Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vladimír Kořínek

Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1928--1938

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D245--D253

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120808

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1928—1938.

U příležitosti jeho sedmdesátin napsal **Vladimír Kořínek.**

K šedesátinám prof. Petra vyšel v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, 57 (1928), 169—182, stručný nástin jeho života z pera prof. Fr. Nušla a stručný přehled jeho prací z pera prof. M. Kösslera. Účelem těchto řádek jest doplniti přehled Kösslerův za uplynulé desítiletí.

Nejdříve dlužno se zmíniti o 2. úplně přepracovaném vydání Petrovy velké učebnice o počtu integrálním (**91**), které sice vyšlo teprve roku 1931, avšak bylo již téměř celé hotovo před rokem 1928. Petr nepřidržoval se při psaní svých učebnic nikdy cizích vzorů, nýbrž postupoval vždy úplně samostatně, ať již při výběru látky neb při výkladu jednotlivých partií. To vše zvýšenou měrou platí pro 2. vydání Integrálního počtu. Kniha obsahuje řadu partií zcela původních, některé z nich jsou výsledkem vlastní Petrovy vědecké práce. Zmiňuji se zde jen o části pojednávající o řadách Fourierových. Petr dokazuje původní, úplně elementární metodou hlavní věty o rozvinutelnosti v řadu Fourierovu a to pro funkce, které jsou v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ integrály funkcí v $\langle 0, 2\pi \rangle$ podle Cauchy-Riemanna integrace schopných, a platnost odvozené teorie rozšiřuje ještě pro některé funkce obecnější. Velká většina funkcí v aplikacích se vyskytujících patří do této kategorie. 2. vydání své knihy přizpůsobuje Petr směrům, kterými se po válce bere vývoj matematiky. Tak v mnohých partiích používá značnou měrou prostředků z teorie množin. Protože do té doby neexistovala žádná česká kniha, která by vykládala základy této teorie, dal prof. Petr podnět, aby prof. Jarník napsal k jeho knize dodatek: Úvod do teorie množství. Po metodické stránce zdokonalil Petr svou knihu podstatně tím, že rozhojnil počet příkladů počítaných v textu, a že připojil ke každé partii řadu příkladů pro cvičení. Projevují se tím význačně v úpravě 2. vydání knihy dvě důležité stránky Petrovy učitelské činnosti: snaha stále přizpůsobovati své výklady i v klasických partiích pokračujícímu vývoji matematiky a seznamovati tak čtenáře i žáky s nejnovějšími pokroky vědy a dále snaha upraviti po stránce metodické výklady tak, aby přinesly učícím se co největší prospěch.[1])

V uplynulém desítiletí věnoval Petr skoro výhradně svůj zájem algebře a číselné teorii, kteréžto obory se vůbec těšily velké Petrově pozornosti. Do analysy patří jen práce (**74**) a (**76**). V práci (**74**) odvozuje Petr formuli pro přibližnou hodnotu určitého integrálu $\int\limits_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$, jsou-li známy hodnoty funkce $f(x)$ a jejích prvních k derivací v bodech $-1, 0, +1$. Numerický výpočet koeficientů formule a zbytku provádí pro $k = 4$.[2])

Druhá práce z analysy (**76**) týká se trigonometrických rozvojů pro $\log \Gamma(x)$ a derivace této funkce. Rozvoj pro $\log \Gamma(x)$ odvodil Kummer. Petr odvozuje tento rozvoj ze známé Gaussovy relace z teorie funkce Γ a dává mu jiný výhodnější tvar, aby řada trigonometrická v něm se vyskytující stejně jakož i její derivace byly v intervalu $\langle \varepsilon, 1 - \varepsilon \rangle$ stejnoměrně konvergentní. Vztah lze pak derivovati a odvoditi tak trigonometrické rozvoje pro derivace funkce $\log \Gamma(x)$. Dále ukazuje Petr, že řada trigonometrická, kterou našel Lerch pro $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \sin \pi x$, jest prostým důsledkem rozvojů Petrem odvozených.

Z algebraických prací Petrových jsou to předně tři práce (**81**), (**83**), (**86**) o separaci kořenů rovnic algebraických a o otázkách příbuzných. Tímto tématem zabýval se Petr již dříve v celé řadě pojednání: (**3**), (**21**), (**28**), (**29**), (**41**) a (**60**). V práci (**81**) podává Petr důkaz věty Stéphanosovy: Budiž $f(x) = 0$ algebraická rovnice m-tého stupně o reálných koeficientech. Buďtež $a < b < c$ tři reálná čísla. Označme si znakem $Z_{a,b}$ počet změn znaménkových

---

[1]) Podrobné vylíčení změn provedených v 2. vydání Integrálního počtu a vůbec ocenění celé knihy najde čtenář v recensi prof. E. Čecha: ČMF **62** (1933), 59—61.

