhé polovici roku 1902 vyšel spis Dra. J. V. Pexidra, kterýžto spis dle nadpisu obsahovati měl vědeckou úvahu kritickou o Weyrově „Počtu differenciálním". Weyr pokládal tento spis za skutek msty, jak také naznačil hned na počátku své „Odpovědi", uváděje, že o pracích Pexiderových podal před několika měsíci úřední referát. Ačkoliv činnost spravedlivého a tak mírného soudce jako byl Weyr nejméně oprávňuje k domněnce o takových motivech, jest zase na druhé straně těžko nalézti pohnutku pro vydání spisu, jehož prvním účelem byla pohana Weyrova a nikterak nějaké účely vědecké.*) Weyr se proti tomuto spisu hájil vydáním „Odpovědi". Hájení toto však bylo úplně zbytečné; byla prázdnota výtek mu činěných i pro povrchního čtenáře mathematického, majícího po ruce Weyrův „Differenciální počet" bez námahy patrna.

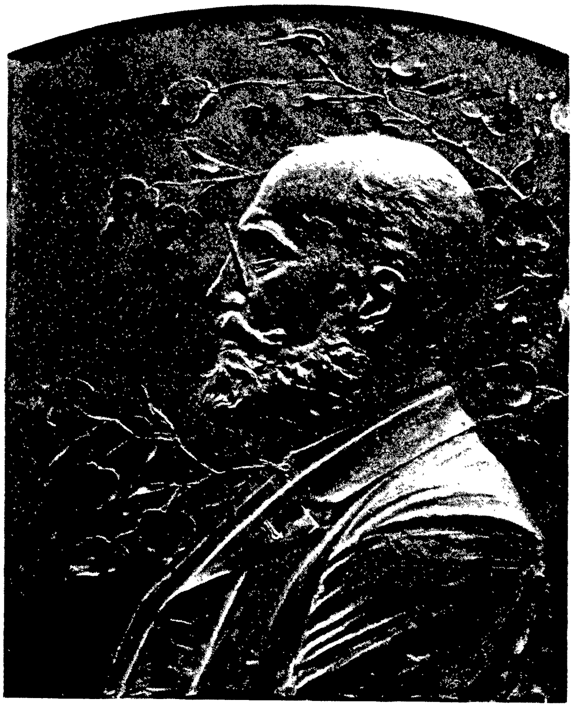
Avšak tento čin nepřátelský a smutné jiné zjevy s ním spojené rozčilovaly velice Weyra a rozčilování to působilo neblaze na zdravotní stav jeho. V zimním semestru 1902—03 jenom krátký čas přednášel, krátce po počátku přednášek zachvácen byl prudkou chorobou srdeční. Šest neděl nepřetržitě

---

*) O tom, jak tento posudek byl napsán, malou ukázku nalezne čtenář níže v poznámce na str. 488.



NÁHROBEK ED. WEYRA NA OLŠANECH.



MEDAILLON Z NÁHROBKU ED. WEYRA (zhotovený Amortem).

bráněno jemu touto nemocí ve spánku a v ulehnutí na lůžko a lékaři už vzdali se naděje, avšak silný Weyrův organismus překonal tento záchvat a nastalo rychlé zotavování. Na zotavení dlel v Záboři u Labské Týnice, kdež pravidelně býval o letních prázdninách. Stav jeho se do té míry zlepšil, že v červnu se mohl súčastniti jako zkušební kommisař zkoušek kandidátů professury a zlepšování pokračovalo i po tom. Až neočekávaně dne 22. července postižen byl záchvatem mrtvice, jemuž druhého dne 23. července 1903 ve věku 51 let podlehl.

Pohřben byl dne 26. července při účastenství zástupců všech vysokých škol českých (university a techniky) a českých vědeckých korporací; celkem však nebylo účastenství odborných kruhů četné, což vysvětliti lze nastavší právě dobou prázdnin. Tělo jeho později (18. října 1904) převezeno do Prahy a pochováno na hřbitově Olšanském.

* * *

Jest se mi ještě zmíniti o povaze a jiných vlastnostech Ed. Weyra. Při tom svědectví těch, již se s ním stýkali, jen chválou oplývají. Prof. V. Řehořovský praví ve své posmrtní vzpomínce:*) „.... a po více než 5 roků měl jsem vzácnou příležitost takřka denně se s ním stýkati i poměr professora k assistentovi přešel znenáhla v poměr přátelský. Ještě dnes s radostí vzpomínám všech těch chvil, které jsem v jeho společnosti prožil. Weyr byl v obcování přívětivý, povaha otevřená, přímá a důvěřivá a musely to býti závažné okolnosti, než důvěry své v někoho pozbyl. Kde mohl, rád přispěl svojí přímluvou. Ve společnosti přátel býval rád vesel a činíval velmi případné vtipy o slabostech lidských často sama sebe do toho přibíraje.“ Prof. Raýman (Živa 1903, str. 189) pak praví o Weyrovi „Výtečný učitel, ze všech korporací našich známá bystrá hlava ve spletitosti debat vždy vyloupnuté jádro i s rozluštěním paratně a se skromnou noblessou nabízející.“

O lásce, jakou si dovedl zjednati i u svých podřízených,

*) Přednesené ve schůzi brněnských členů Jednoty č. math. a otištěné v Moravské Orlici ročník 41., č. 243. a 245.

svědčí též neobyčejně vřelá vzpomínka prof. Ant. Vaňourka, bývalého assistenta Weyrova, proslovená při valné hromadě Jednoty č. math. v prosinci r. 1904. Jeho skromnost pak nejenom z osobních styků, nýbrž i ze spisů jeho jest patrná. Svědomitost a mírnost při posuzování prací jiných jest známa, dokladem toho jsou jeho posudky uveřejněné na různých místech. O štědrosti a o oddanosti ke svým příbuzným a svoji rodině zmínil jsem se již svrchu. Že rád byl vesel a ve společnosti přátel rád zapomínal denní trampoty, tomu nasvědčuje i ta okolnost, že byl horlivým členem veselého sdružení „ambažůry" (z francouz. embouchure) pravidelně se scházejícího ku večernímu pobytu u Pinkasů.

O učitelské činnosti vyslovuje se (l. c.) prof. Řehořovský, povolaný to svědek v té příčině, takto: „Jako učitel vynikal Eduard Weyr velikou svědomitostí; ačkoliv veškeru látku ovládal co nejúplněji, přece hned od počátku svého učitelování měl přednášky své podrobně naskizzovány; slovem podrobně míním tolik, že celý postup měl vždy v logickém pořádku vyznačený; jednotlivé věty nevypisoval, nýbrž jen několika málo počátečnými slovy skizzoval, taktéž ze vzorců obyčejně poznamenal si jen počátek. Poznámky ty každým rokem dle nabytých zkušeností opravoval a zdokonaloval.... Neméně důležitá vlastnost Weyrova jako učitele byla ta, že ve svých výkladech byl neobyčejně přesný a vědecký; dbal přísně i v mluvě logické důslednosti a rád poukazoval ku obtížím, které v jednotlivých případech naskytnouti se mohou. Při tom byly vývody jeho co do formy elegantní a překvapovaly svojí jednoduchostí. Sloh měl stručný a jasný, řeč plynnou. Studentstvu byl vždy otcovským přítelem a rádcem, ochoten přispěti při každé příležitosti."

* * *

O významu Ed. Weyra pro rozvoj „Jednoty českých mathematiků" jsem se již svrchu částečně zmínil. Ve valné hromadě roku 1875 byl zvolen stálým tajemníkem Jednoty a tento úřad zastával se starostlivostí a k velikému prospěchu zvláště knihovny Jednoty až do své smrti. V létech 1882 a 1883 redigoval „Časopis" Jednotou vydávaný a v roce 1884 zvolen čestným členem jejím. Výbor Jednoty pak uznávaje zásluhy a význam jeho o spolek, připomínaje si jeho nezištnou povahu, a především pak maje na mysli jeho veliké zásluhy o vědu mathematickou vůbec a u nás zvlášť, snažil se uctiti památku jeho způsobem co nejdůstojnějším a nejvíce vynikajícím. Na den Všech Svatých položila čtyřčlenná deputace výboru s předsedou dvorním radou prof. V. Strouhalem v čele věnec na hrob jeho v Záboři u přítomnosti choti a švagra zesnulého, při čemž professor Strouhal proslovil vřelou vzpomínku. O valné hromadě v r. 1903 měl pisatel těchto řádků přednášku o životě a zásluhách Ed. Weyra. V roce 1904 navrhl pak výbor valné hromadě, aby Ed. Weyrovi postaven byl nákladem Jednoty náhrobek na hřbitově Olšanském, kterýžto návrh jednohlasně a s pochvalou přijat. Provedení náhrobku svěřeno bylo sochaři Amortovi.

V Brně uctěna byla Weyrova památka tím, že na schůzi Brněnských členů Jednoty prof. V. Řehořovský vylíčil život a zásluhy jeho o vědu.

* * *

Ed. Weyr byl zvolen za člena řádného české akademie (roku 1891) a za řádného člena české společnosti nauk (od roku 1892). Ze zahraničních společností jmenovaly jej dopisujícím členem „Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti“ a „Société des sciences physiques et naturelles v Bordeaux“; mathematická společnost v Moskvě zvolila jej za skutečného člena (zahraničného). Jakožto professor české techniky byl (r. 1898) vyznamenán titulem dvorního rady.

Poznámka. Veškeré údaje o životě Ed. Weyra pocházejí hlavně jednak z různých listin a částečně i dopisů pisateli rodinou zapůjčených, jednak ze zápisků, které mu professorem české vys. šk. techn. p. Aug. Pánkem byly dány k disposici.

II. O Weyrově činnosti v math. analysi a algebře.*)

Napsal

Dr. K. Petr.

I.

Chtěje vylíčiti vědeckou činnost Weyrovu v analysi a vyložiti výsledky, jichž se v pracích svých v různých oborech dopracoval, započnu přirozeně s tím oborem jejím, jemuž nejvíce pojednání Weyr věnoval a v němž získal si nejvíce zásluh. Jest to *nauka o maticích* a s touto úzce souvisící *theorie systémů komplexních čísel*. Vzhledem k důležitosti této věci pro můj účel a pak vzhledem k tomu, že názvosloví v nauce o maticích není ustáleno a článek tento jest psán pro širší kruh čtenářstva mathematického, vysvětlím v následujícím nejprve co nejstručněji základní definice a pojmy.**)

Budiž

$$(1.)\qquad y_h = a_{h_1}x_1 + a_{h_2}x_2 + \ldots + a_{h_n}x_n, \qquad h = 1, 2, \ldots n$$

lineárná substituce, jež ze soustavy n hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ odvozuje soustavu n nových hodnot $y_1, \ldots, y_n$. Pak systém n^2 koefficientů $a_{hk} (h, k = 1, 2, \ldots, n)$ sluje matice n-tého řádu a značí se zkrátka symbolem $\|a_{hk}\|$ anebo také jediným písmenem (velikým) na př. A. Soustavu n rovnic (1.) na základě tohoto označení lze psáti zkrátka takto:

$$(1'.)\qquad (y) = A(x).$$

---

*) Čísla v závorkách hranatých značí pojednání uvedená pod týmž číslem v seznamu publikací Ed. Weyra (viz níže oddíl IV.).

**) Obšírněji jsou tyto věci vyloženy ve spisu Weyrově „O theorii forem bilineárných“ [63].

Dvě matice $\| a_{hk} \|$ a $\| a'_{hk} \|$ slují rovnými, jestliže $a_{hk} = a'_{hk}$ pro $h, k = 1, 2, \ldots n$.

Máme-li mimo matici A ještě matici $B = \| b_{hk} \|$ stejného řádu a vytvoříme-li pomocí této matice z n hodnot $y_1, \ldots, y_n$ nových n hodnot $z_1, \ldots, z_n$, t. j. píšeme-li n rovnic

$$(2.) \qquad (z) = B(y),$$

tu je bezprostředně patrno z rovnic (1.) a (2.), že mezi (z) a (x) jest n rovnic tvaru

$$(z) = C(x),$$

kde C jest matice $\| c_{hk} \|$, jejíž prvky c_{hk} snadno lze vypočíst z koefficientů v maticích A a B. Matice C takto vytvořená sluje součinem matice B s maticí A:

$$(3.) \qquad C = BA.$$

Toto „násobení" matic není úkonem záměnným, jest však úkonem associativním.

Mimo součin dvou matic jeví se účelným zavésti součet (a rozdíl) dvou matic stejného řádu a to tímto způsobem

$$\| c_{hk} \| = \| a_{hk} \| \pm \| b_{hk} \|,$$

jestliže

$$c_{hk} = a_{hk} \pm a_{hk}, \qquad h, k = 1, 2, \ldots n.$$

Z definice součinu snadno lze odvoditi význam symbolu A^{ν}, kde ν jest celé kladné číslo.

Matice, jichž všechny elementy $a_{hk} = 0$ pro $h \gtrless k$ a $a_{hh} = a$, slují skaláry a označují se zkrátka čísly anebo malými písmenami udávajícími zároveň společnou hodnotu prvků a_{hh}. Na základě tohoto označení jest jasný význam rovnice $A^{-1} \cdot A = 1$ definující A^{-1}. Jestliže A jest matice a a skalár, platí $aA = Aa$. Jsou-li všechna a_{hk} (tedy i a_{hh}) rovny nulle, máme t. zv. nullovou matici, kterou v důsledku právě zavedeného označení značíme 0 a pro kterou platí $0 \cdot A = 0$.

Další důležitý pojem pro nauku o maticích jest tak zvaná (od Sylvestra) nullita matice. Jestliže determinant z koefficientů matice A

$$\triangle = | a_{hk} | = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

jest od nully různý, jest matice nullity nullové; jestliže $\Delta = 0$, avšak aspoň jeden subdeterminant $n - 1$ řádu od nully jest různý, jest matice nullity 1; jestliže všecky subdeterminanty $n - 1$ řádu jsou rovny nulle, avšak aspoň jeden subdeterminant $n - 2$ řádu jest od nully různý, jest matice nullity 2, a t. d.

Weyr zabýval se *nullitou součinu dvou matic* a dokázal tyto věty, opíraje se při tom o vhodně volené *soustavy n hodnot* $x_1, x_2, \dots, x_n$:

Nullita součinu dvou (anebo i více) matic jest nejvýše rovna součtu nullit činitelů a alespoň tak veliká jako nullita kteréhokoliv činitele.

Jsou-li dány dvě matice jakožto celistvé funkce téže matice

$$\varphi(M) = \alpha_0 M^\nu + \alpha_1 M^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu,$$
$$\psi(M) = \beta_0 M^\mu + \beta_1 M^{\mu-1} + \dots + \beta_\mu,$$

(kde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_0, \beta_1 \dots$ jsou skaláry), tu, jsou-li mnohočleny $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bez společné míry (ve smyslu obyčejném, při čemž ovšem pokládáme $\alpha_0, \alpha_1, \dots \beta_0, \beta_1, \dots$ za čísla), jest nullita součinu obou matic rovna součtu nullit jednotlivých činitelů.

