Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Pírko

Branná výchova v počtu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D178--D187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120809

VYUČOVÁNÍ.

Branná výchova v počtu pravděpodobnosti[1]).

Zdeněk Pírko, Praha.

A. Úlohy základní.

1. Střelba do terče. Určitý počet přibližně stejně dobrých střelců A (a ran), B (b ran), ... střílí za týchž poměrů na stejný cíl; zvítězí ten, jehož střední zásah bude cíli nejbližší.

a) Jaká je pravděpodobnost, že zvítězí (nezvítězí) střelec A?

b) Jaká je při 2 střelcích pravděpodobnost, že zvítězí (nezvítězí) A; že zvítězí (nezvítězí) B; v jakém vztahu jsou poměr pravděpodobností s počtem ran?

c) Odpovězte na stejné otázky jako v b) v případě, že střelec B má k-kráte více ran než střelec A!

a) $p_A = a/(a+b+c+\ldots)$, $q_A = 1 - p_A = (b+c+\ldots)/(a+b+c+\ldots)$; b) $p_A = q_B = 1 - p_B = a/(a+b)$, $p_B = q_A = 1 - p_A = b/(a+b)$, poměr pravděpodobností p_A/p_B je v *přímém* poměru s počtem ran, poměr pravděpodobností q_A/q_B je v *obráceném* poměru s počtem ran; c) $1/(1+k)$, $k/(1+k)$, $1/k$, k.

2. Vadné náboje. V dávce střeliva (granátů) připouštíme $a\%$ nábojů vadných, t. j. takových, které nevybuchnou v cíli. Jaká je pravděpodobnost

a) vadné rány, dobré rány,

b) že prvních n výstřelů bude slepých, že prvních n výstřelů dá n explosí.

c) že mezi n prvními výstřely bude *aspoň* jeden slepý?

Dosaďte $a = 30$, $n = 3$!

a) $p = a/100$, $q = 1 - p = (100 - a)/100$; b) $P = p^n$, $Q = q^n = (1 - p)^n$, $P + Q < 1$, proč? c) $P' = 1 - q^n = 1 - (1 - p)^n$; $p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$, $P = 0{,}027$, $Q = 0{,}343$, $P' = 0{,}657$.

3. Vadné náboje. Mezi a granáty, které máme vystřeliti, je jich b — neznámo kterých — vadných.

---

[1]) Otiskujeme zde pro potřebu kolegů příklady, které autor uvedl ve své přednášce „O branné výchově v aritmetice ve tř. VII.", konané středoškolskou sekcí JČMF dne 16. února 1938 v Praze.

a) Jaká je pravděpodobnost, že prvních n ran budou rány slepé ($n \leqq b$)? Číselně pro $a = 10$, $b = n = 3$!

b) Jaká je pravděpodobnost, že *aspoň* jedna z prvních n ran bude dobrá? Číselně pro $a = 10$, $b = n = 3$!

c) Určete podmínky, za nichž máme *jistotu*, že aspoň jedna z prvních n ran je dobrá!

a) $P = \frac{b}{a}\,\frac{b-1}{a-1}\cdots\frac{b-(n-1)}{a-(n-1)} = \frac{b!\,(a-n)!}{a!\,(b-n)!}$ pro $n \neq b$, $P' = \left[\binom{a}{b}\right]^{-1}$ pro $n = b$; $P = P' = 1/24 = 0{,}008\bar{3}$; b) $Q = 1 - P = \frac{a!\,(b-n)! - b!\,(a-n)!}{a!\,(b-n)!}$; $Q = Q' = 1 - P' = 0{,}991\bar{6} \doteq 1$, t. j. *morální jistota*, že aspoň jedna z ran bude dobrá; c) $Q = 1$ čili $b!\,(a-n)! = 0$, tedy buď $b = 0$ nebo $a = n$.

4. Postřelování pozorovatelen. Z a pozorovatelen je jich b neobsazeno. Nepřítel střílí (zároveň nebo po sobě) jen na n ($n \leqq b$) z těchto a pozorovatelen.

a) Jaká je pravděpodobnost, že střílí jen na pozorovatelny neobsazené?

b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi postřelovanými pozorovatelnami je aspoň jedna obsazena?