[2]) Formulemi pro numerický výpočet určitých integrálů zabýval se Petr již dříve v práci (**53**) z roku 1915, kde uveřejnil bez důkazu formuli pro integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, známe-li hodnoty funkce a jejích $n - 1$ derivací v bodech a, b. V nedávné době se k této formuli vrátil anglický matematik G. N. Watson v práci: Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale. ČMF **65** (1936), 1—7. Watson formuli podrobně odvozuje. Jeho důkaz jest však jiný, než důkaz Petrův (neuveřejněný). Význam formule jest patrný z toho, že formule obsahuje $h = b - a$ v nejvyšší mocnině h^{n-1}, kdežto zbytek jest řádu $O(h^{2n+1})$. Další důkazy podali: Jan Gebauer: Řady vhodné k použití při přibližné integraci. ČMF **63** (1934), 152—166, Václav Hruška: Les formules de quadrature approchée de M. K. Petr. ČMF **66** (1937), 26—33.

v posloupnosti koeficientů polynomu[3])

$$(y + 1)^m f\left(\frac{ay + b}{y + 1}\right). \tag{*}$$

Pak platí

$$Z_{ab} + Z_{bc} \leqq Z_{ac}.$$

Větu tuto uveřejnil bez důkazu C. Stéphanos r. 1900 a po prvé ji dokázal A. Zoukis r. 1902.[4]) Petr podal již dříve v práci (**41**) vlastní původní důkaz této věty, používaje při tom polár binárních forem. V pojednání (**81**) podává důkaz proti (**41**) značně zjednodušený. Podobnými prostředky dokazuje v posledním paragrafu pojednání větu Descartesovu. Tento důkaz věty Descartesovy podržuje svou platnost i pro řady mocninné, v jichž posloupnosti koeficientů jest jen konečný počet změn znaménkových. Z věty Stéphanosovy jest velmi lehko viděti, že horní odhad pro počet reálných kořenů rovnice v intervalu (a, b), který dává věta Descartesova, jest menší neb nejvýše rovný odhadu, který dává věta Budan-Fourierova. V další práci (**83**) používá Petr metody, které již dříve v (**28**) užil pro důkaz věty Descartesovy a věty Budan-Fourierovy, pro důkaz věty Newton-Sylvesterovy. Tato věta byla vyslovena Newtonem, dokázána však teprve Sylvesterem.[5]) Pro horní odhad počtu kořenů rovnice o reálných koeficientech $f(x) = 0$ používá tato věta jako věta Budan-Fourierova posloupnosti

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(m)}(x),$$

kombinuje však tuto posloupnost ještě s posloupností polynomů

$$\mathfrak{A}_0(x),\ \mathfrak{A}_1(x),\ \mathfrak{A}_2(x),\ \ldots,\ \mathfrak{A}_m(x),$$

kterou sestrojuje určitým způsobem pomocí $f(x)$ a jejích derivací. Při tom se počítá změna znaménková v první posloupnosti jen tehdy, je-li na odpovídajícím místě posloupnosti druhé sled znaménkový. Horní odhad pro počet kořenů rovnice $f(x) = 0$ v intervalu (a, b) dostaneme, když zjistíme, oč jest počet změn znaménkových pro $x = a$ větší než pro $x = b$. Důkaz podaný Petrem v tomto pojednání platí i pro funkce analytické, které jsou regulární v jistém intervalu na ose reálné, uvnitř něhož leží interval (a, b), a pro něž má v posloupnost $f(a), f'(a), f''(a), \ldots$ jen konečný

[3]) Z_{ab} jest, jak známo, horní odhad kladných kořenů polynomu (*) podle věty Descartesovy, t. j. horní odhad kořenů polynomu $f(x)$ ležících v intervalu (a, b).

[4]) Cyp. Stéphanos: Question nr. 1795 v Intermédiaire des Mathématiciens, **7** (1900), 116—117. V (**41**) jest chybně udáno sv. 8. A. Zoukis: Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache. Bull. de la Soc. Math. de France, **30** (1902), 181—201.