Na základě pojmu nullity a právě uvedených vět a používaje opětně theorii soustav zavedl Weyr do theorie matic důležitá čísla tímto způsobem. Uvažujme matici $M = | a_{hk} |$ a tuto rovnici

$$(4.) \qquad | M - \mu | = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \mu, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

a budiž μ_α jeden kořen této rovnice a to kořen α-násobný. (Sylvestr nazývá kořeny této rovnice latentními kořeny matice M.) Pak matice $M - \mu_\alpha$ jest jistě aspoň nullity 1, neboť determinant příslušný této matici jest rovný nulle, může býti však, je-li $\alpha > 1$, též nullity vyšší. Weyr sestrojuje matice $M - \mu_\alpha$, $(M - \mu_\alpha)^2$, $(M - \mu_\alpha)^3$, ... a dokazuje

1. postupným mocněním matice $M - \mu_\alpha$ přijdeme nutně ku matici $(M - \mu_\alpha)^\varrho$, která má nullitu α (a rovněž všechny další mocniny této matice $(M - \mu_\alpha)^{\varrho+1}$, $(M - \mu_\alpha)^{\varrho+2}$, ... mají tuto nullitu).

2. Nullity matic $M - \mu_\alpha$, $(M - \mu_\alpha)^2$, $(M - \mu_\alpha)^3$, ... $(M - \mu_\alpha)^\varrho$

jsou

$$\alpha_1\,,\ \alpha_1 + \alpha_2\,,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,,\ \ldots,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\varrho = \alpha,$$

kde

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_\varrho > 0.$$

Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ nazval pak Weyr *čísla charakteristická patřící ku kořenu* μ_α. Z tohoto výsledku plyne pak dále vzhledem ku větám o nullitě matic, označíme-li kořeny rovnice (4.) μ_α, μ_β, μ_λ, jež jsou α-, β-, ... λ-násobné, tak, že $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n$, a označíme-li dále charakteristická čísla kořenu μ_α $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$, charakteristická čísla kořenu μ_β $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\sigma$; ..., charakteristická čísla kořenu μ_λ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\tau$, že matice M hoví této rovnici

$$(M - \mu_\alpha)^\varrho (M - \mu_\beta)^\sigma \ldots (M - \mu_\lambda)^\tau = 0,$$

dokazuje pak Weyr o této rovnici, že jest to rovnice nejnižšího stupně o skalárných koefficientech, které vyhovuje matice M, a nazývá tuto rovnici *základní rovnicí matice M.* *) Každá rov-

---

*) Cayley jak známo vyslovil větu, že matice M hoví rovnici

$$f(M) = \begin{vmatrix} a_{11} - M, & a_{12}, \ldots. \\ a_{21}, & a_{22} - M, \ldots. \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0$$

anebo jinak psáno

$$(M - \mu_\alpha)^\alpha (M - \mu_\beta)^\beta \ldots (M - \mu_\lambda)^\lambda = 0.$$

Cayley dokázal tuto větu pouze pro $n = 2, 3$. Weyr pokoušel se o důkaz této věty, avšak původně s nezdarem; v pojednání svém ([47] O základní nice o skalárných koefficientech, které matice M hoví, obsahuje levou stranu této základní rovnice jako činitele (v obyčejném smyslu).

Zavedeme-li do rovnice (1.) místo x, y nové systémy veličin rovnicemi $(x) = M(x')$, $(y) = M(y')$, tu změní se n rovnic mezi x, y v n rovnic mezi x', y' a těmto rovnicím lze dáti na základě přijatého označení, je-li determinant matice M od nully různý, tvar

$$y' = M^{-1}AM(x').$$

Matice A nahražena jest tak maticí transformovanou $M^{-1}AM$. (Weyr, Frobenius a jiní nazývají ji podobnou.) Pro některé otázky pak algebry a analyse (na př. pro nauku o lineárných gruppách, o lineárných rovnicích differenciálných) jest důležito rozhodnouti, *které vlastnosti matice* (*substituce*) *A zůstaly transformací vytčenou nezměněny,* t. j. vyhledati invarianty matice (substituce) A. Tuto otázku zúplna rozřešil Weyr a výsledek jest velmi jednoduchý. *Invarianty, jež matici zúplna charakterisují, jsou jednak kořeny rovnice* (*4.*), *jednak jich čísla charakteristická.* Známe-li tudíž jednu matici o daných kořenech a číslech charakteristických A, jsou všecky ostatní dány výrazem

$$M^{-1}AM,$$

kde matice M jest libovolná, avšak s determinantem od nully různým. Matice pak s předepsanými kořeny a čísly charakteristickými Weyr snadno v jednoduchém tvaru sestrojuje.

Ku dokázání těchto vět o invariantech matic poprvé uveřejněných v r. 1885 (v poj. [52.], [53.]) zavádí Weyr do svých úvah pojem *normálných soustav* příslušných dané matici ([63.], str. 37.—53.); pojem ten však nelze mi tu blíže vykládati.

---

větě theorie matic) předkládá důkaz obecný věty Cayleyovy, jak mu dán na jeho vyzvání L. Krausem, docentem české university, jakož i svoji modifikaci tohoto důkazu, kterou bylo docíleno toho, že tento důkaz patří mezi nejjednodušší důkazy věty Cayleyovy. Důkaz jiný byl podán však již dříve Frobeniem v Journal für reine und ang. Math., svaz. 84. (r. 1878). Cayleyova věta jest ovšem obsažena ve větě Weyrem dokázané a svrchu uvedené.

Tento způsob důkazu, ačkoliv snad není nejjednodušší, *) jest velice pozoruhodný svojí důmyslností; a vůbec spis Weyrův, kde soustavně vykládá nauku o maticích, [63] tento velikolepý jeho výkon může býti dán za vzor spisu vytříbené formy, přesného a jasného výkladu a zůstane trvale ozdobou mathematické literatury české.

Pozoruhodno jest v tomto spise Weyrově též užití nauky o maticích na různé problémy a důkazy vět známých, kterážto užití jednak se tu jeví jako pouhé důsledky té nauky, jednak vynikají svojí jednoduchostí nad známé způsoby řešení. Řeší pak Weyr mimo jiné problém *ekvivalence bilineárných forem:* „Nechť stanoví se nutné a postačující výminky, za kterých dva páry bilineárných forem jsou ekvivalentní a v případu ekvivalence nechť se vyvine methoda ku stanovení transformace.“ (Weierstrass, Kronecker.) **)

O formách kvadratických

$$\varphi = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \qquad h, k = 1, 2, \ldots, n; \qquad a_{hk} = a_{kh},$$

pak dokázány tyto věty: „Je-li r hodnost symmetrické matice $M = \| a_{hk} \|$, (t. j. je-li nullity $n - r$), pak lze kvadratickou formu vyjádřiti jakožto homogenní kvadratickou formu r lineárných a neodvislých forem a naopak.“

„Jsou-li elementy a_{hk} symmetrické matice M reálné, jsou všecky kořeny její reálné.“

„Je-li M symmetrická matice o reálných elementech a je-li μ kořen její a to α-násobný, pak jest $M - \mu$ nullity α.“ (Weierstrass.)

„Transformujeme-li kvadratickou formu o reálných koefficientech a determinantu různém od nully na součet čtverců,

---

*) Schůdnější asi byla by cesta obvyklá v theorii forem: Zjednati si nejprve transformací nejjednodušší tvar matice (na př. pomocí přesné indukce, jak provedeno v Jordan, Cours d'Analyse, sv. III., str. 173.); postup další neposkytoval by žádných již potíží. Srovnej v té příčině též pojednání K. Henselovo „Theorie der Körper von Matrizen“, Journal für reine und angewandte Math., sv. 127. (r. 1904), str. 116.—166.

**) Tento problém řešil Weyr zprvu v [63.] s vyloučením jednoho zvláštního případu, později v [90.] doplnil řešení i pro ten zvláštní případ.

jest počet kladných a počet záporných čtverců vždy týž.“ (Sylvester.)

Dále jsou dokázány dvě věty o *orthogonálných substitucích:*

„Absolutní hodnoty kořenů orthogonálné matice o reálných elementech jsou rovny jedné.“ (Brioschi.)

„Je-li M orthogonálná matice o reálných elementech a μ kořen α-násobný, jest $M-\mu$ nullity α.“ (Frobenius.)

Jako poslední applikací theorie matic jest odvozena a doplněna základní věta Fuchsova pojednání „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“, Journal f. reine und ang. Math., sv. 66. str. 121. Při tom jest ještě poukázati na [62.] a [83.], kde podána různá použití nauky o maticích na problémy geometrické.

Weyr však neomezil se ve svých pracích pouze na racionálné celistvé funkce matice M; vyšetřuje též ([63.] str. 95., beru v úvahu hned nejobecnější případ) *funkci matice M danou řadou*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu$$

a dospívá nejprve k výsledku, že řada tato definuje určitou matici $f(M)$ tehdy a jen tehdy, když všechny kořeny matice M zapadají do konvergenčního oboru řady

$$f(\zeta)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu .$$

Avšak matici $f(M)$ lze vyjádřiti za této podmínky jakožto celistvou racionálnou funkci matice M

$$f(M)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu = \overline{\alpha}_1 M^{m-1}+\overline{\alpha}_2 M^{m-2}+\ldots+\overline{\alpha}_m ,$$

kde m jest stupeň základní rovnice matice M a $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$, ... $\overline{\alpha}_m$ se určí takto.

Nechť základní rovnice matice M má tvar

$$(M-\mu_1)^{\varrho_1}(M-\mu_2)^{\varrho_2}\ldots(M-\mu_\tau)^{\varrho_\tau}=0$$

pak funkce $f(\zeta)$ a polynóm $\overline{\alpha}_1\zeta^{m-1}+\overline{\alpha}_2\zeta^{m-2}+\ldots+\overline{\alpha}_m$ jakož i jejich posloupné derivace v počtu $\varrho_k - 1$ mají stejné hodnoty pro $\zeta = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, \tau$.

V této obecné větě jeví se Sylvestrův „seconde loi de mouvement algébrique“ (Comptes R., sv. 98.) dokázán jako zvláštní případ.

Tyto úvahy vedou Weyra ku sestrojení matic $\log M$, e^M, jakožto příkladů k obecné větě. Provedl pak toto sestrojení již dříve pro binárné matice v r. 1884 (v C. R., [48]), při čemž opravil jednu větu Hamiltonovu o periodách matice (vlastně kvaterniónů) e^M v oboru komplanárných matic (kvaterniónů).

II.

Pojmy binárné matice a *kvaterniónu*, jak poprvé vytkli Cayley a Sylvester a jak obšírně vyložil Weyr ve práci [56.], jsou pojmy v podstatě identické, máme-li na mysli počítání s nimi. Tato identičnost, která vzhledem k theorii kvaterniónů jest fundamentální poukazujíc přímo na jich úzký vztah ku gruppě lineárných substitucí, vysvitne hned, zavedeme-li tyto čtyři matice jako základní (volíce zároveň vhodné označení těchto matic, odchylně od označení tu dosud pro matice používaného):

$$1 = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Bmatrix}, \qquad i = \begin{Bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{Bmatrix},$$

$$j = \begin{Bmatrix} 0, & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1}, & 0 \end{Bmatrix}, \qquad k = \begin{Bmatrix} \sqrt{-1}, & 0 \\ 0, & -\sqrt{-1} \end{Bmatrix}.$$

Tyto matice hoví těmto multiplikačním pravidlům:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j;$$

tudíž přesně týmž vztahům jako stejně označené jednotky v Hamiltonových kvaterniónech. Jelikož pak každou binárnou matici lze psáti ve tvaru

$$M = a + bi + cj + dk,$$

kde a, b, c, d jsou skaláry (ustanovené jakýmikoliv čísly reálnými anebo komplexními), shoduje se počítání s maticemi takto vyjádřenými úplně s počítáním s kvaternióny (resp. bikvaternióny). V uvedené práci [56.], jakož i [48.], podává Weyr různá použití nauky o binárných maticích na nauku o kvaterniónech.

Druhá práce jeho v Compt. R. uveřejněná a kvaterniónů se týkající [49.] podává methodu, jak lze převésti řešení rovnice kvaterniónové tvaru:

$$\Sigma(aq^n b + cq^{n-1}d + \ldots + gqh) = r,$$

kde q jest hledaný kvaternión touto rovnicí stanovený; $a, b, c, \ldots r$ kvaternióny dané, na řešení rovnic mezi čísly. V této rovnici jest kvaternión q po obou stranách násoben kvaternióny danými; z té příčiny dává jim Weyr jméno „bilaterální". Byla pak tato práce Weyrova vyvolána prací Sylvestrovou rovněž Compt. R otištěnou, ve které jsou obsaženy některé výsledky týkající se řešení rovnic kvaterniónových, při nichž však hledaný kvaternión jest násoben vždy po jedné a téže straně kvaternióny danými. Přislibuje pak Sylvester současně, že způsob, jakým řešení takovýchto rovnic převésti lze na řešení rovnic obyčejných, vyloží v některém příštím čísle „London and Edinburgh Philosophical Magazine". Nepotřebuji snad ani vytýkati, že rovnice řešené Weyrem jsou obecnější než Sylvestrovy.