Dosaďte $a = 10$, $b = n = 3$!

Týž příklad jako 3. a) $0{,}008\bar{3}$; b) $0{,}991\bar{6} \doteq 1$, t. j. *morální jistota*, že aspoň jednu obsazenou pozorovatelnu neutralisuje (t. j. postřelováním vyloučí z pozorovací činnosti).

5. Rány dlouhé (za cíl) a krátké (před cíl). Baterie o n dělech je na cíl (na př. zákop, kolmý k výstřelné[2]) zastřílena tak, že pro každé dělo je pravděpodobnost dlouhé rány p a tedy pravděpodobnost krátké rány $q = 1 - p$. Baterie vystřelí řadu (t. j. z každého děla 1 ránu); jaká je pravděpodobnost, že

a) řada bude dlouhá,

b) řada bude krátká,

c) *aspoň* jedna rána bude dlouhá,

d) *aspoň* jedna rána bude krátká?

Číselně pro $n = 6$, $p = 0{,}3$ ($q = 0{,}7$)!

a) p^n; b) q^n; c) $1 - q^n$; d) $1 - p^n$; 0,000 729, 0,117 649, 0,882 351, 0,999 271 $\doteq 1$, t. j. morální jistota, že *aspoň* jedna rána bude krátká.

6. Pravděpodobnost chybného pozorování. Při střelbě dělostřelectva budiž pravděpodobnost dlouhé rány p, krátké rány $q = 1 - p$. Terénní nebo atmosférické poměry způsobují, že $a\%$ ran pozorujeme chybně. Jaká je pravděpodobnost

a) mylného pozorování,

b) že bude *pozorována* dlouhá rána,

[2]) Výstřelná je tečna dráhy střely v jejím počátku.

c) že bude *pozorována* krátká rána?

a) $r = \frac{a}{100}$; b) $P_1 = p\,(1 - r) + qr$; c) $P_2 = q\,(1 - r) + pr$. Zkouška $P_1 + P_2 = 1$.

7. Zastřelování dělostřelectva. S dálkou zaměřovače X hm budiž p pravděpodobnost dlouhé rány, q krátké rány ($q = 1 - p$); s dálkou $(X + 1)$ hm budiž pravděpodobnost dlouhé rány p', krátké rány q' ($q' = 1 - p'$). Předpokládejme, že α) není důvodů, které by způsobovaly mylné pozorování, β) zvláštní vlivy způsobují, že pozorujeme chybně; pravděpodobnost chybného pozorování považujeme za konstantní a odhadujeme na r.

α) Jaká je pravděpodobnost, že s dvěma dálkami X, $(X + 1)$ dostaneme

a) obě rány krátké,

b) obě rány dlouhé,

c) správnou vidlici (t. j. s dálkou X ránu krátkou, s dálkou $(X + 1)$ ránu dlouhou),

d) převrácenou vidlici (t. j. s dálkou X ránu dlouhou, s dálkou $(X + 1)$ ránu krátkou)?

Číselně pro $p = \frac{1}{6}$, $p' = \frac{2}{3}$!

β) Jaká je pravděpodobnost, že vidlici *pozorujeme* správně? Číselně pro $p = \frac{1}{6}$, $p' = \frac{2}{3}$, $r = \frac{1}{10}$ (Magnon)!

α) a) $p_1 = qq'$; b) $p_2 = pp'$; c) $p_3 = qp'$; d) $p_4 = pq'$. Zkouška: $\Sigma p_i = 1$. Číselně: $\frac{5}{18}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{18}$. β) $P = q\,(1 - r) \,.\, p'\,(1 - r) + q\,(1 - r) \,.\, q'r + pr \,.\, p'\,(1 - r) + pr \,.\, q'r$, číselně $P = 0{,}485 \doteq \frac{1}{2}$, t. j. vidlici pozorujeme správně přibližně v polovině případů.

8. Zastřelování dělostřelectva. $X = 40$, $p = \frac{3}{4}$, $p' = \frac{4}{5}$; jaká je pravděpodobnost, že

a) *dostaneme* správnou vidlici, nesprávnou vidlici,

b) *pozorujeme* správnou vidlici?

a) $\frac{3}{4} \,.\, \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$, $\frac{1}{4} \,.\, \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \,.\, \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 1 - \frac{3}{5}$; b) 8 možných případů, $\frac{3}{4} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{4}{5} \,.\, \frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{2}$.