[5]) I. Newton: Arithmetica universalis. — Sylvester: Philosophical Mag., 4 ser., **31** (1886), 214.

počet změn znaménkových. V pojednání (86) řeší Petr otázku, kolik kořenů má daná algebraická rovnice o reálných koeficientech, jejichž reálné části leží v daném intervalu (a, b). K tomu cíli sestrojuje k dané rovnici jisté posloupnosti polynomů, které mají úplně obdobné vlastnosti jako známé řetězce Sturmovy. Důkaz dá se lehko upraviti tak, že jest zároveň důkazem základní věty algebry pro polynomy o reálných koeficientech. Petr zde navazuje na své dřívější pojednání (60), kde se již tímto problémem zabýval. Aby co nejkratší cestou k uvedeným posloupnostem polynomů dospěl, vyšetřuje zbytky, které vznikají postupným dělením při Eukleidově algoritmu, provádíme-li jej na dva polynomy stupňů buď n-tého a $(n - 1)$-ního neb v obou případech n-tého. Pro tyto zbytky sestrojuje explicitní vyjádření ve formě determinantů, což již samo o sobě jest důležité.

V práci (85) podává Petr novou definici determinantu. Mějme m řad n-árních neurčitých, t. j. neurčité:

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_n^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \ldots,\ x_n^{(m)}. \end{array}$$

m-lineární alternující formou těchto neurčitých nazývá Petr formu $F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$, která jest lineární formou v každé řadě neurčitých a pro niž platí

$$F(x^{(1)}, \ldots, x^{(i)}, x^{(i+1)}, \ldots, x^{(m)}) = - F(x^{(1)}, \ldots, x^{(i+1)}, x^{(i)}, \ldots, x^{(m)})$$

$$\text{pro } i = 1, 2, \ldots, m - 1,$$

t. j. formu, která změní znaménko, zaměníme-li v ní i-tou a $(i + 1)$-ní řadu neurčitých. Petr nyní definuje determinant m-tého řádu jako alternující formu m-lineární m-árních neurčitých, která má koeficient u členu $x_1^{(1)}x_2^{(2)} \ldots x_m^{(m)}$ rovný 1. Definice tato má řadu výhod proti definici obvyklé. Jest opravdu překvapující, jak snadno a bezprostředně plynou z této definice různé věty o determinantech, a to i ty, které při obvyklé definici vyžadují složitých důkazů. Na příklad důkazy věty Laplaceovy a věty o násobení determinantů (této ještě v obecnějším znění než obvykle) zaujímají v Petrově pojednání pouhou stránku a jsou bezprostředně názorné.

Z číselně teoretických prací patří dvě (78) a (79) do aritmetiky kvadratických forem, jednoho z hlavních oborů, jimiž se Petr zabýval. Obě jsou věnovány komposici kvadratických forem. Práce (78) pojednává o komposici binárních kvadratických forem. Jde v podstatě o tuto otázku: Mějmě dvě primitivní binární kvadratické formy o celistvých koeficientech: $f(x) = a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$ a $g(y) = b_0y_1^2 + b_1y_1y_2 + b_2y_2^2$. Kdy existuje bilineární substituce

$$Z_1 = p_{11}x_1y_1 + p_{12}x_1y_2 + p_{21}x_2y_1 + p_{22}x_2y_2$$
$$Z_2 = q_{11}x_1y_1 + q_{12}x_1y_2 + q_{21}x_2y_1 + q_{22}x_2y_2$$

o celistvých koeficientech a taková, že determinanty druhého stupně matice koeficientů této substituce nemají společného dělitele > 1, která převádí součin $f(x)\, g(y)$ v primitivní binární formu $h(Z) = C_0Z_1^2 + C_1Z_1Z_2 + C_2Z_2^2$? Petr ukazuje přímou diskusí problému, že jest to možno tehdy a jen tehdy, když diskriminanty forem $f(x)$ a $g(y)$ mají tvar $r^2\Delta$, $s^2\Delta$, kdež r, s, Δ jsou čísla celá, r, s mimo to nesoudělná. V tomto případě má forma $h(Z)$ diskriminant Δ. Petr odvozuje pak explicitně výrazy pro koeficienty bilineární substituce p_{ik}, q_{ik} a pro koeficienty formy $h(Z)$. Dále ukazuje, že se jedná vlastně o komposici tříd, do níž formy f a g patří, to jest, že třídami forem f a g jest, za jisté další přirozené podmínky pro bilineární substituce, třída formy h jednoznačně určena. Výsledky v této práci dokázané nejsou nové. Problém formuloval a řešil již Gauss v Disquisitiones arithmeticae. Dále se jím zabýval kromě jiných Lejeune-Dirichlet, Arndt a Dedekind. Význam práce Petrovy spočívá v tom, že otázku řeší v její úplné obecnosti přímo a poměrně jednoduše. Vyšetřování Gaussova jsou velmi složitá a ostatní autoři převádějí buď nejdříve obecnou úlohu komposice na speciální případy jednodušší a ty řeší, neb řeší otázku pomocí různých prostředků celé teorii cizích. Práce (79) řeší otázku, kdy jest možná komposice n-árních kvadratických forem. Protože každou n-ární kvadratickou formu o nenulovém determinantu lze převésti lineární substitucí na součet čtverců neurčitých, stačí řešiti tento problém: Pro která n existuje bilineární substituce $z_i = \sum\limits_{j,k} p_{jk}^{(i)} x_j y_k$, pro niž platí identicky

