Václav Pleskot

Nomogramy ve Valouchových tabulkách

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D13--D17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120807

VYUČOVÁNÍ.

Nomogramy ve Valouchových tabulkách.*)

Václav Pleskot, Praha.

V novém (10.) vydání Valouchových tabulek je pět nomogramů pro vzorce, kterých se na střední škole často používá. Při jejich konstrukcích, které v dalším vyložíme, budeme se odvolávati na výsledky, které jsou odvozeny v článku „Základy nomografického zobrazování“ v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, **66** (1937), D 109 a násl.

Nomogram I pro větu sinovou znázorňuje vztah $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Jeho konstrukce je jednoduchá: Narýsujme osnovu rovnoběžek, které v soustavě souřadnic ξ, η mají rovnice $\eta = m \,.\, \sin\alpha$, kde m je modul. Na každé přímce, která protíná tuto osnovu, vznikají úseky měřené od přímky $\eta = 0$, o nichž platí hořejší úměra. Je tedy zřejmá správnost klíče k řešení nomogramu, který jako návod vyslovíme takto: Přilož měřítko nulovým bodem na rovnoběžku o kótě 0° tak, aby bod měřítka o kótě a padl na rovnoběžku $\alpha°$. Pak rovnoběžka o kótě $\beta°$ protne měřítko v bodě o kótě b.

Nomogramu lze použíti i v případech, kdy „původní“ daná kóta a není vhodná pro zakreslené rozměry nomogramu. Závadu odstraníme jednoduše tím, že místo „původní“ kóty a vezmeme její k násobek a odečtenou kótu b k-krát zmenšíme (neboť $ka : kb = \sin\alpha : \sin\beta$). Je-li $\alpha = 180° - \alpha'$ ($\alpha' \leqq 90°$), použijeme věty ve tvaru $\sin\alpha' : \sin\beta = a : b$.

Spojnicový nomogram II pro vzrůst jistiny ve složeném úrokování přísluší vztahu $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \,.\, r^n$. Pro sestrojení tohoto nomogramu nejdříve vztah logaritmujeme a pak přirovnáme ke kanonickému tvaru IV v citovaném článku a použijeme tam označených rovnic (a″), (b″) a (c″). Dostaneme tedy

$$\log K_0 + n \log \left(1 + \frac{p}{100}\right) - \log K_n = 0,$$

*) Při čtení tohoto článku nechť si laskavý čtenář vezme k ruce poslední (10.) vydání Logaritmických tabulek a vyhledá tam reprodukované nomogramy (na str. 133—136), jakož i „Vysvětlení“ na str. 201 a 202.

jako ekvivalentní s IV, t. j.

$$f_3 h_1 \quad + g_3 h_2 \qquad\qquad + h_3 \quad = 0.$$

Přirovnáním vyplývá:

$$h_1 = \log K_0,\ f_3 = 1,\ h_2 = n,\ g_3 = \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ a } h_3 = -\log K_n.$$

Zobrazovací rovnice pak jsou

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \alpha \log K_0; \qquad (\text{a}'')$$

$$\xi_2 = \delta, \qquad \eta_2 = \beta n; \qquad (\text{b}'')$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha\delta \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}{\beta + \alpha \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}, \quad \eta_3 = + \frac{\alpha\beta \log K_n}{\beta + \alpha \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}, \quad (\text{c}'')$$

kde α, β, δ jsou vhodné (jinak libovolné), nenulové konstanty.

Z rovnic (a″) dostaneme, že proměnná K_0 je zobrazena přímou logaritmickou stupnicí, podle rovnic (b″) se proměnná n zobrazuje také přímou stupnicí, a to měřítkem. U rovnic (c″) si však musíme zdůrazniti, že souřadnice ξ_3 a η_3 závisí na dvou parametrech (p, K_n). Má tedy každý bod dvě kóty. Spojíme-li body o stejných kótách, dostaneme na nákresně dvojnásobnou soustavu čar; jedna je kótovaná proměnnou p a druhá proměnnou K_n. Dostáváme tak t. zv. binární stupnici. Abychom vyšetřili rovnice čar jedné soustavy, stačí vyloučiti z ξ_3 a η_3 parametr druhé soustavy. Tak v našem příkladě je rovnicí soustavy čar p přímo rovnice pro ξ_3, protože v něm se již nevyskytuje proměnná K_n. To znamená, že soustava čar p je tvořena rovnoběžkami s osou η vytínajícími na ose ξ stupnici $\xi_3 = \dfrac{\alpha\delta \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}{\beta + \alpha \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$. Rovnice čar K_n je $\alpha\beta \log K_n \,.\, \xi_3 + \beta\delta \,.\, \eta_3 - \alpha\beta\delta \log K_n = 0$; z ní plyne, že i čáry K_n jsou přímky. [Přímky ty na ose η $(\xi_3 = 0)$ vytínají stupnici $\eta_3 = \alpha \log K_n$ a všechny procházejí bodem $(\delta; 0)$; protože stupnice $\alpha \log K_n$ na ose η je shodná se stupnicí $\alpha \log K_0$, je rýsování přímek K_n velmi pohodlné.]