B. Úlohy o pokusech opakovaných, při nichž se základní pravděpodobnost nemění. Pravděpodobnost různých výsledků.

1. Zbraň zastřílena na cíl. Dělo je zastříleno na cíl tak, že pravděpodobnost dlouhé rány je p, krátké $q = 1 - p$. Bylo vystřeleno n ran; jaká je pravděpodobnost, že

a) n_1 ($n_1 \leqq n$) ran budou rány dlouhé (t. j. $n_2 = n - n_1$ ran krátkých),

b) n_1 ($n_1 \leqq n$) ran budou rány dlouhé za předpokladu, že je táž pravděpodobnost rány dlouhé i krátké?

a) $\binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2} = \binom{n}{n_1} p^{n_1} (1 - p)^{n-n_1}$; b) $p = q = \frac{1}{2}$, $\binom{n}{n_1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. Rozložení nárazů. Dělo je zastříleno na cíl tak, že je táž pravděpodobnost rány dlouhé (+) i krátké (—). Jaká je pravděpodobnost při 6 ranách na cíl vystřelených, že budou

a) 3 rány +, 3 rány —,
b) 2 rány —, 4 rány +,
c) 2 rány +, 4 rány —,

nezáleží-li na pořadí?

a) $\binom{6}{3} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}$; b) $\frac{15}{64}$; c) $\frac{15}{64}$. Je-li konfigurace zásahů taková, ak ji udávají případy a) až c), považujeme zbraň *i v praksi* za zastřílenou; tedy pravděpodobnost pro to, že zbraň $p = q = \frac{1}{2}$ je zastřílena, jest $\frac{5}{16} + \frac{15}{64} + \frac{15}{64} \doteq \frac{3}{4}$.

3. Rozložení nárazů. Z děla (pravděpodobnost dlouhé rány p, krátké $q = 1 - p$) bylo vystřeleno n-kráte. Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme

a) *v libovolném pořadí* m ($m \leqq n$) dlouhých ran,
b) *aspoň* m krátkých ran,
c) *nejvýše* m krátkých ran?

Číselně pro $n = 5$ určete pravděpodobnost a) 3 dlouhých ran v libovolném pořadí, b) aspoň 3 krátkých ran, c) nejvýše 2 krátkých ran!

a) $\binom{n}{m} p^m q^{n-m}$; b) $\binom{n}{m} q^m p^{n-m} + \binom{n}{m+1} q^{m+1} p^{n-m-1} + \ldots + \binom{n}{n} q^n$; c) $\binom{n}{1} q p^{n-1} + \binom{n}{2} q^2 p^{n-2} + \ldots + \binom{n}{m} q^m p^{n-m} + \binom{n}{n} p^n$; součet pravděpodobností b) a c), v nichž krajní případy vezmeme jen jednou, je zřejmě roven jistotě a sice $(p + q)^n = 1$. Číselně: a) $10p^3q^2$; b) $10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$; c) $5p^4q + 10p^3q^2 + p^5$; pravděpodobnosti jsou členy rozvoje $(p + q)^5$.

4. Rozložení zásahů. Baterie o 4 dělech je tak zastřílena, že pro každé její dělo je pravděpodobnost zásahu $p = \frac{1}{4}$. Kolik je možných výsledků a s jakými pravděpodobnostmi v případě, že byla vystřelena řada? Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme *nejvýše* 2 zásahy?

Může býti 4, 3, 2, 1 nebo žádný zásah, příslušné pravděpodobnosti jsou $(\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}$, $\binom{4}{3} (\frac{1}{4})^3 \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$, $\binom{4}{2} (\frac{1}{4})^2 (\frac{3}{4})^2 = \frac{27}{128}$, $\binom{4}{1} \frac{1}{4} (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$, $(\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256}$; $\frac{243}{256} \doteq 1$, *morální jistota*, že dostaneme nejvýše 2 zásahy.

