Ladislav Truksa

Zobecněné polynomy Legendrovy, užití jich v numerické sumaci

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 4, 225--244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120826

Zobecněné polynomy Legendrovy, užití jich v numerické sumaci.

Dr. *Truksa Lad.*

K odvození orthogonální soustavy polynomů $P_{n,s}(x)$, které vykazují v počtu diferenčním a sumačním obdobné vlastnosti jako polynomy Legendrovy 1. druhu $P_n(x)$ v počtu diferenciálním a integrálním, došlo v 1. polovině 19. století při řešení zajímavé úlohy: Vyjádřiti aproximativně funkci $f(x)$, o níž předpokládáme, že jest funkcí racionální celistvou stupně m

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

z $n > m$ známých hodnot této funkce, při čemž koeficienty a_i mají vyhovovati podmínkám plynoucím z použití metody nejmenších čtverců. Důmyslnou eliminační metodou aplikovanou na systém n rovnic o m neznámých, který obdržíme dosazením známých hodnot funkce $f(x)$ pro argumenty $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ do uvedené rovnice, dospěl Gauss (viz Disquisitio de elementis Palladis 1810, Theoria Comb. Observ. suppl. 1818) k řešení vyjádřenému zmíněnými polynomy. Metodu Gaussovu v hlavních rysech nalézáme též v Laplaceově »Théorie analytique des Probabilités«, 1r suppl. 1847, a v Legendrově »Nouvelles Recherches sur les Orbites des Cometes«, 1805. J. Bienaymé poukázal v článku »Remarque sur les différences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la méthode des moindres carrés et qui assurent la supériorité de cette méthode«, Journal de Liouville 1853, na řešení téhož druhu vyplývající z jednoduché modifikace interpolační metody Cauchyovy.[1]) Zajímavým způsobem řešil uvedenou úlohu Čebyšev, který vychází z úvah počtu pravděpodobnosti a určuje polynomy $P_{n,s}(x)$ jakožto jmenovatele postupných přibližných hodnot nekonečného zlomku řetězového, jímž lze vyjádřiti součet

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x-i} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-s}.$$

V pracích Čebyševových setkáváme se též s polynomy, jež lze nazvati zobecněnými Legendrovými polynomy 2. druhu $Q_{n,s}(x)$, a které tvoří čitatele postupných přibližných hodnot zmíněného zlomku řetězového. Z četných pojednání Čebyševových, v nichž

[1]) Viz Cauchy: Mémoire sur l'interpolation, Prague 1835.

vyskytují se zobecněné polynomy Legendrovy, buďtež uvedeny zejména: Sur les fractions continues 1855, Sur une nouvelle série 1858, Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés 1859, Sur l'interpolation 1864 a Sur l'interpolation des valeurs équidistants 1875 (viz Oeuvres I./11, 18, 23, II./12). Roku 1879 podal J. P. Gram v pojednání »O rozvojích v řadu vyplývajících z metody nejmenších čtverců«[2]) řešení obdobné úlohy s hlediska mnohem obecnějšího; numerický výpočet hodnot polynomů I. druhu provádí v článku »Ueber die partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen« uveřejněném v Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker, 1915.

Z českých autorů zabýval se zobecněnými polynomy Legendrovými 1. druhu prof. Dr. Petr v článku »O interpolaci« (uveřejněném v druhé výroční zprávě II. čes. st. gymnasia v Brně, šk. rok 1902-03). Vycházeje z vyjádření těchto polynomů ve formě determinantu:

$$P_{n,s}(x) = \begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_1 & \dots s_{n-1} \\ x & s_1 & s_2 & \dots s_n \\ x^2 & s_2 & s_3 & \dots s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^n & s_n & s_{n+1} & \dots s_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$s_k = 1^k + 2^k + \dots + s^k,$$

vyplývajícího z podmínek pro koeficienty a_i při řešení úlohy vpředu uvedené, odvozuje autor základní vlastnosti polynomů $P_{n,s}(x)$ aplikací příslušných vět z teorie determinantů a funkcí Bernoullských.

Přehledný referát o výsledcích prací tohoto druhu, uveřejněných do počátku let devadesátých minulého století, podal R. Radau v »Études sur les formules d'interpolation« 1891.

Cílem této práce, k níž dán byl podnět při rekapitulaci počtu interpolačního v semináři aplikované matematiky p. prof. Dra. Schoenbauma r. 1924-5, jest odvození zobecněných polynomů Legendrových v takovém tvaru, z něhož bezprostředně (jednoduchým limitním procesem $\lim s = \infty$) lze obdržeti obyčejné Legendrovy polynomy.

V druhé části bude pak pojednáno o použití zobecněných polynomů Legendrových v numerické sumaci. Poznámku o tomto způsobu aplikace obecněných polynomů učinil Čebyšev v pojednání »Sur une nouvelle série«, 1858. Ježto integrace funkce v mezích (α, β) jest v podstatě limitním případem sumace o intervalech ω, je-li $\lim \omega = 0$,

---

[2]) Uveřejněno později poněkud rozšířené v »Journal für die reine u. angew. Mathematik«, sv. 94, 1883, pod titulem: »Ueber die Entwickelung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate«.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i} \sum f(x_i)\,\Delta x_i, \quad \left(\omega = \Delta x_i = \frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

lze odvoditi metody numerické integrace z analogických formulí sumačních. Tak na př. obdržíme ze známé sumační formule Lubbockovy[3])

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0,\frac{1}{m},\ldots}^{\frac{m-1}{m}}\sum_{s=0}^{n-1} f(s+x\,\omega) = \sum_{s=0}^{n-1} f(s\,\omega) +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r-1}\left[(\Delta^\nu f(n\,\omega)-\Delta^\nu f(0))\frac{1}{m}\sum_{x=0,\frac{1}{m},\ldots}^{\frac{m-1}{m}}\binom{x}{\nu+1}\right]+n\frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}\frac{1}{m}\sum_{x=0,\frac{1}{m},\ldots}^{\frac{m-1}{m}}\binom{x}{r+1},$$

již lze psáti v rozvedeném tvaru

$$\frac{1}{m}\left[f(0)+f\left(\frac{\omega}{m}\right)+f\left(\frac{2\omega}{m}\right)+\ldots+f\left(\overline{n-1}\,\omega+\frac{m-1}{m}\,\omega\right)\right]=$$

$$=f(0)+f(\omega)+f(2\omega)+\ldots+f(\overline{n-1}\,\omega)+[f(n\omega)-f(0)]\frac{m-1}{2m}-$$

$$-[\Delta f(n\,\omega)-\Delta f(0)]\frac{m^2-1}{12m^2}+[\Delta^2 f(n\,\omega)-\Delta^2 f(0)]\frac{m^2-1}{24m^2}-$$

$$-[\Delta^3 f(n\,\omega)-\Delta^3 f(0)]\frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720m^4}+\ldots$$

integrační formuli Laplaceovu, blíží-li se sumační interval $\frac{\omega}{m}$ neomezeně k nule ($\lim m = \infty$):