Zcela podobně jako souvisí nauka o kvaterniónech s naukou o maticích binárných, souvisí také nauka o *komplexních číslech* s n^2 jednotkami s naukou o maticích n-tého řádu. *Weyr však poprvé ukázal v* [57.], *jak možno také nauku o komplexních číslech s libovolným počtem jednotek, na př. n, převésti na theorii matic.* Toto převedení pak provádí tímto způsobem:

Budiž dáno n komplexních jednotek

$$e_1, e_2, \ldots e_n,$$

pro něž platí

$$e_h e_k = \alpha^h_{k1} e_1 + \alpha^h_{k2} e_2 + \ldots + \alpha^h_{kn} e_n, \qquad h, k = 1, 2, \ldots n.$$

kde čísla α jsou však tak volena, aby vyhověno bylo principu, associativnímu, t. j. aby bylo

$$(e_h e_k)e_i = e_h(e_k e_i).$$

Následkem toho hoví tato čísla těmto vztahům

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{k\nu}^{k} \alpha_{ig}^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\nu}^{k} \alpha_{\nu g}^{h}, \qquad h, k, i, g = 1, 2, \ldots, n.$$

Předpokládáme-li tyto vztahy pro čísla α a sestrojíme-li n matic

$$E_h = \begin{Bmatrix} \alpha_{11}^h, & \alpha_{21}^h, & \ldots & \alpha_{n1}^h \\ \alpha_{12}^h, & \alpha_{22}^h, & \ldots & \alpha_{n2}^h \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n}^h, & \alpha_{2n}^h, & \ldots & \alpha_{nn}^h \end{Bmatrix}, \qquad h = 1, 2, \ldots n,$$

dostaneme matice hovící rovnicím

$$E_h E_k = \alpha_{k1}^h E_1 + \alpha_{k2}^h E_2 + \ldots + \alpha_{kn}^h E_n, \qquad h, k = 1, 2, \ldots n,$$

t. j. matice E_h hoví týmž rovnicím jako jednotky komplexní e_h, a poněvadž všecka ostatní pravidla početní požadovaná pro e_h sama sebou jsou splněna pro matice, jest patrno, že počítání s komplexními čísly o n jednotkách jest totožno s počítáním maticemi tvaru

$$M = m_1 E_1 + m_2 E_2 + \ldots + m_n E_n,$$

kde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ jsou skaláry (vyjádřené čísly reálnými anebo obyčejnými komplexními).*)

*) Tento výsledek lze také ovšem v jiné formě vyslovit, máme-li na paměti význam matice (jakožto lineárné substituce): Každému systému komplexních čísel s n jednotkami odpovídá gruppa lineárných substitucí s n parametry. Na tuto větu prvý upozornil Poincaré v pojednání „Sur les nombres complexes, Compt. Rend., sv. 99., str. 740. (rok 1884.), aniž by však nějak určitěji se o té souvislosti zmiňoval. Lineárné substituce příslušné k číslu komplexními m dostaneme snadno, klademe-li
$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$, $m = m_1 e_1 + \ldots + m_n e_n$,
z rovnice

$$y = mx$$

roznásobením a srovnáním koefficientů týchž jednotek $e_1, \ldots e_n$ na obou stranách. Matici E_h v textu uvedenou dostáváme podobně ze součinu

$$y = e_h x.$$

Analogicky jako vyšetřoval Weyr se zálibou matice definované nekonečnými řadami, zabýval se též v [58.] otázkou, kdy nekonečná řada mocninná, jejíž argument jest komplexní číslo z n jednotek základních, definuje zase takové číslo komplexní. Přichází pak k výsledkům téměř identickým jako při theorii matic, což čtenáře zajisté nepřekvapuje vzhledem k úzké příbuznosti obou těchto pojmů. Budiž

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$$

číslo komplexní. Pak toto číslo hoví jistě rovnici tvaru

$$x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_m x = 0,$$

kde $\gamma_1, \ldots \gamma_m$ jsou obyčejná čísla (reálná anebo imag.). Budiž tato rovnice rovnicí nejnižšího stupně, která jest pro x splněna, (pak jest $m \leqq n$) a vezměme v úvahu nekonečnou řadu

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu,$$

kde α_ν jsou opětně obyčejná reálná anebo imag. čísla. Dokazuje pak Weyr: Aby tato řada definovala číslo komplexní, jest nutno a postačí, aby kořeny rovnice pro μ

$$\mu^{m+1} + \gamma_1 \mu^m + \ldots + \gamma_m \mu = 0$$

se nacházely na oboru konvergence řady mocninné:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu,$$

(kde ζ jest obyč. číslo r. nebo imag.).

Vyčísluje pak v tom případě, že podmínky větou žádané jsou splněny, ono komplexní číslo a podává pak na konec ještě zevšeobecnění této věty pro řady tvaru

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \alpha_\nu x^\nu.$$

III.

O rovnicích differenciálných uveřejnil Weyr toliko jedno, avšak pro tuto nauku důležité pojednání v r. 1875 [22.]. V tomto pojednání zabývá se rovnicemi differenciálnými prvního řádu $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ a takovými, že mezi n *libovolnými* partikulárnými integrály této rovnice jest vždy vztah

$$\mu(y_1, y_2, \dots y_n) = \text{Const.},$$

kde μ jest určitá funkce n proměnných $y_1, y_2, \dots y_n$. Dokazuje pak, že nutná pro to podmínka jest, aby rovnice differenciálná byla tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x)\,\Phi_1(y) + \dots + \varphi_{n-1}(x)\,\Phi_{n-1}(y).$$

Tato podmínka jest postačující jenom v tom případě, když $n = 2$. Tímto případem se Weyr nejprve zabývá, tu v rovnici differenciálné příslušné dle právě napsaného výsledku lze proměnné separovati a vztah

$$\mu(y_1, y_2) = \text{Const.}$$

má vždy tvar

$$\psi(y_1) - \psi(y_2) = \text{Const.}$$

a naopak kdykoliv dva libovolné partikulární integrály některé rovnice vyhovují této relaci, vždy lze proměnné separovati a tak onu rovnici na kvadratury převésti. Užitečnost této poznámky vyložena na několika zajímavých geometrických příkladech. Plyne však z toho i dále: Jestliže možno z rovnice differenciálné odvoditi vztah tvaru

$$\nu(y_1, y_2, x) = C$$

mezi každými dvěma partikulárnými integrály a neodvisle proměnnou x (kteréžto vztahy vždy existují), a lze-li tomuto vztahu dáti tvar

$$F(f(y_1, x), f(y_2, x)) = C,$$

tu postačí použití substituce $f(y, x) = \eta$, abychom danou rovnici převedli na rovnici, ve které možno proměnné separovati.

Při rovnici lineárné jest provedení této methody zcela snadné. Weyr bere v úvahu mimo tuto ještě rovnici

$$f(x, y)\, dy + [\varphi(x, y) + R(x)]\, dx = o$$

a vyšetřuje, jak voliti $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, aby právě vylíčená cesta vedla snadno k cíli. Nachází pak pro tyto funkce výrazy:

$$f(x, y) = UF'(y) + V\Phi'(y),$$
$$\varphi(x, y) = PF(y) + Q\Phi(y),$$

kde U, V, P, Q jsou funkce x vázané podmínkou

$$QU - PV = UV' - U'V.$$

Převedení pak uvedené rovnice differenciálné na kvadratury jest za těchto podmínek ve spise Weyrově provedeno způsobem svrchu naznačeným. Jakožto jeden specielní případ její lze uvésti rovnici, kterou zabýval se Abel (Oeuvres complètes, 1. vyd., sv. II., str. 236 a násl.):

$$(s + y)\frac{dy}{dx} + (ry^2 + qy + p) = 0,$$

při čemž pro p, q, r, s funkce to x platí

$$q - 2rs - \frac{ds}{dx} = 0.$$

V jiném odstavci zabývá se Weyr případem $n = 3$ a dospívá k tomuto výsledku: Jestliže jest mezi třemi partikulárnými integrály rovnice differenciálné prvního řádu vztah tvaru

$$\mu(y_1, y_2, y_3) = C,$$

tak lze rovnici differenciálnou substitucí $Y(y) = \eta$ přeměniti na rovnici lineárnou

$$\frac{dy}{dx} = \eta\varphi(x) + \psi(x)$$

a zmíněnou relaci současně převésti na tvar

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1} = C.$$

Nejobecnější rovnice differenciálná žádaného druhu jest tudíž

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(y)}{Y'(y)}\varphi(x) + \frac{1}{Y'(y)}\psi(x);$$

relaci pak mezi každými třemi partikulárnými (různými) integrály vždy lze upraviti v rovnici

$$\frac{Y(y_2) - Y(y_1)}{Y(y_3) - Y(y_1)} = C.$$

Pro $n = 4$ jest vyšetřen nejprve jednoduchý jeden typ rovnic differenciálných prvního řádu a to tak zvaná rovnice Riccatiova:

$$\frac{dy}{dx} + Ly^2 + My + N = 0,$$

kde L, M, N jsou funkce x a *odvozena tu poprvé základní věta pro theorii těchto rovnic*, že totiž mezi čtyřmi partikulárnými integrály této rovnice jest vztah:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = C,$$

z čehož pak snadno plyne, že obecný integrál Riccatiovy rovnice má tvar

$$y = \frac{Cf_1(x) + f_2(x)}{Cf_3(x) + f_4(x)}$$

a že tudíž veškeré singularity integrálu té rovnice vyjma póly jsou pevny.

Jak známo jest Riccatiova rovnice jediná z rovnic prvního řádu mající tuto vlastnost, následkem čehož vysvítá veliká důležitost její pro nauku o rovnicích diff. 1. ř.; a má tudíž věta Weyrova nahoře vytčená zvláštní význam. Weyr byl si také vědom, jak z jednoho místa práce jeho plyne, důležitosti nalezeného výsledku.

Konečně vyšetřovány jsou rovnice diff., jež lze substitucí na rovnici Riccatiovu převésti a ukázáno zvláště, že takovou jest rovnice:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-B(u)}{x-A(u)},$$

kde $A(u)$, $B(u)$ jsou funkce veličiny u dané rovnici

$$xp(u)+yq(u)+r(u)=0,$$

$p(u)$, $q(u)$, $r(u)$ jsou rovněž libovolné funkce u. Tak na př. omezíme-li se na ten případ, že v rovnici diff. $f(x, y, \frac{dy}{dx})=0$ se vyskytují x, y racionálně celistvě a v druhém stupni jest příslušná rovnice diff., již lze na Riccatiovu převésti, a tudíž, známe-li jeden partikulární integrál její, pomocí kvadratur integrovati, tvaru

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\psi\left(\frac{dy}{dx}\right)+\chi\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=0.$$

Ze zajímavých geometrických upotřebení rovnice Riccatiovy Weyrem vyšetřovaných budiž uvedeno stanovení asymptotických čar na přímkových plochách a konformní zobrazení trojosého ellipsoidu.

IV.

Z theorie funkcí uvésti jest nejprve práce jeho vztahující se k nauce *o funkcích a integrálech elliptických*. Tu jmenovati jest zvláště jeho pojednání [25.] (anebo jeho český překlad [33.]), ve kterémžto vyšetřuje z počátku hodnoty integrálu

$$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

kde k reálné, dle přímočarých čar integračních z bodu o vycházejících a ukazuje způsobem zcela elementárným, že hodnoty ty vyplňují určitý rovnoběžník o stranách rovnoběžných s osami čísel reálných a ryze imaginárných. Hodnoty pak integrálu tohoto pro jakékoliv čáry integrační jak i průběh dvojperiodických funkcí $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$*) a dvojperiodičnost těchto funkcí velmi snadno z toho vyplývají.

S tímto pojednáním souvisí poněkud [67.], kde stanovena hodnota integrálu

$$\int_{o}^{x} \frac{k^2 sna\, cna\, dna\, sn^2 x}{1 - k^2 sn^2 a\, sn^2 x}\, dx = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(x-a)}{(\Theta x + a)}$$

pro přímočaré čáry integrační, jednak spojující body o, K, jednak body K, $K + iK'$. Toto stanovení provedl Weyr tím, že poměr thetafunkcí za znaménkem logarithmickým na pravé straně se vyskytující nahradil známým způsobem jednoduchým nekonečným součinem a vyšetřoval změnu argumentů jednotlivých činitelů (čísel to komplexních), když proměnná x probíhá integrační čáru. Tím dospěl novou methodou k výsledkům, jež dříve Hermite našel (Compt. R. sv. 94.).

V kratičké práci [61.] zjednodušuje Weyr jeden výsledek Hermitův (týž rok v Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. 2., pod týmž titulem uveřejněný); zjednodušení to spočívá v zevšeobecnění. Dospívá tu pro funkci $F(z)$ dvojperiodickou a nemající v rovnoběžníku period žádných singulárných bodů vyjma jednoduché póly v bodech α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ o residuech A_1, $A_2, \ldots A_n$ k tomuto rozkladu ve zlomky částečné

$$F(z) = \text{const.} + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \frac{A_h f'(\alpha_h) + A_h f'(z)}{f(z) - f(\alpha_h)},$$

při čemž jest $f(z)$ jakákoliv funkce dvojperiodická druhého řádu (s dvěma póly anebo s jedním pólem dvojným v rovnoběžníku period a o týchž periodách jako $F(z)$). Obšírněji o rozkladu funkcí dvojperiodických pojednává Weyr v [74.] a o užití Liouvilleovy věty v [71.].

Na tomto místě lze i vytknouti [60.] týkající se důkazu rovnosti dvou nekonečných součinů pro $\cos x$, jakož i rozkladu

*) Ponechávám tu, jakož i v následujícím označení užitého v příslušném pojednání.

funkce $\frac{1}{\cos x}$ ve zlomky částečné. I tyto poznámky byly vyvolány článkem Hermitovým.

S naukou o *funkci gamma* souvisí práce [75.], [70.] a [73.]. V prvé z nich sestrojuje funkci $\varphi(x)$ reálné proměnné x, konečnou pro všecka x, spojitou pro všecky irracionálné hodnoty x, pro racionálné x však jen z prava spojitou, vzhledem k záporným přírůstkům nespojitou. Při této funkci jest pak pozoruhodno, že rozdíl $\varphi(x - 0) - \varphi(x)$ lze vyčísliti v zakončeném tvaru, což při funkcích sestrojených pomocí Hankelova principu kondensace singularit se nevyskytuje. Weyrova funkce jest dána řadou

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n + n_0} \right\},$$

kde n_0 jest definováno vztahy:

$$-n + \lambda x = n_0, \qquad 0 \leqq n_0 < x, \qquad \lambda \text{ celé.}$$

Když x číslo racionálné lze tuto funkci v zakončeném tvaru vyčísliti a rovněž i rozdíl $\varphi(x) - \varphi(x - 0)$, a to pomocí funkce

$$\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx}$$

a tudíž dle známých výsledků Gaussových pomocí logarithmických a goniometrických funkcí. Prostřednictvím této funkce děje se též v [70.] vyjádření součtu nekonečných řad, jichž členové jsou racionálné funkce indexu v ukončeném tvaru, o kteréžto práci, jakož i o [73.] úzce s ní příbuzné netřeba se mi šířeji zmiňovati, jelikož jsou obsaženy v Časopisu a tudíž čtenářům jeho známy.

Jakožto *applikaci řady Taylorovy* uvésti jest [11.], kde dokázána věta: Jestliže derivace nějaké funkce $f(x)$ po sobě následující tvoří řadu arithmetickou m-tého stupně pro některou zvláštní hodnotu proměnné $x = a$, jest tomu tak pro každou hodnotu proměnné x; t. j. derivace $f'(x)$, $f''(x)$, ... jsou po sobě jdoucí členy řady arithmetické m-tého stupně. Je-li δ m-tá difference řady $f'(a)$, $f''(a)$, ..., jest δe^{x-a} m-tá difference řady $f'(x)$, $f''(x)$, ... V dalším pak převedeno jest stanovení takovýchto funkcí na řešení rovnice lineárné s konstantními koefficienty, z čehož jako důsledek plyne, že součet řady

$$u_0 + u_1 \frac{x}{1!} + u_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

kde $u_1, u_2, \ldots$ jest arithmetická řada m-tého stupně, lze psáti ve tvaru

$$c + c_0 e^x + c_1 x e^x + \ldots + c_m x^m e^x.$$

Reprodukce těchto úvah jest obsažena ve práci [23.] věnované především stanovení součtu řad rekurrentních:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

v nichž koefficienty tvoří řadu arithmetickou m-tého stupně.