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\ (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2).$$

A. Hurwitz[6]) ukázal, že jest to možno jen pro $n = 2, 4, 8$. Při důkaze používal vydatnou měrou teorie matic. Petr podává důkaz této věci opět elementárně a jednoduše. Zjednodušuje totiž předpokládanou bilineární substituci tím, že řady neurčitých x, y, z transformuje vhodnými ortogonálními substitucemi. Tím dostává na konec bilineární substituci jistého jednoduchého tvaru, o němž se dá lehko dokázat, že existuje právě toliko v případech $n = 2, 4, 8$.

Práce (82) a (88) týkají se zákonů reciprocity. V (88) podává Petr jednoduchý důkaz zákona reciprocity pro symboly Jacobiho. V (82) zabývá se dvěma Eisensteinovými důkazy zákona recipro-

---

[6]) A. Hurwitz: Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. Nachr. von d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1898, 309—316. Über die Komposition der quadratischen Formen. Math. Ann. 88 (1923), 1—25.

city pro zbytky bikvadratické a bikubické. Prvý důkaz týká se zbytků bikvadratických. Při důkaze používá Eisenstein eliptické funkce sn (sinam). Petr provádí důkaz pomocí eliptické funkce $\wp$, čímž se docílí jistých zjednodušení. Druhý důkaz Eisensteinův se týká zbytků bikvadratických i bikubických. Důkaz jest velmi složitý a Eisenstein jej provádí pomocí dvojných nekonečných součinů, které nejsou absolutně konvergentní. Petr používá vedoucí myšlenky Eisensteinovy, pracuje však s funkcí $\sigma(u)$ známou z Weierstrassovy teorie eliptických funkcí. Tím důkaz značně zjednodušuje. Celý postup provádí pro zbytky bikubické.

Z poslední doby máme dvě práce (89) a (90), které spolu souvisí. Starší z nich (90), ač byla publikována později, podává metodu, kterou lze zjistiti, zda daný polynom o celých racionálních koeficientech jest reducibilní mod p, kdež p jest dané prvočíslo, které nedělí diskriminant polynomu, a v případě kladném, jak stanoviti jeho mod p ireducibilní faktory. Metoda jest propracována do všech podrobností a znamenitě se hodí k numerickému výpočtu ireducibilních faktorů. Věc má velkou důležitost i pro zkoumání reducibility polynomů v tělese racionálních čísel, neboť při praktickém, t. j. numerickém řešení této úlohy jest obyčejně nejvýhodnější usuzovati z reducibility neb z ireducibility mod p na reducibilitu neb ireducibilitu v tělese racionálních čísel.[7])