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{n\omega} f(x)\,dx = \sum_{s=0}^{n=1} f(s\,\omega) + \sum_{\nu=0}^{r-1}[\Delta^\nu f(n\,\omega)-\Delta^\nu f(0)]\int_0^1\binom{x}{\nu+1}dx +$$

$$+n\frac{f^{(r+1)}(\eta)}{(r+1)!}\int_0^1\binom{x}{r+1}dx,$$

v rozvedeném tvaru pak

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{n\omega} f(x)\,dx = f(0)+f(\omega)+\ldots+f(\overline{n-1}\,\omega)+[f(n\,\omega)-f(0)]\,\frac{1}{2}-$$

$$-[\Delta f(n\,\omega)-\Delta f(0)]\,\frac{1}{12}+[\Delta^2 f(n\omega)-\Delta^2 f(0)]\,\frac{1}{24}-$$

$$-[\Delta^3 f(n\,\omega)-\Delta^3 f(0)]\,\frac{19}{720}+\ldots$$

---

[3]) Viz na př. J. F. Steffensen: Summation-Formulas of Lubbock's Type, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1924.

Úloha, kterou se budeme zabývati v druhé části pojednání, jest analogickým rozšířením integrační formule Gaussovy na numerickou sumaci.

I.

Označme 1. diferenční poměr spojité funkce $f(x)$ odpovídající rozdílu argumentů ω:

$$\underset{\omega}{\varDelta} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega};$$

2. diferenční poměr při témže rozdílu argumentů ω:

$$\underset{\omega}{\varDelta^2} f(x) = \frac{\underset{\omega}{\varDelta} f(x+\omega) - \underset{\omega}{\varDelta} f(x)}{\omega}$$

a obecně i-tý dif. poměr

$$\underset{\omega}{\varDelta^i} f(x) = \frac{\underset{\omega}{\varDelta^{i-1}} f(x+\omega) - \underset{\omega}{\varDelta^{i-1}} f(x)}{\omega}.$$

Budiž dále racionální celistvá funkce $F_n(x)$ stupně n dána výrazem:

$$F_n(x) = \left(x - \frac{\omega}{2}\right)\left(x - \frac{3\omega}{2}\right) \dots \left(x - \frac{2n-1}{2}\omega\right) \tag{1}$$

a racionální celistvá funkce $\Phi_n(x)$ stupně $2n$

$$\Phi_n(x) = F_n\left(x + \frac{s\omega}{2}\right) F_n\left(x - \frac{s\omega}{2}\right) \tag{2}$$

1. diferenční poměr $\underset{\omega}{\varDelta} F_n(x) = n F_{n-1}(x) = \dfrac{n F_n(x)}{F_1(x - \omega\overline{n-1})}$

2. „ „ $\underset{\omega}{\varDelta^2} F_n(x) = n(n-1) F_{n-2}(x) = \dfrac{n(n-1) F_n(x)}{F_2(x - \omega\overline{n-2})}$

i-tý „ „ $\underset{\omega}{\varDelta^i} F_n(x) = i! \dbinom{n}{i} \dfrac{F_n(x)}{F_i(x - \omega\overline{n-i})}$ (3)

n-tý „ „ $\underset{\omega}{\varDelta^n} F_n(x) = n!$

Vyjádřeme $F_n\left(x - \frac{s\omega}{2}\right)$ Newtonovou interpolační formulí pro ekvidistantní hodnoty argumentu (rozdíl ω), vycházejíce ze základní hodnoty $F_n\left(\frac{2n+1-2s}{2}\omega\right)$:

$$F_n\left(x-\frac{s\,\omega}{2}\right)=F_n\left(\frac{2n+1-2s}{2}\,\omega\right)+$$

$$+\frac{\left(x+\frac{s\,\omega}{2}-\frac{2n+1}{2}\,\omega\right)n\,F_n\left(\frac{2n+1-2s}{2}\,\omega\right)}{F_1\left(\frac{3-2s}{2}\,\omega\right)}+$$

$$+\binom{n}{2}\frac{\left(x+\frac{s-2n-1}{2}\,\omega\right)\left(x+\frac{s-2n-3}{2}\,\omega\right)F_n\left(\frac{2n+1-2s}{2}\,\omega\right)}{F_2\left(\frac{5-2s}{2}\,\omega\right)}+\ldots=$$

$$=F_n\left(\frac{2n+1-2s}{2}\,\omega\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{\left(x+\frac{s-2n-1}{2}\,\omega\right)\ldots\left(x+\frac{s-2n-2i+1}{2}\,\omega\right)F_n\left(\frac{2n+1-2s}{2}\,\omega\right)}{F_i\left(\frac{2i+1-2s}{2}\,\omega\right)}$$

Vynásobením této rovnice hodnotou $F_n\left(x+\frac{s\,\omega}{2}\right)$ a použitím relace

$$F_n(\omega\,n-x)=(-1)^n\,F_n(x) \tag{4}$$

obdržíme:

$$\frac{\Phi_n(x)}{(-1)^n\,F_n\left(\frac{2s-1}{2}\,\omega\right)}=F_n\left(x+\frac{s\,\omega}{2}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\frac{F_{n+i}\left(x+\frac{s\,\omega}{2}\right)}{F_i\left(\frac{2s-1}{2}\,\omega\right)}. \tag{5}$$

Označíme-li

$$\frac{1}{n!\,2^n}\mathop{\Delta^n}_{\omega}\Phi_n(x)=P_{n,s}(x), \tag{6}$$

vyplývá pro $P_{n,s}(x)$ z rovnice (5) se zřetelem na (3) vyjádření řadou faktoriełní:

$$P_{n,s}(x)=$$

$$=\frac{(-1)^n\,F_n\left(\frac{2s-1}{2}\,\omega\right)}{2^n}\left[1+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n+i}{n}(-1)^i\frac{F_i\left(x+\frac{s\,\omega}{2}\right)}{F_i\left(\frac{2s-1}{2}\,\omega\right)}\right]. \tag{7}$$