Protože se jedná o nomogram spojnicový, je patrna správnost klíče: Spojnice bodů o daných kótách K_0 a n protne přímku p v bodě, kterým jde přímka o hledané kótě K_n.

Odečítáme-li na stupnici K_0 hodnoty $(10^m K_0)$, musíme současně u přímek K_n čísti hodnoty $(10^m K_n)$.

Průsečíkový nomogram III zobrazuje graficky závislost výrazu $Q_{\overline{n}|}$ na počtu procent při úrokování složeném a na počtu úrokovacích období a zároveň určuje průběh splátky a dluhu D, t. j. řeší vztahy:

$$\alpha)\quad \frac{1}{Q_{\overline{n}|}} = \frac{i}{1 - v^n}\left[= \frac{\frac{p}{100}}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{p}{100}}\right)^n}\right]$$

$$\beta)\quad a = D \cdot \frac{1}{Q_{\overline{n}|}}.$$

Pro zobrazení α) bylo použito rovnic (srv. D 112, cit. čl.)

$$\xi = \alpha_1 \log \frac{1}{Q_{\overline{n}|}} \qquad (a_1)$$

$$\eta = \beta_1 \log n, \qquad (b_1) \quad \text{a}$$

$$10^{\frac{\xi}{\alpha_1}} = \frac{\frac{p}{100}}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{p}{100}}\right)^{10^{\frac{\eta}{\beta_1}}}} \qquad (c_1)$$

(α_1, β_1) moduly.

Rovnice (a_1) praví, že čáry zobrazující proměnnou $\frac{1}{Q_{\overline{n}|}}$ jsou rovnoběžky s osou η; podobně z rovnice (b_1) plyne, že čáry n jsou rovnoběžky s osou ξ. Čáry zobrazující proměnnou p jsou křivé. Z principu nomogramů průsečíkových dostáváme pak klíč: Čáry, u nichž připsané kóty n, p a $\frac{1}{Q_{\overline{n}|}}$ splňují vzorec α), procházejí vždy jedním bodem.

Abychom zobrazili vztah β), nejprve jej logaritmujme

$$\log a = \log \frac{1}{Q_{\overline{n}|}} + \log D,$$

a pak zobrazovací rovnice pišme

$$\xi = \alpha_2 \log \frac{1}{Q_{\overline{n}|}}, \qquad (a'_1)$$

$$\eta = \beta_2 \log a, \quad \text{a} \qquad (b'_1)$$

$$\eta = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\,\xi + \beta_2 \log D. \qquad (c'_1)$$

(α_2, β_2) moduly.

Čáry zobrazující proměnné $\frac{1}{Q_{\overline{n|}}}$. a jsou opět rovnoběžky s příslušnými osami, i čáry D jsou rovněž rovnoběžky avšak o směrnici $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$, takže nomogram vztahu β) se skládá z trojnásobné soustavy přímek. Pro řešení β) platí klíč: Přímky, u nichž připsané kóty $\frac{1}{Q_{\overline{n|}}}$, D a a splňují vztah β), procházejí vždy jedním bodem.

Zvolíme-li $\alpha_1 = \alpha_2$, lze nomogramy vztahů α), β) na sebe tak položiti, aby rovnoběžky zobrazující proměnnou $\frac{1}{Q_{\overline{n|}}}$ splývaly. Proměnné n a a jsou sice při tom zobrazeny toutéž soustavou rovnoběžek, ale vzdálenosti jejich pro proměnnou n jsou rozdílné od vzdáleností pro proměnnou a (logaritmické stupnice o nestejných modulech). Je proto po ztotožnění v nomogramu zakreslena společná soustava rovnoběžek, u níž vzdálenosti tvoří měřítko a k odčítání proměnné n, resp. a nutno příslušnou rovnoběžku interpolovati, v této společné osnově, podle stupnic vyznačených na okrajích nomogramu.