Druhá práce (89) zabývá se numerickou konstrukcí base celých čísel pro konečná číselná algebraická tělesa $R(\Theta)$. Konstrukce postupuje takto: Budiž Θ celé algebraické číslo, jehož adjunkcí k tělesu racionálních čísel R vznikne těleso $R(\Theta)$. Θ nechť jest kořenem ireducibilní rovnice n-tého stupně $f(x) = 0$ v R s nejvyšším koeficientem 1. Pak base celých čísel v tělese $R(\Theta)$ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ má, jak známo, tento tvar: $\omega_k = \frac{\varphi_{k-1}(\Theta)}{d_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, kdež $\varphi_k(x)$ jest polynom k-tého stupně s celými racionálními koeficienty a d_k jsou kladná celá čísla. $\frac{d_k}{d_{k-1}} = c_k$ jsou rovněž celá čísla. Položme ještě $d_0 = 1$, $\varphi_0(x) = 1$. Při numerickém výpočtu base jedná se o stanovení čísel d_k a polynomů $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Čísla d_k lze stanoviti pomocí této věty: Buďtež $\Theta, \Theta_1, \ldots, \Theta_{n-1}$ kořeny rovnice $f(x) = 0$, pak výraz $\Delta(\Theta, \Theta_1, \ldots, \Theta_{k-1}) = (\Theta - \Theta_1) \,.\, (\Theta - \Theta_2) \ldots (\Theta_{k-2} - \Theta_{k-1})$ jest dělitelný $d_1 d_2 \ldots d_{k-1}$. Z této věty plyne, že k-tý determinantní dělitel diskriminantu rovnice $f(x) = 0$, když jej vyjádříme jakožto determinant součtů mocnin kořenů Θ_k, jest dělitelný číslem $d_1^2 d_2^2 \ldots d^2_{k-1}$. Tím máme pro d_k jen konečný počet možností, jichž počet jest ještě dále zmenšen

[7]) Metodu v tomto směru propracoval ve své disertaci dr. Štefan Schwarz.

jistými podmínkami dělitelnosti pro čísla d_k a pro elementární dělitele diskriminantu $f(x)$. Určení polynomů $\varphi_k(x)$ provádí se takto: Je-li $c_k = 1$, stačí položiti $\varphi_k(x) = x\, \varphi_{k-1}(x)$. Pro $c_k > 1$ platí, že $f(x) \equiv$ $\equiv P_{n-k}(x)\, \varphi_k(x)$ mod c_k a polynom $P_{n-k}(x)$ jest mod c_k dělitelem $f'(x)$, tedy mod c_k společným dělitelem $f(x)$ a $f'(x)$. Vyšetřování mod c_k dá se převésti na vyšetřování mod p, kdež p jsou prvočísla z c_k. Pak lze použíti výsledků z (**90**) o rozkladu polynomu v ireducibilní faktory mod p. Obě tyto práce jsou velmi významné. Číselná teorie algebraických čísel má dosud velmi málo prostředků ke skutečné numerické konstrukci útvarů, o nichž jedná. To jest bezesporně i po stránce teoretické její velká vada. Mimo to numerická konstrukce vhodných příkladů jest důležitá i pro pokrok dalšího bádání v tomto oboru. Velmi často jest totiž třeba přesvědčiti se napřed „empiricky" na vhodných numerických příkladech o chování se vyšetřovaných útvarů a teprve pak lze formulovati nové věty a hledati s jakousi nadějí na úspěch jejich důkazy. V poslední době zabývali se proto někteří matematikové[8]) numerickými konstrukcemi v teorii algebraických čísel. Petr v (**89**) řeší základní a velmi důležitou úlohu pro teorii algebraických čísel a to úplně obecně a propracovává ji do podrobností. Při tom s velkým důvtipem kombinuje různé vlastnosti dělitelnosti čísel, jež konstruuje, aby co nejvíce omezil počet potřebných zkoušek. Z numericky vypočítané base dají se lehko počítati některá důležitá čísla teorie, jako na př. diskriminant tělesa, a jistě bude lze na tomto základě vybudovati metody další pro výpočet jiných důležitých čísel v číselné teorii algebraických čísel. Škoda jen, že dosud není uveřejněna tato Petrova metoda s úplnými důkazy. Pojednání (**89**) jest jen obsah přednášky, kterou Petr pronesl na 2. sjezdu matematiků zemí slovanských v Praze r. 1934 a mnohé věty jsou tam vysloveny jen bez důkazů.

Z tohoto stručného přehledu jest patrno, že prof. Petr i v sedmé desítce svého života řešil řadu významných problémů matematických. K jednoduchosti mnohých těchto řešení přispěla podstatně velká virtuosita prof. Petra v numerickém počítání, která proniká celým jeho vědeckým dílem. Ani přehled prof. Kösslera, ani tento stručný článek nemůže vystihnouti všechny stránky jeho mnohostranné vědecké činnosti. Tím méně lze oceniti na těchto místech

---

[8]) Na příklad: N. R. Wilson: Integers and basis of a number field. — Trans. Am. Math. Soc. **29** (1927), 111—126. — Trygve Nagell: Zur algebraischen Zahlentheorie. Math. Zsch. **34** (1931), 183—193. Bemerkung über numerisches Rechnen mit algebraischen Zahlen. Journ. f. r. u. a. Math. **167** (1932), 70—72. — Harald Bergström: Über die Methode von Woronoj zur Berechnung einer Basis eines kubischen Körpers. Comptes rendus du Congrès int. des math., Oslo 1936. Tome 2., 9—10. A. Adrian Albert: Normalized integral bases of algebraic number field. I. Annals of Math. **38** (1937), 923—957.