Ze vztahu (1), (2) a (4) lze odvoditi jednoduše,[4]) že

$$\underset{\omega}{\Delta^n} \Phi_n(-x) = (-1)^n \underset{\omega}{\Delta^n} \Phi_n(x),$$

vzhledem k tomu platí pak též vztah

$$P_{n,s}(-x) = (-1)^n P_{n,s}(x). \tag{8}$$

Používajíce známé formule počtu sumačního obdržíme pro součet:

$$\sum_{-\frac{s-1}{2}\omega}^{\frac{s-1}{2}\omega} R_i(x) \underset{\omega}{\Delta^n} \Phi_n(x) =$$

$$\left[\underset{\omega}{\Delta^{n-1}} \Phi_n(x+\omega) R_i(x) - \underset{\omega}{\Delta^{n-2}} \Phi_n(x+2\omega) \underset{\omega}{\Delta} R_i(x) + \ldots\right]_{-\alpha}^{+\alpha+\omega} +$$

$$+ (-1)^n \sum_{-\frac{s-1}{2}\omega}^{\frac{s-1}{2}\omega} \Phi_n(x+n\omega) \underset{\omega}{\Delta^n} R_i(x).$$

Ježto diferenční poměry $\underset{\omega}{\Delta^{n-i}} \Phi_n(x+i\omega)$ vymizejí pro argumenty $\alpha+\omega$, $-\alpha$, zbývá z poslední rovnice toliko:

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} R_i(x) \underset{\omega}{\Delta^n} \Phi_n(x) = (-1)^n \sum_{-\alpha}^{\alpha} \Phi_n(x+n\omega) \underset{\omega}{\Delta^n} R_i(x).$$

Je-li $R_i(x)$ racionální celistvá funkce stupně nejvýše $n-1$, jest tento součet roven nule, takže

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} R_i(x) P_{n,s}(x) = 0. \qquad 0 \leq i < n. \tag{9}$$

Tento vztah jest pro polynomy $P_{n,s}(x)$ charakteristický a lze snadno dokázati, že neexistují jiné polynomy od $P_{n,s}(x)$ různé — nehledě k multiplikativní konstantě —, které uvedenému vztahu vyhovují.

Specielně vyplývá z rovnice (9) dosazením za $R_i(x)$ polynom $P_{r,s}(x)$ vztah

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{n,s}(x) P_{r,s}(x) = 0 \qquad n \gtrless r,$$

jenž prokazuje orthogonalitu systému polynomů $P_{n,s}(x)$.

---

[4]) Dosazením do Leibnitzovy formule:

$$\underset{\omega}{\Delta^n}[\varphi(x)\psi(x)] = \varphi(x+n\omega)\underset{\omega}{\Delta^n}\psi(x) + \binom{n}{1}\underset{\omega}{\Delta}\varphi(x+\overline{n-1}\omega)\underset{\omega}{\Delta^{n-1}}\psi(x) + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n}\psi(x)\underset{\omega}{\Delta^n}\varphi(x).$$

Je-li $n = r$, potom

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{n,s}^2(x) = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{-\alpha}^{\alpha} \Phi_n(x + n\omega).$$

Horní mez lze snížiti v tomto případě na $\frac{s - 2n - 1}{2}\omega$, ježto hodnoty funkce $\Phi_n(x + n\omega)$ rovnají se nule pro argumenty od původní až k této snížené hranici. Dosadíme-li za $\Phi_n(x + n\omega)$ hodnotu

$$\frac{n!}{(2n)!} F_n\left(x - \frac{\omega s}{2} + \omega n\right) \mathop{\Delta^n}_{\omega} F_{2n}\left(x + \frac{\omega s}{2} + \omega n\right) = \Phi_n(x + n\omega),$$

obdržíme:

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{n,s}^2(x) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n}} \sum_{-\frac{s-1}{2}\omega}^{\frac{s-2n-1}{2}\omega} F_n\left(x - \frac{s\omega}{2} + n\omega\right) \mathop{\Delta^n}_{\omega} F_{2n}\left(x + \frac{s\omega}{2} + n\omega\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n}} \left\{\left[\mathop{\Delta^{n-1}}_{\omega} F_{2n}\left(x + \frac{s\omega}{2} + \overline{n+1}\omega\right) \mathop{\Delta}_{\omega} F_n\left(x - \frac{s\omega}{2} + n\omega\right) - \ldots\right]_{-\alpha}^{\beta} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \sum_{-\alpha}^{\frac{s-2n-1}{2}\omega} F_{2n}\left(x + \frac{s\omega}{2} + 2n\omega\right) \mathop{\Delta^n}_{\omega} F_n\left(x - \frac{s\omega}{2} + n\omega\right)\right\}.$$

Kromě posledního členu vymizejí na pravé straně této rovnice všecky ostatní členy pro dané meze. Zbývá tudíž relace:

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{n,s}^2(x) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{-\alpha}^{\frac{s-2n-1}{2}\omega} F_{2n}\left(x + \frac{s\omega}{2} + 2n\omega\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(2n+1)\omega}\left[F_{2n+1}\left(x + \frac{s\omega}{2} + 2n\omega\right)\right]_{-\frac{s-1}{2}\omega}^{\frac{s-2n+1}{2}\omega} =$$

$$= \frac{\omega^{2n}}{2^{2n}(2n+1)} (s+n)(s+n-1)\ldots(s+1)\,s\,(s-1)\ldots(s-n) =$$

$$= \frac{\omega^{2n}(s+n)!}{2^{2n}(2n+1)(s-n-1)!} \tag{10}$$

Vhodnou volbou intervalu ω lze stanoviti meze pro sumaci zcela libovolně. Zvolíme-li na př.

$$\omega = \frac{2}{s - \varkappa},$$

při čemž $\varkappa$ značí libovolné číslo reálné celistvé, menší než-li s, přejdou polynomy $P_{n,s}(x)$ při neomezeně vzrůstajícím s ($\lim s = \infty$) v obyčejné polynomy Legendrovy $P_n(x)$:

$$\lim_{s=\infty} P_{n,s}(x) = \frac{1}{2^n n!} \lim_{s=\infty\ \omega} \Delta^n \Phi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \tag{11}$$

v mezích $\pm\,\alpha = \pm\,1$ (vyjádření Rodrigueovo).