Z obecné nauky o řadách dokázal v [59.] tuto poučku: Jestliže jest

$$\sum_1^\infty a_\nu$$

řada konvergentní (a_ν jsou čísla obecně komplexní) a $\sum\limits_1^\infty b_\nu$ jakákoliv řada konvergentní s kladnými členy, můžeme neměníce pořádek členů seskupiti členy řady prvé tak, že u řady tak vzniklé

$$\sum_1^{m_1-1} a_\nu + \sum_{m_1}^{m_2-1} a_\nu + \sum_{m_2}^{m_3-1} a_\nu + \ldots$$

jest

$$\left|\sum_{m_1}^{m_2-1} a_\nu\right| < b_1, \qquad \left|\sum_{m_2}^{m_3-1} a_\nu\right| < b_2, \ldots.$$

Při tom jsou ovšem $m_1, m_2, \ldots$ čísla kladná celistvá (a konečná). Z toho na př. plyne, že v každé řadě konvergentní můžeme seskupiti členy tak, že nová řada jest absolutně konvergentní. Podobně dokazuje Weyr tamtéž, že v každé řadě s kladnými členy seskupiti lze členy tak, že v nové řadě poměr dvou členů po sobě následujících $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ jest stále menší než kladné číslo $q < 1$ libovolně volené.*)

Z algebry a nauky o číslech vytknouti jest [42.] a [40.]. V poslední z těchto prací podán jest důkaz, že číslo

$$p^{\nu} - \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1}} + \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1 q_2}} - \dots$$

jest dělitelno ν. Při tom jest $\nu = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots$, kde $q_1, q_2, \dots$ jsou prvočísla a p jakékoliv číslo.

V.

Ještě jest mi upozorniti na četné práce Weyrovy, jichž hlavním úkolem jest seznamovati české publikum mathematické a hlavně studující mathematiky s novými pracemi a methodami mathematickými anebo konečně s věcmi málo u nás známými; znalť Weyr z různých veřejných svých působení četné nedostatky české literatury mathematické. V té příčině uvádím různé drobné zprávy ve zprávách jednoty a v Časopise pro pěst. m. a f., na pojednání jednající o rozboru rovnic kvadratických mezi 2, 3 proměnnými, na pojednání [71.], [74.] z nauky o funkcích elliptických, na článek [50.], [43.] a j. Nepotřebuji snad ani zvlášť vytýkati, že tyto práce vynikají vesměs jasným podáním, obvyklou u Weyra přesností a konečně, jak nelze si ani jinak mysliti při muži ducha tak vynikajícího, že obsahují četné cenné příspěvky k věci samé.

Ku konci pak jest ještě referovati o literární činnosti Weyrově, jež souvisí úzce s pracemi právě vytčenými a co

*) Tím dána odpověď na otázku nadhozenou A. Gutzmerem v článku „Sur une série considerée par M. Lerch“ uveřejněném v témž svazku Journal de sciencias m. e astr. na str. 33., kde se praví: „Il serait donc très intéressant d'avoir une série convergente à termes positifs, tel que pour un nombre infini de valeurs de ν, le quotient $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ soit supérieur à l'unité et que cette qualité ne se perde pas à une transformation quelconque.“

nejtěsněji s jeho činností učitelskou, o jeho učebnicích (analyse). Tu nejprvé uvésti jest jeho lithografované přednášky z techniky [68.], [72.] které byly sice vydány pouze pro posluchače Weyrovy, avšak našly i jinde hojného rozšíření pro své vynikající vlastnosti.*) Než omezím se při svém referátu na knihu „Počet differenciálný", již Weyr sepsal na vyzvání výboru Jednoty českých mathematiků, a jejímž pokračováním měl býti počet integrálný.

Že Weyr byl nad jiné povolaný učebnici o analysi psát, o tom snad v nikom nevznikla pochybnost, vysvítá to také z předcházejícího, kde jsem bez nadsazování hleděl vylíčiti zásluhy jeho v analysi.**)

O úkolu své knihy napsal Weyr v předmluvě: „Přihlížeje k tomu, že počet infinitesimálný jest ovládán pojmem limity, snažil jsem se, abych objasněním tohoto a pojmů s ním souvisících, t. pojmů meze spojitosti, derivace, differenciálu a j. zmírnil obtíže, jež se začátečníkům staví v cestu při prvním studiu vyšší mathematiky." Tomuto účelu svému kniha veskrze vyhovuje a přes to zůstávají definice i důkazy vět přesnými. Výběr látky, při němž byl Weyr značně omezen malým rozsahem knihy, jest zcela vhodný a soustavně uspořádaný. Ostatně poukazuji ku posudku této knihy od M. Lercha, professora na universitě ve Frýburku (švýcarském),***) jenž tam vyslovuje své přesvědčení, že W. počet differenciálný jest „kniha velmi dobrá a také velmi užitečná". Tento posudek Lerchův vyvolán byl spiskem Dr. J. V. Pexidra, „P. dv. r. prof. Ed. Weyra Počet differenciálný", na nějž, jakož i na odpověď Weyrovu [92.], ve které výtky učiněné byly, nehledíme-li ku tiskovým chybám a nedopatřením drobným, jakých sotva která kniha úplně jest prosta, vesměs vyvráceny, rovněž vzat v posudku onom zřetel. O spisku

*) Viz o těchto přednáškách obšírnou zprávu v Čas. pro pěst. m. a f. ročník 21. str. 254., ročník 22. str. 45., ročník 28. str. 46.

**) Různé učebnice analyse cizojazyčné reprodukují z Weyrových článků různé úvahy, tak na př. Hermite, Cours de la faculté des sciences, 4. vyd., str. 90.; Hoüel, Cours de Calcul infinitesimal (viz předmluvu); Schlesinger, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen, 2. vyd. str. 64. a j.

***) Čas. pro pěst. math. a fys., sv. 32., str. 52.—56.

tom nebudu se zde šířiti,*) chci toliko v následujícím reagovati na jednu výtku, která se vyskytla též v listu denním.

Tu se totiž tvrdilo, jakoby autority z ciziny přisvědčily k tomu, že v knize Weyrově se předvádějí nové věci, které cizina už před 30 lety zavrhla. Toto tvrzení se týká ostatně jen *jedné* věci a to důkazu v § 14. „Differenciálného počtu“ o znázornění čísel irracionálných délkami. Jediné, co tu třeba rozhodnouti, jest zajisté jenom, zda ten důkaz jest správný či chybný, a je-li chybný, v čem spočívá chyba. K tomu pak není třeba, jako při důkazech mathematických vůbec, míti souhlasu autorit z ciziny.

Důkaz, o nějž jde, jest převedení věty, že každé irracio-

---

*) Uvedu jenom tři ukázky z oné vědecké kritiky. O § 36. Weyrovy knihy tvrdí se tučným tiskem, že „končí úžasnou vědeckou chybou“. Paragraf 36. jest však zcela správný, připustil to i p. kritik ve své Protiodpovědi a vysvětlil svoje dřívější tvrzení tím, že *v jeho* exempláru nachází se tisková chyba. Postačila tudíž pouhá tisková chyba p. kritikovi, aby mohl na 9 řádcích se rozpovídati o úžasné vědecké chybě.

Na str. 62. Počtu diff. učinil Weyr tento dodatek: „Jakož jsem ukázal (Journal de sciencias mathematicas e astronomicas, t. VIII. „Deux remarques relatives aux séries“), možno každou konvergující řadu $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ shrnutím po sobě jdoucích členů přetvořiti na absolutně konvergentní řadu o témž součtu, k čemuž zde budiž jen poukázáno.“ Při tom podotýkám, že zmíněná právě práce Weyrova, ve které uveřejnil dvě úzce příbuzné věty o řadách (viz o tom na str. 485. tohoto článku), cituje se u různých autorů (na př. nejnověji Césarova učebnice elementární analyse, jejíž německý překlad dle italského rukopisu nedávno — r. 1904 — byl vydán, uvádí ji na str. 139.). K tomu dodatku pak zcela místnému praví kritika: „Na 62. str. uvádí p. autor, že dokázal jistou větu o konvergentních řadách a že ji uveřejnil v Portugalsku. Věta tato nepřešla do encyklopaedie mathematiky, učebnice mathematické ji nevykládají, žádné upotřebení její není známo: má ceny?“

Jinde se uvádí, že u čísla e v knize Weyrově bylo uvedeno 15 desetinných míst v nepřehledném seskupení a hned při tom se poznamenává, že ve Studničkově knize bylo uveřejněno toto číslo s 225 místy. K tomu myslím, že není třeba žádného komentáře.

Jakou váhu mohou míti výtky, týkající se původnosti knihy mathematické v této kritice se vyskytující, to usoudí již na základě tří ukázek — zcela dobře „vědeckou kritiku“ v různých směrech charakterisujících — snadno soudný čtenář.

Záhadou zůstává mi ovšem, jak mohly (a mohou) vážné časopisy následkem *takové* kritiky stavěti se proti Weyrovi a jeho knize.

nálné číslo možno znázorniti délkou, na větu jinou, geometrickou, kterouž Weyr mlčky předpokládá. Jest to tato věta: Leží-li z nekonečné posloupnosti úseček konvergujících k nulle každá zcela uvnitř předcházející, pak jest jeden a jenom jeden bod, jenž jest uvnitř všech těchto úseček. Pakli tuto větu předpokládáme jako správnou, nelze nějakou zásadní nesprávnost Weyrovu důkazu vytýkati. Věta pak tato jako postulát jest skutečně také mathematiky přijímána a byl to Ascoli, který (r. 1895) tento postulát místo Cantorova navrhl.*)

Weyr tedy místo, aby, jak to jiní činí, opíral se mlčky o postulát Cantor-Dedekindův, předpokládá jiný postulát (Ascoliův, aneb aspoň tomuto zcela blízký). Namítnou snad někteří, že měl Weyr tuto větu uvésti a jako postulát vyznačiti — vzhledem k *novosti* věci. Že se však o tom mnoho nešířil a podobně, že nevykládal nauku o množinách (což mu rovněž bylo vytýkáno), to lze, máme-li na zřeteli svrchu vytčený úkol knihy, jenom schvalovati a jsou v tom četní vynikající mathematikové (tu jest souhlas autorit na místě) stejného smýšlení.**)

*) Viz o tom „Encyclopédie des sciences math.“ I. 1. str. 157. Není mi sice známo, v jakém smyslu pojímá Ascoli slovo „uvnitř“, zdali ve smyslu širším, kde ku bodům úsečky AB uvnitř ležícím počítají se též body A a B, či pojímá-li slovo to ve smyslu užším, avšak tato okolnost jest zcela nepodstatná; ve větě v textu uvedené jest bráti slovo uvnitř ve smyslu širším.

**) Viz na př. É. Picard: Sur le développement de l'analyse. Paris. 1905, jenž praví na str. 23.: „Nous rejoignons ici une École de Philosophie mathématique qui s'est brillamment développée depuis quelque trente ans, École qui se livre à une minutieuse analyse sur la nature du nombre. On ne peut s'empêcher d'être frappé de l'abondance des publications parues dans ces dernières années et se rapportant à cette Mathématique philosophique; elles sont bien en accord avec les tendances générales de l'époque où nous vivons et où l'esprit humain applique dans des direction variées une critique de plus en plus pénétrante. Ces spéculations raffinées ont même pénétré dans l'enseignement élémentaire, ce qui est, à mon avis, très regrettable.“

III. O Weyrově činnosti v geometrii.

Napsal J. Sobotka.

Byla-li vědecká činnost Weyrova vůbec neobvykle mnohostrannou, platí to o jeho činnosti v geometrii zvlášť. Weyr ovládal skoro všecky moderní methody zkoumání útvarů geometrických; s oblibou a lehkostí vnikal do moderních theorií a problemů, z nichž látku k novým problemům čerpal anebo které buďto řešil neb rozšířil, nebo konečně s nového stanoviska objasnil. Práce jeho vyznamenávají se velkou elegancí, přesností a bohatostí myšlének. Obsahem lze Weyrovu činnost literární rozděliti na tři období, jak z názvů prací jest zřejmo, z nichž první a třetí jest věnováno převážně geometrii, s níž činnost svoji začal a také skončil.

I.

Nejobsáhlejší práce věnovány jsou projektivní geometrii; v mnohých z nich s velkým zdarem a se zřejmou zálibou provádí úvahy infinitesimální.

Na prvním místě uvádím dílo (65), jednající *o theorii ploch*, obsahujících soustavu kuželoseček, o kterýchžto plochách jedná též práce (31).

Dílo to jest značným rozšířením studia geometrického v theorii ploch a sluší je považovati za hlavní, mistrovské dílo geometrické Weyrovo, v němž důmysl, přesnost a všestrannost, jmenovitě pokud se týče užívání prostředků a method zkoumání, jsou sloučeny. Uvažovány tu jsou ponejprv plochy, které vytvořiti lze obecně libovolným pohybem kuželosečky, která se může zároveň při pohybu libovolně měniti, tedy plochy obsahující soustavu kuželoseček. Obě práce (31), (65) jsou časově dosti daleko, totiž asi 13 let, od sebe vzdáleny, z čehož lze souditi, že v době té se autor s předmětem tím častěji zabýval. Výsledky prvé práce jsou v druhé zahrnuty, ale rozšířeny tak, že prvou lze považovati vzhledem k druhé jako předběžnou studii. Rozdíl jest tu především v methodě. V druhé práci totiž nejprve jsou vztahy a konstrukce provedeny zcela syntheticky, jak to povaze problemů konstruktivních jest přiměřenější; tu sluší v první řadě vytknouti přesné a elegantní provádění úvah infinitesimálních, které se tu skoro ustavičně vyskytují, cestou synthetickou, kdežto analytické odvození nabytých výsledků konstruktivních jest založeno na základech docela moderních, tvoříc o sobě zaokrouhlenou differenciální geometrii řečených ploch.

Uvažujeme-li plochu přímkovou, tu každá přímka její povrchová stanoví infinitesimální prvek plošský; každé rovině ve svazku, položeném takovou přímkou, přísluší projektivně bod na řadě bodové, která na přímce jest položena a naopak tak, že rovina vytčená jest rovinou tečnou plochy a příslušný bod na řadě přímé jest jejím bodem dotyku; v případě plochy rozvinutelné souvislost ta se zvrhne tím, že všem bodům, vyjma centrálnému, na přímce přísluší jediná rovina tečná, kdežto tomuto přísluší všecky roviny svazku řečeného. Obecně tedy jest takový proužek infinitesimálný, jak se o něm i v jiných pracích pojednává, zvláště v (88) dán, známe-li ve třech bodech přímky jej určující roviny tečné, plochy. Tento jednoduchý problém vede k obdobnému, ovšem mnohem složitějšímu problému při plochách kuželosečkových, který žádá uspořádání rovin tečných plochy v bodech jedné kuželosečky povrchové Σ. Tu dokázáno, že k stanovení infinitesimálního plošného elementu čili pruhu, omezeného tedy dvěma kuželosečkami na ploše nekonečné blízkými Σ, Σ_1 stačí, když vytkneme křivku Σ na ploše a tečné roviny plochy v sedmi bodech křivky té a jak potom lze lineárnou konstrukcí sestrojiti rovinu tečnou v libovolném jiném bodě plochy ležícím na Σ, jakož i přímku, v níž se roviny křivek Σ, Σ_1 sečou a která jest přímkou povrchovou pro plochu rozvinutelnou, obalenou rovinami všech kuželoseček Σ. Roviny tečné ve všech bodech na Σ obalují plochu rozvinutelnou čtvrté třídy, pro níž odvozeny tu rozmanité vlastnosti důležité pro konstrukci.