celý význam Petrův. Neboť líčiti práci, kterou Petr do své sedmdesátky vykonal a stále koná jak na poli čistě vědeckém, tak i ve své činnosti učitelské, velké jeho úsilí, kterým zdvihl netušenou měrou úroveň naší matematiky a vychoval si řadu žáků, znamenalo by psáti nikoliv bezvýznamnou kapitolu z našich kulturních dějin dvacátého století. Nezbývá mně tudíž na konec nic než přáti prof. Petrovi i nám všem, kterým česká matematika přirostla k srdci, aby i v budoucnosti provázel jej stále jeho velký zájem o pokrok matematiky a jeho velká duševní svěžest, s níž až dosud sledoval a studoval nejnovější výsledky matematické práce.

Seznam prací prof. Karla Petra v desítiletí 1928—1938.

Seznam tento jest pokračováním seznamu, který sestavil k šedesátinám prof. Karla Petra prof. M. Kössler (tento Časopis, **58**, 1928, 180—182). Proto číslování prací pokračuje ze seznamu Kösslerova. Bylo užito zde těchto zkratek:

ČMF: Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. — Rozpravy ČA: Rozpravy České akademie věd a umění. Třída II. — Bull. Int.: Bulletin International. Académie tchèque des sciences. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine. — Věstník KČSN: Věstník Královské České Společnosti Nauk. Třída matematicko-přírodovědecká.

74. Poznámka k numerickému výpočtu určitých integrálů. ČMF **56** (1927), 67—70.
75. Sur la transformation linéaire des fonctions théta. Bull. Int. **28** (1927), 1—7. (Příslušný článek z Rozprav ČA jest již zaznamenán v seznamu Kösslerově, č. 70.)
76. O některých rozvojích trigonometrických v theorii funkce gamma. Rozpravy ČA **37** (1928), č. 1, 6 str.
77. Sur quelques développements trigonométriques dans la théorie de la fonction gamma. Bull. Int. **29** (1928), 171—173.
78. O komposici binárních forem kvadratických. (Sborník prací členů 2. třídy České akademie k 10. výročí trvání Československé republiky.) Rozpravy ČA **38** (1929), č. 17, 17 str.
79. O komposici n-árních forem kvadratických. Rozpravy ČA **39** (1929), č. 14, 12 str.
80. Composition des formes quadratiques n-aires Bull. Int. **30** (1929), 84—92.
81. O separaci kořenů rovnic algebraických. ČMF **59** (1930), 233—241.
82. O Eisensteinových důkazech zákona reciprocity při zbytcích bikvadratických a bikubických. Sprawozdania z Pierwszego Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich, 119—128.

83. O větě Newton-Sylvestrově pro separaci kořenů rovnic algebraických. ČMF **60** (1931), 1—11.
84. Poznámka k článku pana Hlaváčka. (Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace.) ČMF **60** (1931), 160—161.
85. O definici determinantu. ČMF **60** (1931), 201—213.
86. O separaci kořenů rovnic algebraických podle reálných částí. Rozpravy ČA **41** (1931), č. 11, 16 str.
87. La séparation des racines d'une équation algébrique suivant leur parties réelles. Bull. Int. **32** (1931), 10—13.
88. Poznámka k důkazu zákona reciprocity pro kvadratické zbytky. ČMF **62** (1933), 228—230.
89. O basi celých čísel v obecných tělesech algebraických. (Přednáška proslovená v plenární schůzi 2. sjezdu matematiků slovanských zemí.) ČMF **64** (1935), 62—72.
90. Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten nach einem Primzahlmodul. ČMF **66** (1937), 85—72.

Učebnice, články, recense.

91. Počet integrální. Sborník Jednoty čs. matematiků a fysiků, č. 13. 2. pozměněné vydání s dodatkem: Úvod do teorie množství od V. Jarníka. 1931. 8, XXIV, 725 stran, 24 obr.
92. František Nušl. Stručný životopisný náčrtek napsaný k jeho šedesátým narozeninám. ČMF **57** (1928), 73—80.
93. Dr. Fr. Rádl: Učebnice matematiky pro vysoké učení technické. V Praze 1931. Nákladem České Matice technické. (Recense.) ČMF **61** (1932), 81—90.