Relace (10) přejde v limitě ve známý tvar:

$$\lim_{s=\infty} \sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{n,s}^2(x)\,\omega = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

rovnice (7) pak ve vyjádření $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} \binom{n}{i} \binom{n+i}{n} \frac{(x+1)^i}{2^i}$$

resp.

$$P_n(x-1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} \binom{n}{i} \binom{n+i}{n} \frac{x^i}{2^i}.$$

Pro praktický výpočet polynomů $P_{n,s}(x)$ lze snadno získati rekurentní formuli. Libovolný polynom $R_n(x)$ stupně n dá se vyjádřiti vztahem:

$$R_n(x) = a_n P_{n,s}(x) + a_{n-1} P_{n-1,s}(x) + \ldots + a_0 P_{0,s}(x),$$

ježto pro výpočet $n+1$ konstant a_i jest dán potřebný počet $n+1$ rovnic srovnáním koeficientů při týchž mocninách x. Platí tudíž na př.

$$x P_{n,s}(x) = a_{n+1} P_{n+1,s}(x) + a_n P_{n,s}(x) + \ldots + a_0 P_{0,s}(x).$$

Vynásobíme-li tuto rovnici polynomy $P_{n-i,s}(x)$ a provedeme součet v mezích $-\frac{s-1}{2}\,\omega$, $\frac{s-1}{2}\,\omega$, zjistíme, že koeficienty

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-2} = 0$$

a se zřetelem na (8) též

$$a_n = 0,$$

takže zbývá relace:

$$x P_{n,s}(x) = a_{n+1} P_{n+1,s}(x) + a_{n-1} P_{n-1,s}(x) \tag{12}$$

Z této vyplývá srovnáním koeficientů u nejvyšší mocniny x:

$$\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} = a_{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1};\ a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Další vztah k určení koeficientu a_{n-1} obdržíme, dosadíme-li do rovnice (12) za x specielní hodnotu $x = \frac{-s+1}{2}\,\omega$:

$$\frac{-s+1}{2}\,\omega \frac{(-1)^n}{2^n} F_n\left(\frac{2s-1}{2}\,\omega\right) = \frac{n+1}{2n+1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} F_{n+1}\left(\frac{2s-1}{2}\,\omega\right) +$$
$$+ a_{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{2s-1}{2}\,\omega\right)$$

$$-\frac{s+1}{2}\omega^2\left(\frac{2s-1}{2}-\frac{2n-1}{2}\right)2=$$

$$=-\frac{n+1}{2n+1}\omega^2\left(\frac{2s-1}{2}-\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2s-1}{2}-\frac{2n+1}{2}\right)-5a_{n-1}$$

$$a_{n-1}=\frac{n(s^2-n^2)}{4(2n+1)}\omega^2.$$

Dosazením do rovnice (12) obdržíme hledaný rekurentní vztah

$$P_{n+1,s}(x)=\frac{2n+1}{n+1}x\,P_{n,s}(x)=\frac{n(s^2-n^2)}{4(n+1)}\omega^2 P_{n-1,s}(x). \qquad (13)$$

Počáteční členy soustavy polynomů:

$$\begin{aligned}
P_{0,s}(x)&=1\\
P_{1,s}(x)&=x\\
P_{2,s}(x)&=\frac{3}{2}x^2-\frac{s^2-1}{8}\omega^2\\
P_{3,s}(x)&=\frac{5}{2}x^3-x\frac{3s^2-7}{8}\omega^2\\
P_{4,s}(x)&=\frac{35}{8}x^4-x^2\frac{15s^2-65}{16}\omega^2+\frac{4(s^2-1)(s^2-9)}{128}\omega^4\\
P_{5,s}(x)&=\frac{63}{8}x^5-x^3\frac{35s^2-245}{16}\omega^2+x\frac{15s^4-230s^2+407}{128}\omega^4.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Polynomy odvozené Čebyševem $\varphi_i(z)$[5]) obdržíme z našich polynomů $P_{n,s}(z)$, klademe-li $\omega=1$ a vynásobíme-li faktorem $(i!)2^i$:

$$\varphi_i(z)=i!\,2^i P_{i,n}(z).$$

Z ostatních vlastností polynomů $P_{n,s}(x)$, jichž odvození jest veskrze zcela jednoduché, budiž uvedeno pouze toto:

Definici polynomů $P_{n,s}(x)$ obsaženou ve vzorci (7) lze použíti i v případě, že jedná se o proměnnou x komplexní. Ježto n-tý diferenční poměr funkce $f(x)$ jest pak vyjádřen výrazem:[6])

$$\underset{\omega}{\Delta^n} f(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-x-\omega)\ldots(z-x-n\omega)},$$

při čemž integraci jest provésti v oboru jednoduše souvislém, v němž — uvnitř i na okraji — $f(x)$ jest funkcí analytickou, a který obsahuje body $x, x+\omega, x+2\omega,\ldots, x+n\omega$, vyplývá pro polynomy $P_{n,s}(x)$ vztah

$$P_{n,s}(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_c\frac{\Phi_n(z)\,dz}{(z-x)(z-x-\omega)\ldots(z-x-n\omega)} \qquad (15)$$

[5]) Viz Oeuvres I., str. 474 (Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés).

[6]) Viz na př. Nörlund: Vorlesungen über Differenzenrechnung (1924).

analogický integrálnímu vyjádření Schläfliho pro polynomy Legendrovy 1. druhu.

Polynomy $P_{n,s}(x)$ vyhovují hypergeometrické diferenční rovnici 2. řádu:

$$\left(x + \frac{s+3}{2}\omega\right)\left(x - \frac{s-3}{2}\omega\right) \underset{\omega}{\Delta^2} P_{n,s}(x) +$$
$$+ (2x - \omega(n^2 + n - 2)) \underset{\omega}{\Delta} P_{n,s}(x) - n(n+1) P_{n,s}(x) = 0. \quad (16)$$

Rovnice tato může tvořiti východisko pro obdobné zobecnění funkcí Legendrových 1. druhu, jaké bylo naznačeno v předchozím pro polynomy Legendrovy.

II.