Dále zkoumány plochy přímkové, určené přímkou a dvěma kuželosečkami jakožto útvary řídícími a zkoumány zvláštní zde důležité polohy pro přímku řídící takové, aby vlastní plocha přímková byla stupně čtvrtého, načež uvažovány plochy vytvořené dvěma promětnými řadami bodovými, které položeny jsou na dvou kuželosečkách, při čemž plochy ty jsou tak vytvořené, aby obsahovaly tři dvojné přímky; úvahy provedeny tu jsou pomocí zvláštního vztahu kollineárného, jejž Weyr nazývá poloperspektivným*) a to k tomu cíli, aby mohl řešiti problém následující:

Dány jsou libovolné dvě kuželosečky $\Sigma\ \Sigma_1$; stanoviti dvě přímky tak, aby plocha přímková, mající přímky ty a jednu z kuželoseček za útvary řídící, obsahovala také kuželosečku druhou.

Tím dospívá pak k uspořádání rovin tečných ploch uvažovaných podél kuželosečky Σ, které jest obdobné, ovšem ale mnohem obecnější onomu při plochách zborcených. Máme-li na této infinitesimálný proužek stanovený dvěma přímkami soumeznými g, g', tu má proužek ten nekonečně mnoho přímek řídících. Můžeme totiž zvoliti libovolnou mimoběžku p ku přímce g v konečné vzdálenosti od ní se nalézající za jednu přímku řídící proužku řečeného; pak přímky p, g, g' stanoví hyperboloid dotyčný, jehož přímky jedné řady spojují body na g s průsečíky rovin tečných, bodům těm příslušných, s přímkou libovolně zvolenou p; za druhou přímku řídící lze zvoliti libovolnou přímku q hyperboloidu ku g mimoběžnou; vedeme-li libovolným bodem na g příčku ku p a q, stanoví tato v g rovinu tečnou. Při plochách kuželosečkových objevují se rovněž pro libovolný infinitesimální proužek dvojiny přímek řídících p, q, jež stejným způsobem slouží při sestrojování rovin tečných. Podány tu zajímavé konstrukce takových dvojin a uspořádání všech možných dvojin pro daný proužek, kteréžto dvojiny tvoří obecně plochu přímkovou 3. stupně, která se ve zvláštních případech může rozpadnouti; mají-li na př. Σ, Σ_1 jeden bod společný, rozpadá se v rovinu tečnou toho bodu a plochu 2. stupně; konečně poukázáno ku případu zvláštnímu, kde infinitesimálný pruh řídících přímek nepřipouští, v kterémžto případě ale uspořádání rovin tečných jest patrné.

Jiným problémem geometrie projektivní, též pro geometrii deskriptivní důležitým, zabýval se Weyr v pracích (37), (84), v nichž se zanáší konstrukcemi oskulačního hyperboloidu pro plochy zborcené, dané útvary řídícími a v práci (66), kde se hlavně zanáší týmž problémem pro plochu zborcenou, vytvořenou dvěma prométnými řadami křivými.

---

*) výraz ten nahrazuje vhodně příslušný výraz německý geschaarte Kollineation.

Konstrukci hyperboloidu, který oskuluje plochu zborcenou podél dané přímky její, provedl poprvé Mannheim*) způsobem kinematickým, a to pro případ, když plocha zborcená jest dána třemi křivkami řídícími. Ryze geometrické řešení problemu toho (37) uveřejnil Weyr téměř současně; řešení to založeno jest na větách: „Dotýkají-li se dva hyperboloidy podél přímky, tu se ve dvou bodech této přímky oskulují, a sice v oněch, jimiž procházejí další dvě přímky oběma hyperboloidům společné.“ „Dotýkají-li se dva hyperboloidy podél přímky a pronikají-li rovinu, vedenou bodem této přímky, ve dvou kuželosečkách, jež se v tomto bodě oskulují, tu prochází tímto bodem další, oběma hyperboloidům společná přímka.“

Je-li dána plocha zborcená třemi křivkami řídícími, jež protíná přímka g plochy v bodech A, B, resp. C, tu pomocí řečených vět lze snadno dokázati, že všechny hyperboloidy, které se plochy podél g dotýkají a jejichž křivky průsečné s rovinami oskulačními dvou z křivek řídících tyto v bodech na g oskulují, na př. první dvě v bodech A a B, tvoří zvláštní svazek hyperboloidů. Ve svazku nachází se pak jeden hyperboloid, který seče rovinu oskulační třetí křivky řídící v kuželosečce, oskulující křivku tu v bodě C. Hyperboloid ten jest žádaným hyperboloidem oskulačním. Tím jest rázem úloha řešena, ale konstrukce ta jest kvadratická, žádajíc sestrojení společného páru dvou soumístných involucí bodových. Autor provádí tu hezkou úvahu, jíž se tomu odpomůže, čímž konstrukce dochází zároveň zjednodušení.

Dále uvedená konstrukce pro případ, že je zborcená plocha dána dvěma přímkami řídícími a když přímky její se dané plochy dotýkají. Tu všechny případy zde se vyskytující vyvozují se ze zvláštního jednoduchého případu, kdy plocha zborcená jest dána dvěma přímkami a_1, a_2 řídícími a kuželem 2. stupně o vrcholi S, jehož se přímky plochy dotýkají. Protíná-li libovolná plošná přímka g přímky řídící v bodech A_1, A_2 a dotýká-li se kužele v bodě A, tu lze kužel nahraditi jiným, který ho podél SA oskuluje a se rovin Sa_1, Sa_2 dotýká; pak zborcená plocha přechází přímo v hledaný hyperboloid oskulační H; jeho druhá

*) Cours de Geóm. descriptive de l'Ecole Polyt. Paris 1880.

přímka jest od g harmonicky oddělena přímkou SA a rovinou polární bodu S vzhledem k H.

Konstrukce ty selhou, jsou-li dvě z daných křivek řídících nekonečně blízkými. Plocha zborcená jest tedy stanovena (84) křivkou Σ na nějaké ploše Π a křivkou řídící Σ_1. Každá přímka plochy zborcené leží tedy v rovině tečné plochy Π v bodě některém na Σ ležícím a spojuje bod ten s bodem, v němž rovina zmíněná seče Σ_1.

Zase konstrukce založeny jsou na zvláštním případu, kdy Π jest kuželem 2. stupně, Σ kuželosečkou na něm a Σ_1 přímkou, a konstrukce se převedou na ony v práci první odvozené, při čemž nutno nejprve sestrojiti nějaký hyperboloid, který se plochy zborcené podél g dotýká. K tomu účeli ovšem případ obecný se převede bezprostředně na vytčený případ speciální, poněvadž lze křivku Σ_1 přímo nahraditi tečnou její v bodě na g ležícím. Přímka ku g harmonická vzhledem k SA a k tečně ku Σ v bodě t jest druhá hlavní tečna zborcené plochy. Všecky hyperboloidy, dotýkající se zborcené plochy podél g a procházející přímkou t, jež zároveň oskulují Σ_1, v bodě na g ležícím tvoří svazek, jemuž též hyperboloid oskulační přináleží, který se dle toho nyní sestrojí dle týchž zásad jako v (37).

Ku konci pak projednán případ, kdy dané dvě nekonečně blízké křivky řídící jsou přímkami a dán podnět k řešení úlohy, když veškeré tři přímky řídící jsou soumeznými.

Sem se řadí též pojednání (66), kterým se zároveň podstatně rozšiřují jisté úvahy Schröterem provedené v jedné práci o výtvarech křivých útvarů promětných*), jenž bral pouze zřetel ku sestrojení bodů dotyčných a tečen útvarů vytvořených způsobem v nadpisu práce této vytčeným.

Zde především převeden problém na případ projektivných řad ležících na kuželosečkách, které se považují za průměty dvou kuželoseček v prostoru libovolně položených, čímž autor konstrukce kladené převádí na řešení problému následujícího:

Na dvou kuželosečkách Σ, Σ', položených v různých rovinách ϱ, ϱ', jsou dány dvě řady bodové promětné A, B, $C\ldots$;

*) Crelle-ův Journal sv. 54. (Ueber Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde).

A', B', C'...; sestrojiti jest oskulační hyperboloid podél přímky AA' oné plochy Π, jejíž přímky spojují příslušné si prvky obou řad.

Problém ten lze arciť mnohotvárnými způsoby provésti. Způsob, jímž řešení to se zde provádí, jest velice elegantní. Nejprv se tu sestrojí hyperboloid, který se plochy Π podél AA' dotýká, tím, že se řady na kuželosečkách Σ, Σ' ležící promítnou na tečny jejich v bodech A, A'.

Konstrukce oskulačního hyperboloidu zakládá se na větě, že lze Σ nahraditi libovolnou kuželosečkou Σ_1 ji v A oskulující, když řadu A, B, C... nahradíme průmětem jejím A_1, B_1, C_1... na Σ_1 z bodu X, jenž jest ještě společný křivkám Σ, Σ_1. Obdobně tak lze nahraditi Σ' kuželosečkou Σ'_1.

Především nahraženy tu kuželosečky Σ, Σ' kuželosečkami Σ_1, Σ_1', které se přímky $\overline{\varrho\varrho'}$ dotýkají, čímž umožněno sestrojiti průsečnici roviny tečné plochy Π v bodě A a její roviny tečné v bodě ku A na Σ nekonečně blízkém; tím jest pak také druhá přímka oskulačního hyperboloidu procházející bodem A pomocí theoremu Dupinova stanovena. Touž cestou stanoví se i přímka druhá jeho, procházející bodem A'. Všechny hyperboloidy, které se Π podél AA' dotýkají a právě stanovené 2 přímky obsahují, tvoří svazek. Sestrojení oskulačního hyperboloidu v tomto svazku použitím shora vytknuté věty pomocné jest nejzajímavějším bodem krásné práce této. Ku konci podáno zjednodušení pro případ, že jedna z řad bodových Σ leží na přímce.

Ve všech třech pracích právě uvedených zbudovány konstrukce na studiu elementu plošného plochy zborcené, vzatého podél určité přímky plochy. Elementem tím stanovena jest rovina tečná plochy v každém bodě vytčené přímky. Studiu tomu věnována též práce (88), v níž uvažovány dva takové plošné elementy přímočaré, jejichž nositelkami jsou dvě přímky P, Q se protínající. Mají-li elementy tyto rovinu PQ za společnou rovinu tečnou, tu by měly určovati dle obecných zásad plochu 2. stupně. Avšak autor přichází k tomu zajímavému výsledku, že tomu obecně tak není; plocha 2. stupně jimi určená se totiž zvrhne na rovinu PQ. Aby dva takové elementy ploské ležely na ploše 2. stupně, musí býti mezi nimi určitý vztah, který tu odvozen ve formě relace vztahující se k centrálným bodům a parametrům distribučním obou elementů. Panuje-li vztah ten, pak ale lze oběma ploskými elementy proložiti celý svazek ploch 2. stupně.

Ve dvou pracích zanáší se Weyr kvadratickými příbuznostmi; první z nich (2), již psal jako posluchač, dává úplnou analytickou theorii kvadratické příbuznosti, kdežto v druhé (89) řeší pomocí kvadratických příbuzností synthetický důležitý problém konstruktivní, jehož řešení také již v (2) naznačuje.

V první z těchto zabývá se příbuzností, již nejprve Th. Reye jakožto kvadratickou příbuznost cestou ryze geometrickou prozkoumal a jejíž důležitost na některých problemech konstruktivních ukázal.*) Weyr objasňuje příbuznost tu s nových hledisk, při čemž ovšem nabývá velkou část výsledků Reyeových a k tomu řadu jiných.

Příbuznost tu definována nejprv pro dvě pole S, Σ bodová nebo přímková tím způsobem, že vztah mezi homogenními souřadnicemi x, y, z libovolného prvku v poli jednom a souřadnicemi ξ, η, ζ příslušného prvku v poli druhém, jest sprostředkován rovnicemi linearními, takže každému prvku pole jednoho přísluší obecně jediný prvek pole druhého. Jest tedy přechod od pole jednoho k poli druhému dán obecně rovnicemi

$$xf_{11} + yf_{12} + zf_{13} = 0 \quad (1) \qquad xf_{21} + yf_{22} + zf_{23} = 0, \quad (2)$$

v nichž jest

$$f_{1j} \equiv a_{1j}\xi + b_{1j}\eta + c_{1j}\xi, \qquad f_{2j} \equiv a_{2j}\xi + b_{2j}\eta + c_{2j}\xi.$$

Vztahy ty dají se přenésti také na svazek prostorový; které z těchto základních útvarů druhořadých chceme uvažovati, záleží toliko na interpretaci příslušných rovnic, takže se zkoumání může omeziti toliko na dvě pole bodová. Podmínka, aby byla rovnicemi (1), (2) vůbec příbuznost nějaká dána, jest ta, že musí býti na sobě nezávislé, z čehož plyne, že příbuznost ta jest určena, když udáme 7 párů sobě příslušných bodů.

Obecně jednomu bodu $\xi\eta\zeta$ v Σ přísluší zase jeden bod xyz v S; volíme-li ale $\xi\eta\zeta$ tak, aby se součinitelé obou rovnic (1), (2) lišili jen o stálý faktor, pak se redukují na jednu, která

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI.

jest linearní a praví, že takto zvolenému bodu $\xi\eta\zeta$ v Σ všechny body na jedné přímce v S přísluší.

Dokáže se pak, že stávají tři soustavy hodnot ξ, η, ζ takových; tedy jsou 3 body v Σ, jimž příslušejí 3 přímky v S; prvky ty zovou se body hlavními a přímkami hlavními.

Body hlavní pole leží k přímkám hlavním téhož pole tak, že každý bod hlavní jest průsečíkem dvou přímek hlavních. Ukázáno, že udání jednoho bodu hlavního a příslušné přímky hlavní jest rovnocenné s udáním dvou párů příslušných sobě bodů.

Dále uvažuje se, zda-li kubická rovnice stanovící parametry tří bodů hlavních má 3 realní kořeny anebo jen jeden realní kořen. V prvém případě jest trojúhelník hlavní realní a příbuznost jest ona, s níž se zabýval dříve Seydewitz; v druhém případě obsahuje každé pole dva sdružené imaginární body hlavní, jimž přísluší dvě sdružené imaginární přímky hlavní a sice jest realná spojnice oněch a realní průsečík těchto hlavním prvkem transformace.