5. Baterie vystřelí řadu; rozložení nárazů. Baterie o 6 dělech je zastřílena na cíl (nepřátelský zákop kolmý k výstřelné) tak, že je táž pravděpodobnost rány dlouhé i krátké. Baterie vystřelí řadu.

a) Jaké jsou možné případy rozložení nárazů a s jakými pravděpodobnostmi?

b) Jaká je pravděpodobnost, že budou *aspoň* 2 rány dlouhé, *nejvýše* však 4 dlouhé?

a) Pravděpodobnosti jsou členy *souměrného* rozvoje $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^6$; pravděpodobnost pro 6 + (0—) je $p_6 = p_0 = \frac{1}{64}$, pravděpodobnost pro 5 + (1—) je $p_5 = p_1 = \frac{3}{32}$, pravděpodobnost pro 4 + (2—) je $p_4 = p_2 = \frac{15}{64}$, pravděpodobnost 3 + (3—) je $p_3 = \frac{5}{16}$; b) $p_2 + p_3 + p_4 = \frac{25}{32} \doteq \frac{3}{4}$, viz př. 2.

6. **Baterie vystřelí řadu; rozložení nárazů.** Baterie o 6 dělech je zastřílena tak, že pravděpodobnost dlouhé rány je $p = \frac{2}{3}$ (krátké $q = 1 - p = \frac{1}{3}$). Baterie vystřelí řadu.

a) Jaké jsou možné případy rozložení nárazů a s jakými pravděpodobnostmi?

b) Jaká je pravděpodobnost, že budou *aspoň* 3 rány dlouhé, *nejvýše* však 5 dlouhých?

c) Totéž pro $p = 0{,}7$ $(q = 0{,}3)$, $n = 6$!

a) Pravděpodobnosti p_i (viz př. 5) jsou členy *nesouměrného* rozvoje $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})^6$, tedy $p_0 = \frac{64}{729}$, $p_1 = \frac{192}{729}$, $p_2 = \frac{240}{729}$, $p_3 = \frac{160}{729}$, $p_4 = \frac{60}{729}$, $p_5 = \frac{12}{729}$ $p_6 = \frac{1}{729}$; b) $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}812$; c) z rozvoje $(0{,}7 + 0{,}3)^6$.

7. **Baterie vystřelí dvě řady; rozložení nárazů.** Baterie o n dělech je zastřílena tak, že pravděpodobnost dlouhé rány je p, krátké $q = 1 - p$. Baterie vystřelí 2 řady (po 2 ranách z každého děla).

a) Jaké jsou možné případy rozložení nárazů a s jakými pravděpodobnostmi pro $p = \frac{2}{3}$, $n = 6$?

b) Jaká je pravděpodobnost pro $p = \frac{2}{3}$, $n = 6$, že bude *aspoň* 6 ran dlouhých, *nejvýše* však 10 dlouhých?

c) Jaké jsou možné případy rozložení nárazů a s jakými pravděpodobnostmi pro $p = \frac{11}{12}$, $n = 6$?

d) Jaká je pravděpodobnost pro $p = \frac{11}{12}$, $n = 6$, že bude *aspoň* 11 dlouhých ran, *nejvýše* 10 dlouhých ran?

Pravděpodobnosti jsou obecně členy rozvoje $(p + q)^{2n}$. a) $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})^{12}$, jmenovatel 531 441, čitatelé p_0, p_1 až p_{12} jsou 1, 24, 264, 1760, 7920, 25 344, 59 136, 101 376, 126 720, 112 640, 67 584, 24 576, 4096; b) 0,8796...; c) členy rozvoje $(\frac{11}{12} + \frac{1}{12})^{12}$; d) $p_{11} = \binom{12}{11} (\frac{11}{12})^{11} \frac{1}{12} = 0{,}384$, $p_{12} = (\frac{11}{12})^{12} = 0{,}352$, tedy $p_{11} + p_{12} = 0{,}736$, $1 - (p_{11} + p_{12}) = 0{,}264$.