V části první byla již učiněna zmínka o použití polynomů $P_{n,s}(x)$ při aproximativním vyjádření funkcí metodou nejmenších čtverců, v části druhé těchto úvah budiž zevrubně pojednáno o aplikaci zobecněných polynomů Legendrových 1. i 2. druhu v numerické sumaci, při čemž posléze uvedené budou definovány a základní vlastnosti jejich odvozeny. Jedná se o řešení úlohy:

Vyjádřiti součet libovolného počtu s ekvidistantních hodnot spojité funkce $f(x)$ v intervalu $\pm\,\alpha$ z daných n hodnot funkce $f(x_i)$ pro argumenty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak volené, aby výsledek platil přesně pro racionální funkci celistvou až do stupně $2n - 1$. Součet má býti tudíž vyjádřen výrazem:

$$\sigma = \sum_{-\alpha}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_n x_k) f(x_k) + R_{2n,s}$$

při čemž zbytek $R_{2n,s}$ rovná se nule, je-li $f(x)$ polynomem stupně $r \leq 2n - 1$.

Jak již vpředu bylo odvozeno, souvisí formule vyjadřující řešení této úlohy s integrační formulí Gaussovou týmž způsobem, jako známá integrační formule Laplaceova se sumační formulí Lubbockovou, uveřejněnou po prvé r. 1823 v Camb. Phil. Trans. 3.

Úplné řešení dané úlohy vyžaduje:

1. Stanoviti argumenty $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
2. stanoviti koeficienty $\varphi_n(x_k)$,
3. vyjádřiti přibližně hodnotu zbytku $R_{2n,s}$.

*

Ad 1. Označme 1. obecný diferenční poměr (1. interpolační funkci)

$$[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = [x_2, x_1],$$

2. obecný diferenční poměr

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

atd., až n-tý obecný diferenční poměr

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n] - [x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}.$$

Z obecné interpolační formule Newtonovy[7])

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1) &+ (x - x_1)[x_1, x_2] + (x - x_1)(x - x_2)[x_1, x_2, x_3] + \ldots + \\ &+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{r-1})[x_1, x_2, \ldots, x_r] + \\ &+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_r)\frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}. \end{aligned}$$

(ξ jest obsaženo mezi nejvyšší a nejnižší hodnotou argumentů x_i), obdržíme součet hodnot funkce $f(x)$ pro argumenty

$$x = -\frac{s-1}{2}\omega = -\alpha,\ -\alpha + \omega,\ -\alpha + 2\omega, \ldots, \alpha - \omega,\ \alpha = \frac{s-1}{2}\omega,$$

$$\begin{aligned} \sigma = \sum_{-\alpha}^{\alpha} f(x) = s f(x_1) &+ [x_1 x_2] \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1) + \\ &+ [x_1, x_2, x_3] \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \\ &+ [x_1, x_2, \ldots, x_r] \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1)\ldots(x - x_{r-1}) + \\ &+ \sum_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_r). \end{aligned} \tag{17}$$

Podmínky, jimiž lze určiti hodnoty x_i tak, aby vyhovovaly požadavku v úloze naší stanovenému, jsou patrně dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} &\sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0 = \sum_{-\alpha}^{\alpha} \psi_n(x), \\ &\sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\, x = 0 = \sum_{-\alpha}^{\alpha} x\,\psi_n(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\, x^{n-1} = 0 = \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{n-1}\psi_n(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Vzorec (17) nabývá s ohledem na tuto soustavu podmínek tvaru:

$$\sigma = s f(x_1) + [x_1, x_2] \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1) + \ldots +$$

---

[7]) Viz A. Cauchy: Sur les Fonctions interpolaires, Compte Rendu 1840.

$$+[x_1, x_2, \ldots, x_n] \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) + R_{2n,s} \quad (19)$$

$$R_{2n,s} = \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \ldots (x - x_{2n}) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}. \quad (20)$$

Z rovnic (18) lze stanoviti přímo algebraickou rovnici, jejímiž kořeny jsou právě hledané hodnoty x_i Jednoduchou transformací soustavy (18) obdržíme tuto algebraickou rovnici ve tvaru:

$$D_0 \eta^n + D_1 \eta^{n-1} + \ldots + D_n = 0,$$

při čemž

$$D_0 = \begin{vmatrix} \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{n-1} & \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{n-2} & \ldots & \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^0 \\ \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^n & \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{n-1} & \ldots & \sum_{-\alpha}^{\alpha} x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{2n-2} & \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{2n-3} & \ldots & \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{n-1} \end{vmatrix};$$

D_i vyplývá z D_0, nahradíme-li i-tý sloupec hodnotami:

$$-\sum_{-\alpha}^{\alpha} x^n, \; -\sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{n+1}, \; \ldots - \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^{2n-1}.$$

Stanovení hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lze však provésti mnohem jednodušeji, přihlédneme-li ke tvaru podmínek (18) po zavedení pomocného polynomu $\psi_n(x)$ stupně n-tého. Vzhledem k charakteristické vlastnosti polynomů $P_{n,s}(x)$ vyjádřené v rovnici (9), jest patrno bezprostředně, že $\psi_n(x)$ nemůže se lišiti od polynomu $P_{n,s}(x)$ leč o multiplikativní konstantu, takže $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou argumenty nulových bodů polynomu $P_{n,s}(x)$.

Z tvarů polynomů $P_{n,s}(x)$ vyplývá, že argumenty jsou v daném intervalu rozloženy symetricky podle středu, což ostatně plyne i ze srovnání součtu funkce $f(x)$ a součtu k ní příslušné funkce symetrické podle osy Y. Že všecky nulové body polynomu $P_{n,s}(x)$ jsou reálné a že jsou obsaženy uvnitř intervalu $\pm \frac{s-1}{2} \omega$ lze odvoditi z vyjádření (6) způsobem analogickým jako u obyčejných polynomů Legendrových.