Dále zkoumány křivky, které mohou křivce stupně *n*. příslušeti a odvozovány příbuznosti reciproké; totiž ku rovině Σ lze rovinu S na nekonečné mnoho způsobů vztahovati pomocí reciprocity tak, že všechny přímky, které ve vztazích těch libovolnému bodu v Σ přísluší, protínají se v bodě příslušícím bodu vytčenému pomocí jednoznačné příbuznosti, čímž právě dochází k téže konstrukci příbuznosti, již Reye vyvodil. Pak předpokládá, že obě pole jsou soumístná a zkoumá zvláště, kdy příbuznost se stává involutorní, v kterémžto případě pak jest stanovena čtyřmi páry příslušných sobě bodů a dovozuje, že to jest příbuznost sdružených bodů vzhledem ke svazku kuželoseček. Konečně uvedeny jsou applikace na konstrukci křivek racionalných jmenovitě 4. stupně.

Prob. homografie (89) vytknul Chasles; s jeho řešením se zabývala celá řada znamenitých geometrů: Jonquières, Hesse, Reye, Hirst s R. Sturmem*) a Küpper. Jedná se o to: V rovině dány jsou dvě skupiny bodů po sedmi, jež si v určitém pořádkn

*) 1. Das Problem der Projektivität u. seine Anwendung auf die Flächen. 2. Grades. Math. Ann. Bd. I.

přísluší; proložiti jimi dva promětné svazky přímek. Řešení problemu toho provedeno obecným způsobem novým, jehož lze užiti též na všechny případy zvláštní, které se zde mohou vyskytnouti, pomocí jisté transformace Cremonovy, jež rozložena jest na tři kvadratické transformace po sobě jdoucí a vede ke třem řešením vytčeného problému, z nichž alespoň jedno jest reálné. Řešení to se tu pak převádí na stanovení zbývajících tří bodů společných dvěma křivkám třetího stupně, které procházejí těmitéž šesti známými body, když pro každou z křivek těch dány jsou ještě další tři body. Tu lze stanoviti dvě kuželosečky o společném jednom bodě daném, které se ještě v žádaných třech bodech protínají. Dále ukázáno jakým způsobem problem homografie se rozkládá na jeden problém kvadratický a jeden lineární, když v prvé skupině sedmi bodů možno vytknouti pět bodů, k nimž příslušné body skupiny druhé lze vztahovati kollineárně. Lze-li v daných skupinách dvakráte pět bodů vztahovati k sobě kollineárně, tu rozpadne se problém řešený na tři problémy lineárné, což zde vše z řešení obecného jest vyvozeno.

K pojednáním (6), (7), (10) zavdaly podnět zvláštní, velmi zajímavé věty o křivkách 3. stupně, jež Steiner uvedl bez důkazu a pro něž podal Weyr důkazy geometrické. V (6) jde o důkaz věty, která praví, že křivka 3. stupně má obecně 27 takových bodů, v nichž lze sestrojiti kuželosečku, která se jí šestibodově dotýká; z těchto bodů, které jednoduše souvisí s body inflekčními křivky, jest 9 reálných, 18 imaginárných. Pojednání (7) vztahuje se k větám o mnohoúhelnících určitým způsobem křivce 3. stupně vepsaným o konečném počtu stran a obsahuje, rovněž jako (10) důležité rozšíření vztahu promětných ve smyslu Chaslesově. Věty Steinerovy, o nichž se zde jedná, lze takto vysloviti:

Zvolíme-li na křivce 3. stupně libovolné dva body P, Q za pevné, a další libovolný bod A, vedeme-li dále přímku PA, která křivku protne po třetí v bodě B, vedeme-li na to přímku QB, která seče křivku po třetí v bodě C, spojíme-li pak C opět s P a pokračujeme-li způsobem tím dále, vznikne takto mnohoúhelník $ABC\ldots$ křivce vepsaný, jehož po sobě jdoucí strany střídavě směřují k bodům P a Q, kterýžto mnohoúhelník se *1.* nikdy neuzavře, byť bychom konstrukci uvedenou sebe déle opakovali, 2. uzavírá a pak má sudý počet stran.

V případě druhém platí věta:

Uzavře-li se jednou takový mnohoúhelník, uzavře se pokaždé a má vždy týž počet stran ať již první vrchol jeho A zvolíme kdekoliv na křivce. To platí též o křivce 4. stupně, která má body P, Q za body dvojné.

Jsou to problémy, které v pozdější době byly různými způsoby řešeny a rozmanitě rozšířeny a které podržely původní svůj název „Schliessungsprobleme". Weyr podává tu odvození geometrické vět těch na základě příbuznosti (2, 2) značné dvou promětných útvarů soumístných, dané tedy rovnicí

$$x^2 (A\xi^2 + B\xi + C) + x (A'\xi + B'\xi + C') + A''\xi^2 + B''\xi + C'' = 0,$$

jejichž základní vlastnosti zkoumá a pomocí nichž zkoumá skupiny paprskové, které při uvedené konstrukci vznikají kolem bodů P a Q. Každým novým $2n$ uhelníkem vepsaným vznikají nové takové skupiny; skupiny kolem P tvoří pak involuci paprskovou n. stupně a rovněž skupiny kolem Q tvoří takovou involuci. Obě involuce vytvoří křivku mající danou křivku 3. stupně za jednu část, z čehož pak správnost věty vysvítá. Konečně jsou tu věty Steinerovy přeneseny na křivku průsečnou dvou ploch zborcených 2. stupně.

Rovněž poslední práce Weyrova vůbec, která jedná o problému normál, vrací se ke Steinerovi.

Paty normál z bodu p uvažují se zde dle Steinera jako průsečíky dané ellipsy E s ellipsou $E + \delta E$, do níž E přechází nekonečně malým otočením kolem bodu p. Na základě tohoto otočení vyšetřuje Weyr společný polární trojúhelník ellips E, $E + \delta E$, jakož i svazek křivek jimi stanovený, v němž takto zjištěny dvě paraboly, jejichž osy mají směry sdružených průměrů v E, a současně i hyperbola Apollonická. Pro hyperbolu tu odvozena dále na základě řečeného otočení též známá její konstrukce a odvozeno konečně touž cestou kvadratické řešení problému normál pro body, které leží na průměrech kolmých k stejným průměrům sdruženým.[1])

[1]) O rozkladu problému normál v úlohy kvadratické podal v r. 1887 K. Pelz zajímavé pojednání v cís. akademii vídeňské, které zavdalo podnět k celé radě prací problému toho se týkajících.

Těžiště pojednání (5), (15), (21) leží v odvozování vztahů útvarů prostorových k absolutním útvarům v nekonečnu.

V (5) vyhledávají se nejprv společné dvojice příslušných sobě prvků pro dvě dvojice prométných řad bodových soumístných vůbec a zvláště pak, když jedna dvojice prométných řad přechází v involuci a stanoví podmínku projektivní pro to, aby dvě kuželosečky v rovině byly podobné a sestrojuje kuželosečky, které procházejí čtyřmi body a jsou dané kuželosečce podobny. Konečně studuje onu řadu kuželoseček podobných, které třemi pevnými body procházejí, jakož i křivku, kterou řada ta obaluje; konstrukce ty a důkazy vět příslušných jsou zde v úzké souvislosti s oněmi, které uvádí Steiner ve svém spise Systematische Entwickelung...*) a provedeny jsou opět pomocí kvadratické příbuznosti, o níž jedná práce (2).

Krátké pojednání (21) obsahuje větu a synthetický důkaz její, že všechny povrchové přímky plochy zborcené, které protínají nekonečně vzdálenou imaginární kružnici, dotýkají se jejich křivek křivoznačných, takže pro každou plochu zborcenou, která prochází kruhem tím, obě soustavy křivek křivoznačných splývají s přímkami povrchovými plochy.

Zvláštního povšimnutí zasluhuje pojednání (15).

Na základě výrazu pro dvojpoměr, který určují ve svazku přímek libovolné dvě přímky, uzavírající mezi sebou úhel φ, s přímkami isotropickými svazku, odvozena tu formule pro úhel, který libovolně dvě roviny v konečnu spolu uzavírají, obdobným způsobem pomocí dvojpoměru, který stanoví dané dvě roviny s rovinami kladenými společnou přímkou jejich tak, aby se dotýkaly imaginárné kružnice v nekonečnu, čímž si jednoduchým přechodem zjedná výraz pro dvojpoměr určený tečnami z daného bodu x v rovině dvou kuželoseček obsaženého ke kuželosečkám těm vedených. Přechod ten pro svou zajímavost zde budiž uveden. Rovnice obecných dvou kuželoseček v rovině libovolně položených v obecných souřadnicích homogenních lze uvésti totiž, jak známo, na tvar

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad ax^2 + bz^2 + cz^2 = 0,$$

*) pp. 305, 251.

zvolíme-li společný trojúhelník polárný za trojúhelník souřadný a volíme-li vhodně bod jednotkový.

Rovnice tyto lze ale interpretovati jakožto rovnice pravoúhlé dvou kuželů o společném vrcholi v počátku soustavy položeném; tečnám z bodu daného souřadnicemi (x', y', z') ke zmíněným kuželosečkám příslušejí pak roviny tečné k oběma kuželům položené přímkou, která spojuje počátek soustavy s bodem o souřadnicích daných x', y', z'; první dvě roviny se ale dotýkají kružnice imaginárné v nekonečnu, čímž jest stanovení hledaného dvojpoměru převedeno na problém prve řečený. Zároveň plyne tu snadno rovnice křivky čtvrtého stupně, která jest geometrickým místem bodů, z nichž tečny vycházející k daným dvěma kuželosečkám stanoví dvojpoměr stálé hodnoty.

Konečně první práce Weyrova vůbec (1) zabývá se involucí, kterou stanoví svazek kuželoseček na kuželosečce procházející dvěma jeho body základními a provádí pomocí ní některé konstrukce, na př. ukazuje, kterak lze dvěma body položiti kuželosečku, která jinou danou v předepsaném bodě oskuluje.*)

II.

O algebraické theorii křivek prostorových jednají práce (14), (16), (17), (20).

Nejprve v (14) odvozuje pomocí křivek rovinných větu:

„Lze-li na algebraické křivce prostorové C, která není zvrhlou, vytknouti skupiny bodové, z nichž každá obsahuje λ bodů jakožto proměnlivé průsečíky křivky C s plochami stupně m. tak, že jest dovoleno jednu takovou skupinu libovolně zvoliti, pak jest λ větší nežli rod křivky.“

Při tom rodem křivky prostorové vyrozumívá se rod křivky, do níž se ona promítá do libovolné roviny.

Pak odvozuje se souvislost rodu s počtem zdánlivých bodů dvojných, takže tento lze bráti za základ klassifikace algebraických křivek prostorových.

Jelikož křivkou maximálního rodu, mající zároveň minimální počet zdánlivých dvojných bodů, lze vždy položiti plochu

*) Cf. Projektivná geometrie (87) pp. 145—150.

2. stupně, tu zkoumá Weyr nejprv křivky položené na plochách 2. stupně vůbec a kuželi zvlášť. Dále se zabývá křivkami, které nelze vyjádřiti jako řez úplný dvou ploch algebraických a jejichž vyšetřování na základě dvou rovnic právě proto je pak ztíženo tím, že zároveň nutno bráti v úvahu mimo křivky vytčené též křivky jiné, vyjadřující zbývající část proniku obou ploch. Úvahy se značně zjednoduší tenkráte, když se rovnicím křivku vyjadřujícím dá takový tvar, že řečený zbytek proniku jsou křivky co možná jednoduché, zvlášť pak, jak toho lze vždy docíliti, když to jsou samé přímky. Převodem tím se práce ta zevrubně zanáší. Zásad uvedených jest pak užito k odvození různých vlastností vztahujících se ke klassifikaci nejprve křivek stupně pátého, provedené Salmonem a Cayleym a k rozšíření jich na křivky 6. stupně.

Příslušné výsledky též v (16) a (17) uveřejněné jsou na uvedených základech samostatně odvozeny, i ty, k nimž Halphen*) před tím a Baule**) současně s Weyrem dospěli.

Druhy křivek těch vyjádřeny jsou příslušnými symboly pro třídu (2 . 3), (3), (2) podle toho, zdali jsou úplným pronikem plochy 3. stupně s plochou stupně druhého, nebo zdali mají tu vlastnost, že lze jimi položiti buď jedinou nebo nekonečné množství různých mocností ploch kubických a konečně, zdali jimi lze položiti plochu 2. stupně, při čemž jimi ale nelze položiti žádnou vlastní plochu kubickou. Při tom v každé třídě provedeno rozdělení další podle počtu zdánlivých bodů dvojných. Mimo to zkoumány jsou příslušnými rozvoji singularity, které nastanou, když má křivka body tři- a vícenásobné.

V (20) na základě téže věty v (14) odvozené, na níž Weyr založil práce předcházející a tímže postupem podává obtížnou klassifikaci křivek prostorových 7. stupně, křivek to, pro něž byly dříve jenom některé zvláštní druhy uvažovány a dospívá ke třem hlavním třídám křivek těch, totiž: 1. křivky třídy (4), t. j. takové, jimiž nelze položiti žádnou plochu 2. stupně; 2. křivky třídy (2 . 4), jimiž lze položiti jednu plochu 2. stupně, jakož i jednu plochu 4. stupně a následkem toho nekonečné množství ploch

---

*) Comptes rendus 1870.

**) Inauguraldissertation 1872.

4. stupně; 3. křivky třídy (2), kterými nelze položiti žádnou nerozpadající se plochu stupně 4. a zkoumá a karakterisuje počet zdánlivých bodů dvojných pro každou z tříd uvedených.

III.

Jak s oblibou Weyr pěstoval v geometrii promětné studie infinitesimální, tak s oblibou pěstoval i jiná odvětví geometrie differenciální vůbec a často z infinitesimálních vlastností uvažovaných útvarů přecházel obratnými integracemi příslušných rovnic differenciálních ke konečným rovnicím útvarů těch a k obecným vlastnostem jejich. Sem spadají práce (79), (85), (28), (34), (38), konečně i (4) jednající o různých předmětech.

Pojednání (79) se vztahuje k vzorcům Frenet-Serretovým vyjadřujícím differenciály pro kosiny směrné tečny, binormály a hlavní normály křivky prostorové v některém bodě jejím M.

Stanovíme-li podle vzorců těch směry řečených přímek, tu jsou směry ty určitě i co do smyslu stanoveny, když vytkneme znaménko pro differenciál nezávisle proměnné, a vzniká tu otázka zdali vzájemná poloha, i pokud se smyslu týče, se srovnává s onou pro osy souřadné nebo ne, čili jinak řečeno, zdali modul transformace pro přechod od soustavy souřadné k soustavě dané tečnou, normálou a binormálou ku křivce v bodě M má hodnotu $+1$ nebo -1.

Příslušná podmínka tu obecně odvozena a pak vyjádřená pro případ, že beřeme oblouk za neodvisle proměnnou.