C. Úlohy o pokusech opakovaných, při nichž se základní pravděpodobnost mění. Pravděpodobnosti různých výsledků.

1. **Přejímací zkoušky.** V serii o S kusech je M kusů (neznámo kterých) vadných. Z přejímané serie vybere se namátkou s kusů a každý se zkouší přejímací zkouškou, při níž může nevyhověti m kusů. Jaká je pravděpodobnost, že nevyhoví právě těchto m kusů $(S \geqq M,\ S \geqq s \geqq m,\ M \geqq m)$?

$$\binom{M}{m}\binom{S-M}{s-m} : \binom{S}{s}.$$

2. P o s t ř e l o v á n í p o z o r o v a t e l e n. Z 10 pozorovatelen jest jich jen 7 obsazeno. Nepřítel zjistil a postřeluje 6 ze všech 10 pozorovatelen. Jaká je pravděpodobnost,

a) že je obsazeno všech 6 postřelovaných pozorovatelen,

b) že je postřelováno 5 pozorovatelen obsazených (a jedna neobsazená),

c) že jsou postřelovány 4 pozorovatelny obsazené (a dvě neobsazené),

d) že jsou postřelovány 3 pozorovatelny obsazené (a tři neobsazené),

e) že *aspoň* jedna neobsazená pozorovatelna je postřelována,

f) že *nejvýše* jedna neobsazená pozorovatelna je postřelována?

a) $p_6 = \binom{7}{6}\binom{3}{0} : \binom{10}{6}$; b) $p_5 = \binom{7}{5}\binom{3}{1} : \binom{10}{6}$; c) $p_4 = \binom{7}{4}\binom{3}{2} : \binom{10}{6}$; d) $p_3 = \binom{7}{3}\binom{3}{3} : \binom{10}{6}$. Jeden z případů a) až d) jistě nastane, t. j. $\sum_{i=3}^{6} p_i = 1$. e) $q_6 = 1 - p_6 = p_5 + p_4 + p_3 = \frac{29}{30}$; f) $p_5 + p_6 = \frac{1}{3}$.

3. V a d n é n á b o j e. Mezi 10 granáty jsou 3 (neznámo které) vadné. Jaká je pravděpodobnost, že při 6 výstřelech, vzatých z těchto 10 granátů, budou 2 vadné a 4 dobré?

Viz př. 2.

D. Geometrické pravděpodobnosti zásahu.

1. Část d zákopu délky l ($l \geqq d$) jest obsazena, zbytek neobsazen. Jaká je pravděpodobnost, že granátový náraz, který zákop zasáhl, byl účinný?

Je-li $d < \frac{l}{2}$, je pravděpodobnost účinného zásahu $\frac{d}{l}$, je-li $d \geqq \frac{l}{2}$ stačí mířiti na střed zákopu, aby byl náraz účinný.

2. V zákopu délky l jest obsazena část d $\left(d < \frac{l}{2}\right)$. Zákop byl zasažen dvěma nárazy; jaká je pravděpodobnost,

a) že první i druhý zásah byly zásahy neúčinné,

b) že oba byly účinné?

a) $\left(1 - \frac{d}{l}\right)^2$; b) $1 - \left(1 - \frac{d}{l}\right)^2 = \frac{d}{l^2}(2l - d)$, tedy $l \geqq \frac{d}{2}$, při čemž případ rovnosti prakticky odpadá.

3. Z pušky ráže a ($a = 2r$) střílíme na malý obdélníkový terč rozměrů z a v. Jaká je pravděpodobnost, že bude zasažen uvnitř terče určitý bod zásahy, *které celé leží v ploše terče?*

$\pi r^2/zv$.

4. Z pušky ráže a ($a = 2r$) střílíme na malý obdélníkový terč rozměrů z a v. Jaká je pravděpodobnost, že střela zasáhne na terči

daný bod, *když tento terč vůbec zasáhne*? (Terč považujeme za zasažený ještě tehdy, když střed průstřelu leží na stranách obdélníku!)

Mírou případů příznivých je opět πr^2, *mírou* případů možných je plocha terče zvětšená o jistý okraj, tedy $zv + 2(z + v) r + \pi r^2$; hledaná pravděpodobnost je $\pi r^2/[zv + 2(z + v) r + \pi r^2]$.

5. Z pušky ráže a ($a = 2r$) střílíme na terč
   a) kruhový s poloměrem R,
   b) čtvercový o straně l.

Jaká je pravděpodobnost, že střela zasáhne libovolný bod terče zásahem α) jestliže celý zásah leží v ploše terče, β) jestliže střed průstřelu aspoň ještě prošel hranou terče?