Pro specielní hodnoty n obdržíme v interv. $\pm 1 \left(\omega = \frac{2}{s-1}\right)$:

$n = 1 \qquad {}_1x_1 = 0$

$n = 2 \qquad {}_2x_1 = -{}_2x_2 = \sqrt{\frac{s^2-1}{3(s-1)^2}}$

$$n=3 \qquad {}_3x_1=0,\; {}_3x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3s^2-7}{5(s-1)^2}} \tag{21}$$

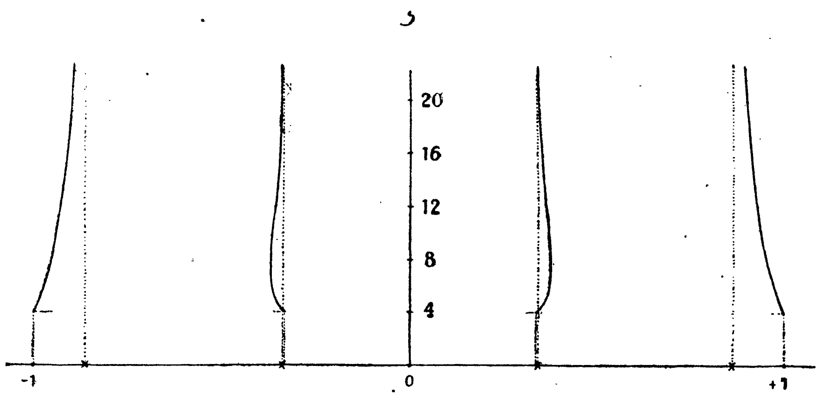
$$n=4 \qquad {}_4x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{30s^2-130\pm\sqrt{480s^4-3600s^2+13120}}{70(s-1)^2}}$$

$$n=5 \qquad {}_5x_1=0,$$

$$ {}_5x_{2,3,4,5}=\pm\sqrt{\frac{70s^2-490\pm\sqrt{1120s^4-10640s^2+137536}}{126(s-1)^2}}.$$

Vzrůstá-li počet sčítaných hodnot s neomezeně, přecházejí hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve známé argumenty, vypočtené po prvé Gaussem[8]) pro numerickou integraci.

Závislost polohy těchto bodů na počtu sčítaných hodnot s na př. pro $n=4$ jest zvláště patrna z grafického znázornění:



× body Gaussovy.

Ad 2. K výpočtu koeficientů $\varphi_n(x_k)$ použijeme interpolační formule Lagrangeovy, jíž lze v našem případě psáti ve tvaru:

$$f(x)=\frac{P_{n,s}(x)}{(x-x_1)P_{n,s}'(x_1)}f(x_1)+\ldots+$$

$$+\frac{P_{n,s}(x)}{(x-x_n)P_{n,s}'(x_n)}f(x_n)+r_{2n,s}. \tag{22}$$

Součet rovná se výrazu:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{P_{n,s}'(x_k)}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\frac{P_{n,s}(x)}{x-x_k}+R_{2n,s}. \tag{23}$$

Označme

$$\overline{Q}_{n,s}(y)=\frac{\omega}{2}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\frac{P_{n,s}(x)}{y-x} \tag{24}$$

---

8) Viz Methodus nova integralium valores atd.

a analogicky

$$\overline{Q}_{n+1,s}(y)=\frac{\omega}{2}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\frac{P_{n+1,s}(x)}{y-x}$$

a dosaďme za $P_{n+1,s}(x)$ hodnotu z rekurentního vzorce (13):

$$P_{n+1,s}(x)=\frac{2n+1}{n+1}\,x\,P_{n,s}(x)-\frac{n(s^2-n^2)}{4(n+1)}\,\omega^2 P_{n-1,s}(x).$$

Obdržíme pak:

$$\overline{Q}_{n+1,s}(y)=\frac{\omega}{2}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2n+1}{n+1}\,\frac{x\,P_{n,s}(x)}{y-x}-\frac{\omega}{2}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\frac{n(s^2-n^2)}{4(n+1)}\,\omega^2\,\frac{P_{n-1,s}(x)}{y-x}.$$

Použitím identity:

$$\frac{x\,P_{n,s}(x)}{y-x}=\frac{y\,P_{n,s}(x)}{y-x}-P_{n,s}(x)$$

vyplývá z rovnice předchozí rekurentní formule pro funkce $\overline{Q}_{n,s}(y)$:

$$\overline{Q}_{n+1,s}(y)=\frac{2n+1}{n+1}\,y\,\overline{Q}_{n,s}(y)-\frac{n(s^2-n^2)}{4(n+1)}\,\omega^2\,\overline{Q}_{n-1,s}(y), \qquad (25)$$

jež jest identická s rekurentní formulí pro polynomy $P_{n,s}(x)$.

Pro praktický výpočet funkcí $\overline{Q}_{n,s}(y)$, jež jsou zobecněnými funkcemi Legendrovými 2. druhu, použijeme definiční rovnice (24), z níž vyplývá

$$\overline{Q}_{0,s}(y)=\frac{\omega}{2}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{y-x}$$

$$\overline{Q}_{1,s}(y)=\frac{\omega}{2}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x}{y-x}=\frac{\omega}{2}\sum_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{y}{y-x}-1\right)=-\frac{s\,\omega}{2}+$$
$$+P_{1,s}(y)\,\overline{Q}_{0,s}(y)=-Q_{1,s}(y)+P_{1,s}(y)\,\overline{Q}_{0,s}(y).$$

Hodnota $\overline{Q}_{0,s}(y)$ jest konečná, pokud $x \gtrless y$. Z rekurentního vzorce (25) vypočteme pak

$$\overline{Q}_{2,s}(y)=-\frac{3}{4}\,ys\,.\,\omega+P_{2,s}(y)\,\overline{Q}_{0,s}(y)=-Q_{2,s}(y)+P_{2,s}(y)\,\overline{Q}_{0,s}(y),$$

$$\overline{Q}_{3,s}(y)=-\frac{5}{4}\,y^2 s\,.\,\omega+\frac{s^2-4}{12}\,\omega^3 s+P_{3,s}(y)\,\overline{Q}_{0,s}(y)=$$
$$=-Q_{3,s}(y)+P_{3,s}(y)\,\overline{Q}_{0,s}(y).$$

Úplnou indukcí lze snadno dokázati, že platí obecně:

$$\overline{Q}_{n,s}(y)=-Q_{n,s}(y)+P_{n,s}(y)\,\overline{Q}_{0,s}(y)$$

$$Q_{n+1,s}(y)=\frac{2n+1}{n+1}\,y\,Q_{n,s}(y)-\frac{n(s^2-n^2)}{4(n+1)}\,\omega^2\,Q_{n-1,s}(y). \qquad (26)$$