Nomogramy IV a V jsou nomogramy spojnicové.

Nomogram IV, pro Wheatstoneův můstek, řeší vztah $x = R\frac{a}{1000 - a}$. Pro zobrazení nejprve vzorec logaritmujeme

$$\log\frac{a}{1000 - a} + \log R - \log x = 0,$$

a pak přirovnáme s kanonickým tvarem IV (viz cit. článek)

$$f_3 h_1 \qquad + g_3 h_2 \quad + h_3 = 0.$$

Dostaneme:

$$f_3 = 1,\ h_1 = \log\frac{a}{1000 - a},\ g_3 = 1,\ \ h_2 = \log R,\ h_3 = -\log x.$$

Zobrazovací rovnice tedy jsou:

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \alpha \log\frac{a}{1000 - a};$$

$$\xi_2 = \delta, \qquad \eta_2 = \beta \log R;$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha\delta}{\alpha + \beta}, \quad \eta_3 = + \frac{\alpha\beta \log x}{\alpha + \beta}.$$

Z těchto rovnic vyplývá, že všechny stupnice jsou přímé. Pro snadnou kontrolu správnosti nomogramu uvažme, že pro $a = 500$, $x = R$. To znamená, že z bodu $a = 500$ se promítá stupnice R do stupnice x.

Nomogram V přísluší vztahu

$$r = 0{,}000163\, b\, .\, t.$$

Pišme jej ve tvaru

$$0{,}000163 b\, .\, t - r = 0$$

a přirovnejme opět s kanonickým tvarem IV

$$f_3 h_1 + g_3 h_2 + h_3 = 0.$$

Dostaneme

$$f_3 = 0{,}000163 t,\ h_1 = b,\ g_3 = 1,\ h_2 = -r,\ h_3 = 0.$$

Zobrazovací rovnice jsou

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \alpha b;$$
$$\xi_2 = \delta, \qquad \eta_2 = -\beta\, .\, r;$$
$$\xi_3 = \frac{\alpha\delta}{\beta\, .\, 0{,}000163 t + \alpha}, \quad \eta_3 = 0.$$

Pro kontrolu nomogramu, eventuelně pro konstrukci, položme $0{,}000163 b = 0{,}1$, tedy $b = 613{,}5$, pro niž platí $r = 0{,}1 t$. To znamená, že z bodu $b = 613{,}5$ se promítá stupnice r do stupnice t do hodnot 10krát větších.

Všechny tyto nomogramy nemají za úkol, aby plně nahradily tabulky, které doprovázejí. Nemůžeme v nich odčítati hodnoty s přesností větší než na 3 místa. (Při větších rozměrech nomogramu bylo by lze odčítati i na více míst). Výhoda proti tabulkám je zase v tom, že hodnoty nezakreslené snadno interpolujeme odhadem „od oka" mezi hodnotami zakreslenými, a to s námahou značně menší, než je potřebí k interpolaci v tabulkách.*) Z nomogramu lehce postřehneme vzájemnou souvislost uvažovaných veličin. Vždy poměrně rychle a spolehlivě můžeme dosáhnouti výsledků, aniž bychom se snadno mýlili v řádech.

Budeme tedy raditi žákům, aby užívali nomogramů jako kontroly numerických výpočtů při školní práci, v domácích cvičeních i při písemných zkouškách. Doporučíme jim také, aby používali nomogramů k rychlé orientaci dříve, než provedou ciferný výpočet. Tak se jistě brzy objeví potřeba dalších nomogramů, jakož i snaha poznati, jak se nomogramy sestrojují, a tím i příležitost k rozvinutí grafického počtu na střední škole.**)

Zprávy o zkušenostech s nomogramy v logaritmických tabulkách, jakož i návrhy na jejich zlepšení a doplnění uvítají autoři tabulek jistě s povděkem.

---

*) Pro přesné a pohodlné odčítání ve spojnicových nomogramech doporučuje se užívati přímé rysky narýsované na průhledném proužku celuloidovém (na př. na celuloidovém trojúhelníku).

) Viz články: Václav Pleskot: O dvojitém logaritmickém papíru, Rozhledy, **14 (1934) R 36; Grafické počítání, Rozhledy, **15** (1935), 1 a násl.