α) a) $\left(\frac{r}{R}\right)^2$; b) $\pi\left(\frac{r}{l}\right)^2$; je-li $R = l$, je poměr pravděpodobností a) : b) $\frac{1}{\pi}$;
β) a) $\left(\frac{r}{R + r}\right)^2$; b) $\pi \frac{r^2}{l^2 + 4lr + \pi r^2} \doteq \pi\left(\frac{r}{l + 2r}\right)^2$; je-li opět $R = l$, je poměr obou pravděpodobností přibližně $\frac{1}{\pi}$.

6. Rozhodový kužel při rozprasku šrapnelu vytvořil elipsu (poloosy a, b), která celá ležela uvnitř cílové plochy (kružnice poloměru r, obdélníku s rozměry z, v). Jaká je pravděpodobnost, že nebyl zasažen určitý bod, náhodně zvolený na cílové ploše?

$$1 - \frac{ab}{r^2}, \quad 1 - \pi \frac{ab}{zv}.$$

7. V jakém vztahu jsou rozměry a, b, r z předešlého příkladu, jestliže pro náhodně zvolený bod cílové plochy je táž pravděpodobnost zasažení i nezasažení? Jaká je pravděpodobnost, že rozpraskem nebude zasažen bod cílové plochy, která má právě tvar největšího obdélníku, opsaného elipse?

$$r = \sqrt{2ab}, \quad 1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}2146.$$

E. Střelba proti letadlům (*PL*).

1. Rozprasky střel baterie *PL*, která střílí stále s touž náplní[3]), vyplňují účinný prostor, za který je možno při malém rozstupu děl baterie pokládati ochranný paraboloid jediného děla.
   a) Určete tuto ochrannou parabolu!
   b) Jaké je *nebezpečí*, že bude zasažen letoun, který chce baterii bombardovat? Které jsou extrémní hodnoty tohoto nebezpečí?

[3]) T. zn. se stále týmž množstvím prachu, čili se stejnou počáteční rychlostí, která přirozeně závisí na velikosti náplně (množství prachu).

c) Jaká je *pravděpodobnost* tohoto zásahu?

a) Položme baterii do počátku pravoúhlé soustavy souřadné, osu x do horizontu; rovnice ochranné paraboly zní $x^2 = 4h(h - y)$, kde $h = \frac{v_0^2}{2g}$; v_0 je počáteční rychlost děl baterie. Proveďte rozbor! b) Letoun, který chce baterii bombardovat, letí stálou rychlostí v téže výši přes baterii, neboť jinak by nemohl cíl zaměřit. *Nebezpečí*, jemuž je při tom vystaven, definujeme jako veličinu přímo úměrnou době, po kterou je letoun v okruhu působnosti baterie, tedy uvnitř ochranného paraboloidu. To pak je plocha, která vznikne rotací paraboly a) kolem osy y. Tudíž pro letoun, který letí ve výši y, je nebezpečí $N_y = 4\frac{k}{c}\sqrt{h(h-y)}$, kde je k číselná konstanta, která závisí na počtu děl baterie, kadenci[4]) a pod., c rychlost letadla. $N_{\max}$ dostaneme zřejmě pro $y = 0$, $N_0 = 4\frac{k}{c}h$, maximální nebezpečí jest úměrno vertikálnímu dostřelu h; $N_{\min}$ dostaneme zřejmě pro $y = h$, $N_h = 0$. c) Za míru pravděpodobnosti lze vzíti poměr dvou nebezpečí, $p = N_y/N_0$, neboť $0 \leqq p \leqq 1$. Předpokládáme ovšem, že uvnitř ochranného paraboloidu je každý zásah účinný a že ve výši $y = 0$ je zásah jistý. Pak $p = \sqrt{1 - \frac{y}{h}}$.

2. Pravděpodobnost zásahu letounu za podmínek, uvedených v příkladě 1, je $p = \sqrt{1 - \frac{y}{h}}$.

a) Odvoďte podmínky, při nichž letoun bude (nebude) zasažen!

b) Jaká je pravděpodobnost, že letoun nebude zasažen?

c) Za jakých podmínek je táž pravděpodobnost zasažení i nezasažení?

d) Jak se změní vztahy pro malé bombardovací výšky?