Na druhém místě budiž uvedeno pojednání (85).

Vyjádříme-li prvek lineární na ploše jednou vzhledem k obecným souřadnicím křivočarým, podruhé vzhledem k soustavě souřadné dané křivkami geodetickými a jich trajektoriemi orthogonálními, obdržíme vztah, z něhož přechodem od výrazu druhého k výrazu prvému odvozena tu differenciální rovnice křivek geodetických v obecných souřadnicích křivočarých; způsob odvození jest různý od onoho, jimž Darboux rovnici tu odvodil.*)

Práce (28) řeší jistou úlohu o potenciálu. Otvorem kužele

*) Leçons de la théorie générale des surfaces. T. III., p. 25.

jest dle Gaussa velikost plochy, kterou vytíná kužel z plochy kulové soustředné poloměru 1. Z této definice stanoví se snadno differenciální rovnice ploch uvedených, čímž problém převeden na integraci rovnice této. Rovnice takové plochy vyjádřena pak pomocí tří amplitud, čímž nabývá překvapující jednoduchosti. Zvláště pak tu diskutovány jsou křivky na ploše v rovinách obsahujících dané dva body, jež jsou křivkami abgebraickými stupně 8.

V (34) uvažuje Weyr v pravoúhlé soustavě souřadné obecné plochy $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ pro něž stanoví oskulační paraboloid podél některé přímky povrchové a differenciální rovnici jeho čar křivoznačných, kterýžto výsledek přenese pak na uvedené plochy $y = f\left(\frac{y}{x}\right)$, čímž dospívá ke konečné rovnici jejich čar asymptotických a k rovnici differenciální jejich čar křivoznačných; problém příslušný pro plochy šroubové uvádí jako příklad k úvahám těm.*)

Podnětem k (38) byla práce Catalanova o orthogonálních trajektoriích kružnic,**) které leží na ploše 2. stupně. Ukazuje, že obtíže direktního stanovení konečných rovnic pro křivky ty lze překonati jednoduše, když se plocha promítne orthogonálně do rovin rovnoběžných se soustavou kružnic na ní ležících, čímž pak jest veden k úvahám obecnějším vrcholícím ve větě této: „Známá-li jest jedna orthogonální trajektorie libovolné soustavy kružnic v rovině, lze všecky stanoviti pouhými kvadraturami.“

IV.

Weyr pěstoval geometrii differenciální též v souvislosti s theorií pohybů nekonečně malých, která geometrii differenciální, jmenovitě v době novější velice oplodila, a ku které okolnosti se tu ještě vrátíme. Mám za to, že podle studií, které Weyr v poslední době konal, jak z následujícího bude ještě patrno, právě v tom směru jsme se mohli do něho nadíti nových pozoruhodných objevů.

---

*) Článek, k němuž se titul vztahuje jest tamtéž obsažen a pochází od Dr. V. Strouhala, tehdy ve Würzburku.

**) Liouville-ův journal t. XII.

Nejvýznamnější jest tu pojednání (82).

Zde se zabývá takovým pohybem tuhé soustavy, spojené s křivkou prostorovou Γ_1, při němž se Γ_1 kotálí podle pevné křivky Γ tak, že v každém okamžení pohybů též roviny oskulační křivek Γ_1, Γ v příslušném polu okamžitého pohybu splývají a přichází uvažováním změny základních trojhranů křivek Γ_1, Γ polu řečenému příslušných, že pohyb vytčený se skládá ze samých infinitesimálních otočení kolem os, procházejících body na křivce Γ a obsažených v jejich rovinách rektifikujících. Naopak dovozuje, že každý pohyb prostorový, který se skládá z pouhých rotací, jest takovým pohybem křivky Γ_1 podle křivky Γ. Osy těchto rotací vyplňují plochu Π, jíž odpovídá v soustavě hybné plocha Π_1 tak, že pohyb zajistiti lze tím způsobem, že se kotálí plocha Π_1, aniž by se smýkala, podél Π; odvozeno dále, že plochy ty jsou jenom v tom případě rozvinutelné, když poměr křivosti ku torsi jest týž pro obě křivky Γ, Γ_1 v příslušných si bodech, v kterémžto případě to jsou plochy rektifikující křivek řečených.

Ku konci sestrojena tečna, rovina oskulační a křivost pro dráhu libovolného bodu v jakékoliv jeho poloze.

V (13) stanovena analytickým vyjádřením okamžitého pohybu tětivy o stálé délce v kuželosečce differenciální rovnice křivky řečené v souřadnicích tangenciálních, z níž pak odvozena rovnice konečná této křivky 4. třídy, z kteréžto pak odvozeny některé projektivní vlastnosti křivky.

V (76) odvozena formule Eulerova pro poloměr zakřivení křivek rovinných, vytvořených kotálením, elementární úvahou infinitesimální, při čemž uvažovány křivky řídící pohybu za limitní tvar čar lomených o stranách vesměs stejných, kdežto v (81) ukázáno, jak pro dráhu vytvořenou libovolným počtem soudobých pohybů translačních lze sčítáním vektorů, úměrných rychlostem a zrychlením jednotlivých pohybů translačních sestrojiti tečnu, rovinu oskulační a střed křivosti v libovolném bodě jejím.

V.

Weyr zabýval se též zobrazováním vzájemných dvou ploch.

Zobrazováním shodnoúhelným (konformním) a shodnoplochým (equivalentním) obírají se pojednání (18), (27), k nimž lze přiřaditi i práci (35). Všeobecné vzorce pro isogonální čili konformní zobrazování nějaké plochy na plochu jinou podal Gauss v pojednání „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird.*) Weyr v pojednání (18) vztah takový dvou ploch uvažuje geometricky jako specielní vztah kollinearný v příslušných sobě nekonečně malých částech ploch, z čehož plyne, že zobrazování dlužno provésti tak, aby isotropickým křivkám plochy jedné příslušely opět takové křivky na ploše druhé, při čemž se obdrží takřka bezprostředně analytický tvar této podmínky. Pomocí takto nabytých vzorů transformačních sleduje práce isogonální vztah dvou rovin, při čemž se vyhledávají soustavy křivek orthogonálních, jimž odpovídají soustavy přímek opět ovšem orthogonálních; konečně elegantně odvozena podmínka, za kterou přechází soustava křivek v rovině jedné v soustavu přímek rovnoběžných roviny druhé, aniž by musily býti orthogonální trajektorie daných křivek známy, kterážto podmínka se shrnuje ve větu, že jest nutno a že postačí, aby ony křivky tvořily soustavu isothermických křivek, a že orthogonální trajektorie takové soustavy lze vždy určiti pouhými kvadraturami. Uvedená upotřebení nabytých výsledků objasňují jmenovitě některé zajímavé vztahy, které podal Lamé.**)

V (27) vyhledává na základě řečených Gaussových vzorců transformačních, jaký vztah musí býti mezi dvěma plochami, aby průmět z pevného středu O plochy jedné na plochu druhou byl s onou konformním a přichází k výsledku, že buďto obě plochy sou vzhledem k O homothetické, aneb že plocha jedna musí býti plochou inversní pro střed O jakožto střed inverse.

VI.

Poznamenávám konečně, že kratičké sdělení (12) podává relaci mezi odchýlkami přímek kužele 2. stupně položenými v rovinách jeho hlavních, čímž zprávu o původní vědecké produkci Weyrově zakončuji, abych ještě referoval o ostatních značných literárních zásluhách jeho.

---

*) Preis der königl. Societät der Wiss. in Kopenhagen 1822.

**) Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes.

Řadu prací Weyrových lze považovati jako monografie o moderních výzkumech vyšší geometrie psané s velkou obezřetností a vzácným výběrem látky, práce to pro naše poměry veledůležité se zřetelem k tomu, že přirozeně literatura naše nemůže dosud vykazovati spisy samostatné v oborech, pro něž lze získati malý kruh čtenářů a tím menší tedy kruh spisovatelův a které jsou dobrou přípravou pro studium prací originálních, které o předmětech příslušných pojednávají. Některé, společně s Emilem vydané, byly přípravnými pracemi ke spisu (8), (19), (29), k nimž náleží práce (3); jiné byly doplňkem a pokračováním přednášek universitních; to platí jmenovitě o pojednání (80), obsahujícím úvod k obecné theorii invariantů, pokud se vztahuje k theorii kuželoseček, v němž vyvinuty jsou úplně invarianty, kovarianty a kontravarianty ternárních forem kvadratických a základní vlastnosti jejich, kdežto (86) obsahuje rozšíření úvah těch na prostor, tedy na quaternární formy kvadratické.

Sem náleží též práce (32), obsahující samostatné zpracování všeobecné theorie racionálných čar pomocí jich vyjádření parametrického na základě prací Cayley-ho, Chasles-a, Clebsche, Lürotha a j. formou přesnou a velice přehlednou; sluší z velké části též pojednání (35) zařaditi sem, v němž jest nejprv vyvozena krátce známá podmínka zobrazování stejnoplochého a objasněn její geometrický význam, dále stanoveny soustavy o daných plošných elementech a řešena úloha: V každé z obou rovin dána jest soustava čar; má se stanoviti souvislost stejnoplochá tak, aby čarám soustavy jedné daným způsobem příslušely čáry soustavy druhé; řešení úlohy převádí se tu na dvě kvadratury. Konečně proveden důkaz, že stejnoplochá affinita representuje nejobecnější vztah shodnoplochý kollineárný a shodnost jedině možný vztah shodnoplochý isogonální.

Úvahy (78) mají za účel seznámiti přehledně s onou methodou zkoumání křivek a ploch, která používá jistých pohybů, jak ji zbudovali jmenovitě Laguerre, Darboux a Ribaucour a jež sluje perimorfií, která vznikla z problému, jímž se žádají plochy takové, jež lze zobraziti na dané ploše tak, aby délky oblouků křivek zobrazováním se neměnily. Zkoumání to zahrnuje v sobě téměř celou infinitesimální theorií křivek a ploch a tvoří moderní geometrii differenciální.

Na základě mistrovského díla Darboux-ova o theorii ploch jednajícího, podán tu přehledný rozbor příslušných theorií ve dvou kapitolách, z nichž první jedná o pohybech závislých na jednom parametru a o applikacích na theorii čar, druhá pak o pohybech závislých na dvou parametrech a o applikaci na theorii ploch. Práce ta svědčí o tom, že se Weyr v posledních letech velmi intensivně s theoriemi uvedenými zanášel.

Zbývá ještě podati referát o spisech (8), (19), (29), (87).

Spisy ty stojí v podstatě jako spisy Steinerovy na podkladu počtářském, odchylují se tedy methodou od klassických spisů Staudtových předmětu toho se týkajících. Postup ten jest v nich volen zúmyslně a odůvodněně. Staudtův postup jest sice vzorem methodické čistoty, tím ale se obtíže pro studium spisu jeho značně zvyšují, kterážto okolnost ovšem jest stupňována ještě podivuhodnou úsečností a stručností ve výrazu poznaných pravd; mimo to spisy Staudtovy nejsou doprovázeny obrazci, které jsou pro první studium jakož i pro poznání a objasnění důležitých vztahů velmi nutnými. Všem takovým obtížím čeleno ve právě uvedených spisech Weyrových, v nichž ostatně mimo podklad veškeré další odvozování vět a konstrukcí děje se ale výhradně geometricky, a teprv jako dodatek a zároveň doplněk provedených úvah tvoří projednávání zásadních vět cestou algebraickou, z čehož pak se čerpají snadně vztahy pro útvary imaginární.

Ovšem nelze po pouhém přečtení určitě říci, jakým způsobem se dělili oba autoři o obsah jednotlivých svazků díla (8), (19), (29). Zaručeně jest III. díl sepsán Eduardem celý, kdežto první dva díly psal asi Emil, jak lze také z přirovnání s dílem tohoto „Grundzüge der projektivischen Geometrie“ nazvaným souditi; arciť plán, methoda a bližší disposice celého díla jsou asi prací společnou. Kniha: „Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu“ obsahuje v podstatě látku v I. a II. svazku „Základů“ obsaženou, ale v zcela novém uspořádání. Omezením na věci zásadně důležité a vhodným sloučením látky podařilo se zredukovati tuto co do objemu na dvě třetiny onoho v „Základech“ témuž předmětu věnovaného. Při tom věnována mimo to zvýšená pozornost útvarům imaginárným, jak toho vymáhala okolnost, že v době, která uplynula od vydání díla prvého do vydání díla druného, útvary tyto i v projektivní geometrii úplně zdomácněly. Že bylo možno tak rozsáhlou látku vměstnati do knihy objemu poměrně malého, to zdá se mi býti vzorem vědecké oekonomie, při čemž ale nečiní se újmy ani na jediném místě průzračné jasnosti a jednoduchosti ve výkladu. Tomu arci napomáhá v obou směrech vědomý ústupek methodičnosti ten, že jsou operace s útvary imaginárními založeny na počtářském podkladu. Spisovatel může právem tvrditi, co praví v úvodu své knihy, totiž:

„Nedostatek mého spisu v příčině methody vyvážen snadností, s jakou začátečník, znalý základův analytické geometrie, se dovede vpraviti do konstruktivného zužitkování imaginárných elementů a útvarů, a jistotou, s níž dovede v tomto směru postupovati.“

Pěkně působí též ustálenost příslušné terminologie, jež v „Základech“ musela z části býti teprv utvořena, jakož i vzácná propracovanost, která jest asi výsledkem mnoholetých přednášek o předmětu tom. V tom ohledu jeví se pokrok vzhledem k bohatému a krásnému spisu o „Základech vyšší geometrie“ zřejmě, tak jak se jeví čtenáři rozdíl mezi „Základy“ a mezi dílem prve uvedeným od bratra Emila vydaným. S dobrým svědomím lze tvrditi o knize (87), že by měla své čestné místo v každé literatuře, na př. i v německé vedle značného počtu dobrých knih o předmětu tom jednajících.

IV. Chronologický seznam publikací Ed. Weyra.

Sestavil **K. Petr.**

Seznam jest uspořádán dle letopočtů, jež nacházejí se na titulních listech ukončeného svazku sbírky a obsahujícího příslušnou práci Weyrovu; jde-li o práci, která nevyšla v nějaké sbírce, vzat za základ ovšem letopočet uvedený na této práci.

1. 1868. Erweiterung des Satzes von Désargues nebst Anwendungen. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wiss. in Wien, sv. 58.,*) 2 oddíl str. 223.—230.

---

*) **V tomto svazku a násl. jsou uvedeny titulem dvě práce Weyrovy: Über eine besondere Wahl zweier Projectionsebenen und deren Anwen-**

2\. 1869. Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandschaft. Zeitschrift für Mathematik und Physik, sv. 14., str. 445.—477.

3\. 1870.*) Z novější geometrie. O prometných tvarech v rovině. První zpráva jednoty českých mathematiků, str. 3.—23.