Pro specielní hodnoty proměnné y, jimiž jsou v našem případě argumenty x_k nulových bodů polynomů $P_{n,s}(x)$, redukují se funkce $\overline{Q}_{n,s}(x_k)$ na polynomy $Q_{n,s}(x_k)$ stupně $n-1$, jež lze nazvati zobecněnými Legendrovými polynomy 2. druhu. Výpočet jich provádí se z rekurentní formule (25), vynecháme-li všechny členy, jež obsahují funkci $Q_{0,s}(x_k)$, anebo pro $n > 2$ přímo z (26):

$$
\begin{aligned}
Q_{1,s}(x_k) &= \frac{s\,\omega}{2} \\
Q_{2,s}(x_k) &= \frac{3}{4}\, x_k s\,.\,\omega \\
Q_{3,s}(x_k) &= \frac{5}{4}\, x_k^2 s\,.\,\omega - \frac{s^2-4}{12}\,\omega^3 s \\
Q_{4,s}(x_k) &= \frac{35}{16}\, x_k^3 s\,.\,\omega - \frac{55s^2-355}{192}\,\omega^3\,.\,s\,.\,x_k \\
Q_{5,s}(x_k) &= \frac{63}{16}\, x_k^4 s\,.\,\omega - \frac{49s^2-469}{64}\,\omega^3 s\,.\,x_k^2 + \frac{(s^2-4)(s^2-16)}{60}\,\omega^5 s.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Formule (24), definující zobecněné funkce Legendrovy 2. druhu, jest analogickou integrálnímu vyjádření Neumannovu obyčejných funkcí Legendrových 2. druhu, v něž pro lim $s = \infty$, $\left(\omega = \frac{2}{s-1}\right)$ přechází

$$\lim_{s=\infty} \overline{Q}_{n,s}(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{y-x}\,dx.$$

Hledané koeficienty $\varphi_n(x_k)$ jsou stanoveny podílem

$$\frac{2Q_{n,s}(x_k)}{\omega P_{n,s}'(x_k)} = \varphi_n(x_k). \tag{28}$$

Koeficienty $\overline{\varphi}_n(x_k)$ pro numerickou integraci Gaussovskou obdržíme z rovnice

$$\overline{\varphi}_n(x_k) = \lim_{s=\infty} \frac{2Q_{n,s}(x_k)}{\omega\, P_{n,s}'(x_k)}. \tag{29}$$

Ad 3. Podle vzorce (20) zbytek

$$R_{2n,s} = \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x-x_1)\ldots(x-x_n)\ldots(x-x_{2n})\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

Zvolíme-li argumenty $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}$ dosud libovolně volitelné na př. tak, že ztotožníme je s argumenty $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nabývá zbytek tvaru:

$$R_{2n} = \sum_{-\alpha}^{\alpha} (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{-\alpha}^{\alpha} \psi_n^2(x) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}. \tag{30}$$

Ježto $\psi_n^2(x)$ jest funkcí v sumačním intervalu $\pm\,\alpha$ stále kladnou a předpokládáme-li, že $2n$-tá derivace funkce $f(x)$ jest v tomto intervalu spojitá, lze použíti na uvedený součet věty o střední hodnotě, čímž obdržíme:

$$R_{2n} = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \sum_{-\alpha}^{\alpha} \psi_n^2(x)$$

(ζ jest jistá hodnota argumentu v intervalu $\pm\,\alpha$).

Z relace

$$\psi_n(x) = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} P_{n,s}(x)$$

vyplývá pak se zřetelem na (10):

$$R_{2n,\,s} = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \frac{\omega^{2n}\,(s+n)!}{2^{2n}\,(2n+1)\,(s-n-1)!} \tag{31}$$

a v mezích $\pm\,1$ $\left(\omega = \frac{2}{s-1}\right)$:

$$R_{2n,\,s} = f^{(2n)}(\zeta) \frac{2^{2n}(s+n)!}{(2n+1)\,(2n!)^3\,(s-n-1)!\,(s-1)^{2n}}.$$

Obdobný výraz pro zbytek ve formuli Gaussově:[9])

$$\overline{R}_{2n} = f^{(2n)}(\zeta) \frac{2^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n!)^3\,(2n+1)} = \lim_{s=\infty} R_{2n,\,s}.$$

Poznámka.

Jedná-li se o sumaci racionální celistvé funkce $R_n(x)$ stupně n použitím n nulových bodů polynomu $P_{n,s}(x)$ jest příslušná křivka, stanovená vzorcem (22), zároveň polynomem stupně $n-1$, vyjadřujícím $R_n(x)$ v mezích $\pm\,\alpha$ aproximativně podle metody nejmenších čtverců.

K důkazu této vlastnosti vyjádřeme polynom $R_n(x)$ řadou

$$T_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i P_{i,s}(x). \tag{32}$$

Je-li $k = n$, jest tímto výrazem provedeno přesné vyjádření polynomu $R_n(x)$, zvolíme-li vhodně koeficienty a_i; že jest takovéto vyjádření možno, bylo již v I. části dokázáno. Je-li $k < n$, jest vy-

[9]) Srovnej na př. Petr, Počet integrální, str. 347.

jádření pouze aproximativní a lze stanoviti koeficienty a_i tak, aby vyhovovalo podmínkám plynoucím z použití metody nejmenších čtverců. Z příslušné podmínky

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} (R_n(x) - T_k(x))^2 = M_{in}$$

odvodíme rovnice k určení koeficientů a_i:

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{i,s}(x) R_n(x) = \sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{i,s}(x) T_k(x), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, k. \quad (33)$$

Se zřetelem na rovnici (32) a na základní vlastnost polynomů $P_{n,s}(x)$ (9) vyplývají z rovnic (33) hodnoty koeficientů

$$a_i = \frac{\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{i,s}(x) R_n(x)}{\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{i,s}^2(x)}. \quad (34)$$

Ježto polynom $R_n(x)$ jest vyjádřen přesně řadou

$$\sum_{i=0}^{n} a_i P_{i,s}(x) = R_n(x)$$

a přibližně metodou nejmenších čtverců polynomem stupně $n - 1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i P_{i,s}(x) = T_{n-1}(x),$$

jest rozdíl těchto polynomů

$$R_n(x) - T_{n-1}(x) = a_n P_{n,s}(x)$$

roven nule právě v n nulových bodech polynomu $P_{n,s}(x)$. Z této okolnosti vysvítá jasně platnost věty výše uvedené. Obecněji platí, že aproximativní polynom $T_i(x)$ stupně s-tého prochází nulovými body polynomu $P_{i+1,s}(x)$ na aproximativním polynomu $T_{i+1}(x)$.