Podle obecného vztahu pravděpodobnost nezávisí na rychlosti letounu a kadenci baterie, nýbrž jen na jeho výšce a palebné výšce baterie; definice nebezpečí by tudíž zasluhovala jistých rozšíření. a) $p = 1$ pro $\frac{y}{h} = 0$, tedy pro $y = 0$; $p = 0$ pro $1 - \frac{y}{h} = 0$, tedy pro $h = y$ (viz příklad 1); b) $q = 1 - p = 1 - \sqrt{1 - \frac{y}{p}}$; c) $p = q = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}h$; odvoďte týž výsledek metodou analytickou! d) y je velmi malé proti h, $p \doteq 1 - \frac{1}{2}\frac{y}{h} = 1 - \frac{g}{v_0^2}y$; $q \doteq \frac{g}{v_0^2}y$, komplementární pravděpodobnost je přímo úměrná výšce, nepřímo čtverci počáteční rychlosti děl baterie.

3. Úkolem letounu je přelet přes obrannou linii baterií *PL*,

[4]) Kadence je počet výstřelů za určitou časovou jednotku (zde za minutu).

které leží v přímce ve vzdálenosti $h = \frac{v_0^2}{2g}$ jedna od druhé. Snahou letce při přeletu baterie bude vydati se co nejmenšímu nebezpečí, proto přelétne baterii kolmo. Nechť letec přelétne mezi bateriemi B_1, B_2;

a) jaké *nebezpečí* mu hrozí od baterie B_1?
b) jaké *nebezpečí* mu hrozí od baterie B_2?
c) jaké je *nebezpečí* celkové?

Zvolme opět souřadnou soustavu tak, že B_1 (0, 0), B_2 (2h, 0); ochranný paraboloid baterie B_1 má rovnici $x^2 + z^2 = 4h\,(h - y)$ (osy x, z v horizontu, osa y vertikální), rovnice ochranných paraboloidů ostatních baterií dostaneme z této rovnice vhodnými translacemi podél osy x. a) $N_1 = 2\frac{k}{c}\sqrt{4h\,(h-y) - x^2}$, kde y je výška letounu, x jeho topografická vzdálenost od baterie B_1; b) $N_2 = 2\frac{k}{c}\sqrt{4h\,(h-y) - (2h-x)^2}$; c) $N_{x,y} = N_1 + N_2 = 2\frac{k}{c}\left(\sqrt{4h\,(h-y) - x^2} + \sqrt{4h\,(x-y) - x^2}\right)$, nebezpečí je tedy iracionální funkcí argumentů x, y.

4. *Nebezpečí*, kterému se vydává letoun za podmínek, uvedených v příkladě 3, je dáno výrazem

$$N_{x,y} = 2\frac{k}{c}\left(\sqrt{4h\,(h-y) - x^2} + \sqrt{4h\,(x-y) - x^2}\right).$$

Vyšetřete tento výraz a na základě výsledků stanovte *pravděpodobnost* zásahu!

$x = y = 0$, $N_{0,0} = 4\frac{k}{c}h$, což je maximální nebezpečí, jestliže letoun bombarduje jedinou baterii (viz příklad 1); $x = h$, $y = 0$, $N_{h,0} = 4\frac{k}{c}h\sqrt{3}$, též z názoru je patrné, že jde o $N_{\max}$; x libovolné, $y = h$, $N_{x,h} = 4i\frac{k}{c}h$, což je hodnota imaginární, kterou z názoru lze označiti jako podmínku bez nebezpečí; $p = \frac{N_{x,y}}{N_{h,0}} = \left(\sqrt{4h\,(h-y) - x^2} + \sqrt{4h\,(x-y) - x^2}\right)/2h\sqrt{3}$. Pro malé výšky a pro případ, že letoun proletuje uprostřed mezi dvěma bateriemi, je y velmi malé proti h, $x = h$, $p = 1$, tedy prakticky morální jistota zásahu.