4\. — Drobnosti (Důkaz jedné věty z Bertrandova Traité de calcul différentiel). Druhá zpráva. jedn. č. math., str. 86.—87.

5\. — Über ähnliche Kegelschnitte. Sitzungsberichte der kais. Akad. der Wiss. in Wien, sv. 62., 2. oddíl, str. 261.—270.

6\. — Über einen Satz von Steiner. Journal für reine und ang. Math., Bd. 71, str. 16.—17.

7\. — Über einige Sätze von Steiner und ihren Zusammenhang mit der zwei- und zweigliedrigen Verwandschaft der Grundgebilde ersten Grades. Journal für reine und ang. Math., Bd. 71, str. 18.—28.

8\. 1871. Základové vyšší geometrie.**) Díl I. Theorie promítavých útvarů prvořadých. Živa, sborník vědecký musea král. česk., č. VIII. stran 111.

9\. — Drobnosti. Třetí zpráva jedn. č. math., str. 89.

10\. — Zusatz zu dem Aufsatze: „Über einige Sätze von Steiner und ihren Zusammenhang mit der zwei- und zweigliedrigen Verwandschaft der Grundgebilde ersten Grades. Journal für reine und ang. Math., Bd. 73, str. 87.—93.

11\. — Note sur les fonctions, dont les dérivées successives forment des séries arithmétiques. Annali di matematica pura ed applicata. 2. řada, svazek 4., str. 212.—214.

12\. 1872. O kuželi druhého stupně. Čas. po pěst. m. a f. ročník 1., str. 31.—32.***)

---

dung zur Lösung einiger Aufgaben über Kegelschnitte. Sitzb. d. Wiener Akad. sv 58. 1. oddíl str. 360., 2 oddíl str. 655.

Eindeutige Verwandschaft der Grundgebilde zweiter Stufe. Sitzb. d. Wiener Akad. sv. 59., 1 oddíl str. 291., 2 oddíl str. 469.

*) Nouvelles Annales de Mathématiques z r. 1870. II. sér. sv. 9. přinášejí od Ed. Weyra řešení 2 úloh a to úl. 806. na str. 324.–325. a úl 807. na str. 325.—326.

**) Společně sepsali Dr. Emil Weyr a Eduard Weyr.

***) Tentýž ročník přináší od Ed. Weyra řešení dvou úloh s delšími výklady a to úlohu 6. na str. 151.—153. a úlohu 15. na str. 207.—213; v Nouvelles Annales de Mathématiques z. r. 1872, II. sér., sv. 11. jest obsaženo Weyrovo řešení úlohy 857. na str. 331.—333.

13. 1872. Über die Einhüllende aller Kegelschnittsehnen von constanter Länge. Zeitschrift für Math. und Ph., sv. 17, str. 164.—167.
14. 1873. Über algebraische Raumcurven. Inauguraldissertation. Pojednání král. české spol. náuk, VI. řada, 6. svazek. Stran 27.
15. — Evaluation du rapport anharmonique de quatre droites passant par un point et touchant deux coniques. Journal für reine und ang. Math. Bd. 75, str. 67.—74.
16. — Classification des courbes du sixième ordre dans l'espace. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. v Paříži, svazek 76, str. 424.—428., 475.—478.
17. — Sur les courbes du sixième ordre à double courbure. Comptes rendus, sv. 76., str. 555.—557.
18. 1874. O vztahu dvou rovin, jimiž se nekonečně malé části podobně zobrazují (o vztahu isogonálném). Čas. pro pěst. m. a f., ročník 3., str. 1.—24.
19. — Základové vyšší geometrie.*) Díl II. Theorie křivek stupně druhého. Živa, sborník věd. mus. král. č., č. XI. Stran 180.
20. — Über Raumcurven siebenter Ordnung. Sitzungsberichte der kais. Akad. der Wiss. in Wien, sv. 69. oddíl 2. str. 399.—415
21. — Sur les lignes de courbure des surfaces réglées. Comptes rendus, sv. 78., str. 1648.—1650.
22. 1875. Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Pojednání král. české spol. náuk, VI. řada, 8. svazek. Stran 44.
23. 1876. Několik poznámek vztahujících se k řadám arithmetickým a rekurrentním. Archiv mathematicky a fysiky, svazek 1., str. 42.—52.
24. — O vyvinutí odmocnin druhého stupně v řetězec. Archiv mathematiky a fysiky, svazek 1., str. 218.—225.
25. — Zur Theorie der elliptischen Functionen Zprávy o zasedání král. č. spol. náuk, ročník 1876. str. 172.—203.
26. 1877. Über die Kettenbruchentwickelung der Wurzelgrössen zweiten Grades. Zprávy o zasedání král. č. spol. náuk z roku 1877, str. 65.—72.
27. — Über die conforme Abbildung der Flächen

*) Společně se svým bratrem Emilem.

durch centrale Projektion. Zprávy o zasedání král. č. spol. náuk z roku 1877., str. 273.—276.

28. 1877. Bestimmung der Flächen, deren beliebige Theile aus zwei festen Punkten durch Kegel projicirt werden, deren Öffnungen im gegebenen Verhältnis stehen. Sitzungsberichte der kais. Akad. der Wiss. in Wien, sv. 76., oddíl 2. str. 859.—864.

29. 1878. Základové vyšší geometrie.*) Díl III. O přímočárých plochách druhého stupně a o vztahu kollineárném a reciprokém. Živa, sborník věd. mus. král. č., č. XII. Stran 162.

30. — Bemerkungen in Betreff zweier Sätze der Dynamik. Zprávy o zasedání král. č. spol. náuk z roku 1878., str. 143.—146.

31. — Sur l' arrangement des plans tangents de certaines surfaces. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles v Bordeaux, II. ser., 3. sv., str. 191.—211.

32. 1879. O racionálných čarách v rovině. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 8., str. 193.—236.

33. — O průběhu funkcí elliptických.**) Archiv mathematiky a fysiky, sv. 2., číslo 1, str. 26.—60.

34. — Dodatek ku článku o čarách křivoznačných přímé plochy šroubové. Archiv mathematiky a fysiky, sv. 2., č. 2., str. 95.—101.

35. 1880. O stejnoplochém zobrazování dvou rovin. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 9., str. 201.—216.

36. — Verification der Multiplicationsformel für Determinanten. Zprávy o zasedání král. č. spol. náuk z roku 1880, str. 55.—56.

37. — Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen. Sitzungsberichte der kais. Akad. der Wiss. in Wien, sv. 82, oddíl 2., str. 7.—14.

38. 1881. O stanovení orthogonálných trajektorií kružnic v rovině. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 10., str. 20.—24.

39. — O tvoření jistých rovnic, jež lze algebraicky řešiti. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 10., str. 107.—126.

40. 1882. O jisté větě číselné. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 11., str. 39.—48.

---

*) Společně se svým bratrem Emilem.

**) V podstatě překlad pojednání „Zur Theorie der elliptischen Functionen", číslo 1. Archivu vyšlo roku 1876, následující roku 1877.

41. 1882. O integrování racionalných differenciálů. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 11., str. 125.—137.
42. — O stanovení symetrických funkcí kořenů algebraické rovnice. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 11., str. 285.—288.
43. — O řešení rovnice druhého, třetího a čtrtého stupně. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 11., str. 217—231.*)
44. 1883. Drobné zprávy (O kyvadlu Foucaultově, O theoremu Sturmově, O geometrickém místu pat kolmic vedených z ohniska ellipsy, hyperboly a paraboly na tečny). Čas. pro pěst. m. a f., ročník 12., str. 40.—47.**)
45. — Arithmetické úvahy a cvičení. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 12., str. 91.—99.***)
46. 1884. Rozbor rovnice druhého stupně. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 13., str. 178.—193.†)
47. — O základní větě theorie matric. Zprávy o zasedání král. č. spol. náuk z roku 1884., str. 148.—152.
48. — Sur la théorie des quaternions. Comptes rendus, sv. 98, str. 906.—907.
49. — Sur la théorie des quaternions. Comptes rendus, sv. 98, str. 1320.—1323.
50. 1885. O řešení lineárných rovnic. Čas. pro pěst. m. a f. ročník 14., str. 101.—110., 149.—159.
51. — Poznámka k úlohám 20. a 21. v ročníku XIII. tohoto časopisu. Čas. pro pěst. math. a f. roč. 14., str. 124.—129.
52. — Sur la théorie des matrices. Comptes rendus, sv. 100., str. 787.—789.
53. — Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces. Comptes rendus, sv. 100., str. 966.—969.
54. 1886. Život a působení dra Ludvíka Krause. Nástin životopisný. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 15., str. 49.—52.††)

---

*) Při tomto článku jest místo jména autora uvedeno: Studujícím napsal M. R.

**) Ke konci každé z těchto tří zpráv jest připojena pouze značka W.

***) Místo jména autora jest uvedeno: Žákům středních škol napsal M. R.

†) U titulu uvedeno: Studujícím napsal M. R.

††) V tomto ročníku jest mimo to na str. 63.—64. uveřejněn od Ed. Weyra „Dodatek“, obsahující vysvětlení ku článku „Poznámka k rovnicím, jež mají pouze reálné kořeny“ od L. Krause, kterýžto článek z pozůstalosti Krausovy s jinými ještě Weyrem byl v Časopise uveřejněn.

55. 1887. Rozbor rovnice druhého stupně o třech proměnných. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 16., str. 97.—112., 145.—160., 202.—209.
56. — O binárných matricích. Věstník král. č. spol. náuk z r. 1887., č. 18., str. 358.—400.
57. — Sur la réalisation des systémes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices. Věstn. král. české spol. náuk z r. 1887., č. 41., str. 616.—618.
58. — Note sur la théorie des quantités complexes formées avec *n* unités principales. Bulletin des sciences mathématiques, série II., tome XI., str. 205.—215.
59. — Deux remarques relatives aux séries. Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, sv. 8., str. 97.—100.
60. 1888. Extrait d'une lettre de M. Ed. Weyr à M. Hermite. Bulletin des sciences math., sér. II., t. XII., str. 25.—28.
61. — Remarque sur la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.) Bulletin des sciences math., série II.. t. XII., str. 246.—248.
62. 1889. O problému projektivity v jednoduchých útvarech geometrických. Věstník král. č. spol. náuk z roku 1889., č. 15., str. 163.—187.
63. — O theorii forem bilineárných. Spisův poctěných jubilejní cenou král. č. společnosti náuk v Praze č. II., stran 110.
64. 1890. Zur Theorie der bilinearen Formen.*) Monatshefte für Mathematik und Physik, svazek 1., str. 163.—236.
65. 1891. O theorii ploch. Spisův poctěných jubilejní cenou král. č. spol. náuk v Praze č. VI., stran 83.
66. — Strojení oskulačních kuželoseček k čarám vytvořeným projektivnými řadami a svazky. Rozpravy české akad. tř. II., ročník I. (1891.—1892.), č. 5., stran 14.
67. — O elliptickém integrálu třetího druhu. Rozpravy české akad. druhé tř., roč. I. (1891.—1892.), č. 6., stran 9.

*) Pojednání toto v podstatě jest překlad spisu „O theoriích forem bilineárných“.

68. 1891. Výklady o mathematice. (Dle přednášek prof. Eduarda Weyra*), lithogr.) Díl I., stran 310.
69. — Zur Theorie von Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitten enthalten.**) Monatshefte für Mathematik und Physik, sv. 2., str. 351—412.
70. 1892. Stanovení součtů jistých nekonečných řad. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 21., str. 161.—180.
71. — O významu jisté věty Liouvilleovy pro theorii funkcí o dvou periodách. Věstník č. akad., roč. I., str. 47.—52.
72. — Výklady o mathematice. (Dle přednášek prof. Ed. Weyra,***) lithogr.) Díl II., stran 271.
73. 1893. Vyčíslení nekonečných součinův o racionálných členech pomocí funkce Γ. Čas. pro pěst. math. a fys., ročník 22., str. 161.—178.
74. — O rozkladu periodických funkcí na jednoduché elementy. Věstník české akad., ročník II., str. 147.—158.
75. — O jisté nespojité funkci. Rozpravy české akad. druhé tř., ročník II., č. 12., stran 21.
76. 1894. Strojení středu křivosti trochoid. Čas. pro pěst. math. a fys., ročník 23., str. 4.—8.
77. — Drobné zprávy. (Důkaz pro transcendenci čísla *e*.) Čas. pro pěst. m. a f., roč. 23., str. 27.—29.
78. — Úvahy o pohybu v theorii ploch a čar. Věstn. české akad., roč. III., str. 81.—103., 149.—169.
79. — Notiz die Serret'schen Formeln betreffend. Monatshefte für Mathematik und Physik, sv. 5., str. 346.—348.
80. 1895. O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii kuželoseček. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 24., str. 1.—25., 81.—117.
81. — Zusatz zur Abhandlung des Herrn F. Procházka „Ein Beitrag zur Translationsbewegung". Věstník král. č. spol. náuk z roku 1895., č. 28., 3 strany.
82. — Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wiss. in Wien sv. 104., oddíl 2., str. 292.—299.
83. 1896. O soustavách orthogonálných ploch. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 25., str. 42.—46., 103.—104.

*) Vydal assistent Weyrův p. Vaňourek. a rovněž druhé a třetí vydání.

**) Pojednání toto jest v podstatě reprodukce spisu „O theorii ploch".

***) Vydal assistent Weyrův p. Vaňourek; druhé opravené vydání, které vyšlo r. 1898, vydal p. ass. Em. Hlavatý.

84. 1896. Strojení oskulačních hyperboloidů k plochám zborceným. Rozpravy české akad. druhé tř., ročník V., č. 5., stran 6.
85. — Sur l'équation des lignes géodesiques. Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress, Chicago 1893; str. 408.—411.
86. 1897. O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii ploch druhého stupně. Čas. pro pěst. m. a f., ročník 26., str. 1.—31., 121.—144.
87. 1898. Projektivná geometrie základních útvarů prvého řádu. Sborníku Jednoty českých mathematiků č. 1., stran 189.
88. 1899. Poznámka o zborcených plochách druhého stupně. Rozpravy české akad. druhé tř., roč. VIII. č. 6., stran 8.
89. — O problému homografie. Rozpravy české akad. druhé tř., ročník VIII., č. 24., stran 8.
90. 1901. O theorii forem bilineárných. Věstník třetího sjezdu českých přírodozpytců a lékařů v Praze, str. 164.—167.
91. 1902. Charles Hermite. Posmrtná vzpomínka. Almanach české Akademie, roč. 12., str. 123.—127.
92. — Počet differenciálný. Sborníku Jednoty česk. math. č. 5., stran 416.
93. — Odpověď k vědecké úvaze kritické pána dra J. V. Pexidera nadepsané: pana dvorního rady prof. Eduarda Weyra Počet differenciálný a vydané nákladem spisovatelovým v Praze 1902. Nákl. Jedn. českých mathematiků. Stran 20.
94. — Zum Normalenproblem der Ellipse. Věstník král. české spol. náuk z r. 1902., č. 29., stran 6.