*

Les polynômes de Legendre généralisés et leur application dans l'addition numérique.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans la première partie, l'auteur déduit, en appliquant, dans ses traits essentiels, la méthode de Tchébichef, la relation fondamentale, définissant les polynômes généralisés de Legendre de la première espèce:

$$P_{n,s}(x) = \frac{1}{2^n n!} \Delta_{\omega}^{n} \left\{F_n\left(x + \frac{s\,\omega}{2}\right) F_n\left(x - \frac{s\,\omega}{2}\right)\right\},$$

où

$$F_n(x) = \left(x - \frac{\omega}{2}\right)\left(x - \frac{3\omega}{2}\right)\dots\left(x - \frac{2n-1}{2}\omega\right)$$

et quelques propriétés des polynômes $P_{n,s}(x)$:

1. La relation montrant l'orthogonalité:

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{n,s}(x)\,P_{r,s}(x) = 0, \quad n \gtrless r, \quad \alpha = \frac{s-1}{2}\omega,$$

l'intervalle de sommation ω;

2. la somme des carrés:

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{n,s}^2(x) = \frac{\omega^{2n}(s+n)!}{2^{2n}(2n+1)(s-n-1)!}$$

3. les équations de récurrence:

$$P_{n+1,s}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\,x\,P_{n,s}(x) - \frac{n(s^2-n^2)}{4(n+1)}\,\omega^2 P_{n-1,s}(x).$$

Si x est une variable complexe, on obtient, comme équation de définition pour $P_{n,s}(x)$, une équation analogue à l'expression intégrale de Schläfli pour les polynômes ordinaires de Legendre, de la première espèce

$$P_{n,s}(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_c \frac{F_n\left(z + \frac{s\omega}{2}\right)F_n\left(z - \frac{s\omega}{2}\right)dz}{(z-x)(z-x-\omega)\dots(z-x-n\omega)}.$$

Les polynômes $P_{n,s}(x)$ satisfont à une équation hypergéométrique aux différences finies du 2[e] ordre:

$$\left(x + \frac{s+3}{2}\omega\right)\left(x - \frac{s-3}{2}\omega\right)\underset{\omega}{\Delta^2} P_{n,s}(x) +$$
$$+ (2x - \omega(n^2+n-2))\underset{\omega}{\Delta} P_{n,s}(x) - n(n+1)\,P_{n,s}(x) = 0,$$

qui peut fournir un passage aux fonctions généralisées de la 1. espèce de Legendre. A la limite ($\lim s = \infty$) les polynômes $P_{n,s}(x)$ se réduisent aux polynômes ordinaires de la 1. espèce de Legendre.

Dans la deuxième partie, l'auteur résout le problème suivant: Exprimer la somme d'un nombre quelconque s de valeurs équidistantes d'une fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle $\pm\alpha = \pm\frac{s-1}{2}\omega$, étant données n valeurs de $f(x)$ pour les arguments $x_1, x_2, \dots, x_n$ choisis de telle manière que le résultat soit valable précisément pour une fonction rationelle entière jusqu'au degré $2n-1$:

$$\sigma = \sum_{-\alpha}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_n(x_k) f(x_k) + R_{2n,s}$$

où le reste $R_{2n,s}$ est nul, si $f(x)$ est un polynôme de l'ordre $r \leq 2n-1$. La formule qui exprime la solution de ce problème se rattache à la formule intégrale de Gauss de la même manière, comme la formule de sommation de Lubbock à la formule intégrale de Laplace. En appliquant les formules générales d'interpolation de Newton:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} [x_1, x_2, \ldots, x_i] (x-x_1) \ldots (x-x_{i-1}) + \text{reste},$$

l'auteur détermine les conditions pour la détermination des arguments x_k, ce qui se fait en annulant n termes de la somme de la série:

$$\sum_{-\alpha}^{\alpha} x^i (x-x_1) \ldots (x-x_n) = 0 = \sum_{-\alpha}^{\alpha} x^i \psi_n(x), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Il suit immédiatement de ces conditions que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des zéros des polynômes $P_{n,s}(x)$. La manière dont la position de ces points dépend du nombre s des valeurs additionnées, n étant constant, ressort de la représentation graphique, effectuée pour $n=4$. Pour calculer les coefficients $\varphi_n(x_k)$, la formule d'interpolation de Lagrange est appliquée; en même temps, les fonctions généralisées de Legendre de la 2e espèce

$$\overline{Q}_{n,s}(y) = \frac{\omega}{2} \sum_{-\alpha}^{\alpha} \frac{P_{n,s}(x)}{y-x}$$

ont été définies dans la forme qui correspond à l'expression, donnée par Neumann, des fonctions de Legendre de la 2e espèce; les polynômes respectifs $Q_{n,s}(y)$ de l'ordre $n-1$ satisfont à l'équation récurrente:

$$Q_{n+1,s}(y) = \frac{2n+1}{n+1} y \, Q_{n,s}(y) - \frac{n(s^2-n^2)}{4(n+1)} \omega^2 \, Q_{n-1,s}(y).$$

Les coefficients $\varphi_n(x_k)$ sont donnés par la formule:

$$\varphi_n(x_k) = \frac{2 Q_{n,s}(x_k)}{\omega P_{n,s}'(x_k)}.$$

Le reste $R_{2n,s}$ est donné dans la forme:

$$R_{2n,s} = f^{(2n)}(\zeta) \frac{\omega^{2n} (s+n)!}{(2n)! \binom{2n}{n}^2 (2n+1)(s-n-1)!}.$$

Dans une remarque, l'auteur établit l'expression approximative d'un polynôme $R_n(x)$ de l'ordre n par le méthode des moindres carrés, en faisant usage des polynômes $P_{n,s}(x)$. Le polynôme d'approximation $T_i(x)$ de l'ordre i est donné par la relation

$$T_i(x) = \sum_{i=0}^{i} \frac{\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{i,s}(x)\, R_n(x)}{\sum_{-\alpha}^{\alpha} P_{i,s}^2(x)} P_{i,s}(x).$$

Enfin, l'auteur démontre le théorème affirmant que le polynôme $T_i(x)$ de l'ordre i passe par les zéros du polynôme $P_{i+1,s}(x)$ sur le polynôme $T_{i+1}(x)$.