5. Vyšetřete obě částečná nebezpečí N_1, N_2 z příkladu 3!

Zaveďme *redukovaná nebezpečí* $n_i = N_i/2\frac{k}{c}$, $i = 1,2$. Pak je $(n_1 + n_2)\,.\,(n_1 - n_2) = 4h\,(h - x)$ a tedy $n_1 \gtreqless n_2$ čili $N_1 \gtreqless N_2$ podle toho, zda $h \gtreqless x$.

6. Letoun byl zasažen granátovou střepinou; jaká je pravděpodobnost, že střepina byla účinná?

Průměty *vitálních částí letounu* do tří rovin k sobě kolmých jsou asi tyto:

pilot	0,35 m²	0,60 m²	0,35 m²	střed 0,43 m²
vrtule	0,05 m²	0,60 m²	0,30 m²	„ 0,32 m²
karter	0,60 m²	0,20 m²	0,50 m²	„ 0,43 m²
chladič	0,08 m²	0,56 m²	0,08 m²	„ 0,24 m²
lano	0,39 m²	0,00 m²	0,39 m²	„ 0,26 m²

Celková ohrožená plocha letounu tedy činí: $0{,}43 + 0{,}32 + 0{,}43 + 0{,}24 + 6 \,.\, 0{,}26 \doteq 3\,\mathrm{m}^2$ (lan je celkem 6, 4 ke kormidlu výškovému, 2 ke kormidlu směrovému). Průměty *celého letounu* do tří rovin k sobě kolmých buďtež f_1, f_2, f_2. Pak hledaná pravděpodobnost je $p = 3/\frac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3)$.

7. Jaká je pravděpodobnost přeseknutí lana řízení letounu střepinou, která letí svojí podélnou osou a) kolmo, b) rovnoběžně k lanu a zároveň kolmo k jedné z průměten (vyjma nárysnu, viz př. 6!)?

Účinné střepiny granátu mají tvar podlouhlých, ostrohranných kousků, které lze vepsati do obdélníku $h > s$. Délku lana označme l, průměr jeho d. Pak *ohrožená plocha* má velikost a) $l\,(h - d)$, b) $l\,(s - d)$. Označíme-li příslušnou projekci letounu f, je a) $p_1 = l\dfrac{h-d}{f}$, b) $p_2 = l\dfrac{s-d}{f}$.

8. Střepiny letí *mezi* krajními polohami, uvedenými v příkladě 7. Proveďte z tohoto hlediska číselný výpočet, je-li $l = 12$ m, $d = 0{,}5$ cm, $h = 6$ cm, $s = 1{,}5$ cm!

$l\,(h - d) = 0{,}66\,\mathrm{m}^2$, $l\,(s - d) = 0{,}12\,\mathrm{m}^2$: za *průměrnou ohroženou plochu* vezmeme střed těchto hodnot, $0{,}39\,\mathrm{m}^2$. Pak $p \doteq 4/10f$.

Metodika funkčního myšlení.

Dr. **Vladimír Ryšavý**, Praha.

Uznává se jednomyslně, že se má na střední škole pěstovati pojem funkce při každé příležitosti. Žáci se vskutku seznámí s funkčními závislostmi, ale s různou důkladností podle toho, jak toho žádá praktické užití, hlavně v geometrii. Není tedy divu, že na př. vlastnosti funkcí goniometrických jsou probírány podrobně. Nepoměrně chudší je znalost závislostí jednodušších, které se vyskytují ve fysice, jako úměrnost (hlavně složená), závislost kvadratická, logaritmická a exponenciální. Je sice pravda, že se v algebře o těchto funkcích také vykládá, ale často se počítá mechanicky, nemyslí se vůbec funkčně a podstatné vlastnosti funkcí zůstávají nepovšimnuty. O funkci exponenciální na př. vědí žáci obyčejně jen to, že nezávisle proměnná x je v exponentu a umějí trochu řešiti exponenciální rovnice. Středoškolská matematika se vůbec často spokojuje mechanisováním výkonů, dosazováním, sestavováním určovacích rovnic a jejich řešením. Skutečného myšlení funkčního skoro není a pěstuje se málo, ač se o tom dost mluví, hlavně v osnovách. Učebnice podávají jen zcela primitivní základy povahy