Ivan Úlehla
K teorii vlastní energie elektronu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 2, 89--95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120781

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 75 (1950)

K TEORII VLASTNÍ ENERGIE ELEKTRONU.

IVAN ÚLEHLA, Praha.

(Došlo 20. ledna 1950.)

F. J. BELINFANTE použil ve své práci ve Physical Review (r. 1949, sv. 76, str. 226) FERMIHO kvantové elektrodynamiky bez obvyklé eliminace longitudinálních a skalárních fotonů k výpočtu vlastní energie elektronu. Výsledek, který obdržel, není však jednoznačný. Tuto nejednoznačnost lze odstranit vhodnou definicí stavového funkcionálu volného fotonového pole, která také umožňuje exaktně formulovat poruchovou theorii.

1. Vyjděme od LAGRANGEOVY funkce pro elektronové pole ψ a fotonové pole φ_ν v interakci

$$L = -\frac{1}{4\pi}\left(\tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\omega^2\right) + c\psi^+\left[\alpha^\mu\left(\frac{h}{2\pi i}\partial_\mu - \frac{e}{c}\varphi_\mu\right) - mc\beta\right]\psi, \quad (1)$$

kde $F_{\mu\nu} = \partial_\nu\varphi_\mu - \partial_\mu\varphi_\nu$ je tensor intensit elektromagnetického pole, $\omega = \partial_\mu\varphi^\mu$, φ_μ je čtyrpotenciál elektromagnetického pole, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ψ^+ je matice vlnových funkcí elektronu hermitovsky sdružená k ψ, α^ν, β jsou DIRACOVY matice.

Pro čtyrproud zavedeme označení:

$$s^\nu = -e\psi^+\alpha^\nu\psi.$$

Aby variační princip

$$\delta\int dt\int L\,dx\,dy\,dz = 0$$

byl ekvivalentní rovnicím elektromagnetického pole, je nutno připojit pro potenciály φ_ν LORENTZOVU podmínku $\omega = 0$, čili $\omega_{t=0} = 0$, $(\partial_\mu F^{\mu\nu})_{t=0} = 0$.

Pomocí kanonického formalismu [1] lze snadno odvodit výraz pro HAMILTONIÁN

$$H = H_f^{(0)} + H_m^{(0)} + H',$$

kde $H' = \int s_\nu\varphi^\nu\,dV$ je poruchový člen.

2. Pro kvantování volného fotonového pole užijeme pro komponenty čtyrpotenciálu $\varphi^\nu \equiv (\boldsymbol{\varphi}, \varphi)$ rozvojů

$$\varphi = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar c}{Vk}}\, b_k^* \, e^{ikx} + \text{konj.}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = -i \sum_k \sum_{r=1}^{3} c_{k,r} \, \mathbf{e}_k^r \, e^{ikx} + \text{konj.} \tag{2}$$

Zde jsou b_k, $c_{k,r}$ anihilační operátory vyhovující obvyklým zaměňovacím relacím a působícím na stavový funkcionál fotonového pole tak, že operátory

$$N_{k,r} = c_{k,r}^* c_{k,r}, \quad N_{k,4} = b_k^* b_k$$

mají charakteristické hodnoty pouze čísla 0, 1, 2, ... Dosazením rozvojů (2) do $H_f^{(0)} = H_{\text{trans}}^{(0)} + H_{\text{long}}^{(0)}$ obdržíme

$$H_{\text{trans}}^{(0)} = \sum_k (N_{k,1} + N_{k,2} + 1) \frac{\hbar c}{2\pi} k, \quad H_{\text{long}}^{(0)} = \sum_k (N_{k,3} - N_{k,4}) \frac{\hbar c}{2\pi} k \tag{3}$$

3. Výraz (3) není positivně definitivní. Avšak z vedlejších podmínek, kterým vyhovuje SCHRÖDINGERův stavový funkcionál $\psi^{(0)}$ volného fotonového pole vyplývá, že jsou přípustné jen stavy s positivní energií. Tyto podmínky zní

$$(\partial_\nu \varphi^\nu)\, \psi_{t=0}^{(0)} = 0, \qquad (\partial_\mu F^{\mu\nu})\, \psi_{t=0}^{(0)} = 0,$$

čili

$$(c^3{}_k + b_k{}^*)\, \psi^{(0)} = 0, \qquad (c_k{}^{*3} + b_k)\, \psi^{(0)} = 0. \tag{4}$$

Z nich vyplývá, že operátory $N_{k,3}$ a $N_{k,4}$ nemají určité hodnoty, ale že platí $(N_{k,3} - N_{k,4})\, \psi^{(0)} = 0$, t. j.

$$H_{\text{long}}^{(0)} \psi^{(0)} = 0.$$

Tyto rovnice lze vyložit tak, že longitudinální ($r = 3$) a skalární ($r = 4$) fotony se vyskytují ve vakuovém fotonovém poli v párech, jejichž počet je neurčitý.

Stavový funkcionál $\psi^{(0)}$ lze rozložiti na součin $\psi_{\text{trans}}^{(0)} \psi_{\text{long}}^{(0)}$. Transversální část funkcionálu $\psi_{\text{trans}}^{(0)}$ je možno normalisovat obvyklým způsobem a z rovnic (4) pro ni nevyplývají žádná omezení. Stačí tedy zabývat se pouze longitudinální částí funkcionálu $\psi_{\text{long}}^{(0)}$, která závisí pouze na proměnných, na něž působí operátory $c_{k,3}$ a b_k.

Přípustný stavový funkcionál $\psi_{\text{long}}^{(0)}$ může být rozvinut podle simultánních charakteristických funkcí $\chi_{n_{k,3} n_{k,4}}$ (kde $n_{k,3}$; $n_{k,4}$ jsou charakteristické hodnoty operátorů $N_{k,3}$; $N_{k,4}$) ve tvaru

$$\psi_{\text{long}}^{(0)} = \prod_k \sum_{n_{k,3}\, n_{k,4}} c_{n_{k,3}\, n_{k,4}}\, \chi_{n_{k,3}\, n_{k,4}} \tag{5}$$

Jak ukázal BELINFANTE, plyne z podmínek (4), že $c_{n_{k3}\, n_{k4}} = 0$ pro $n_{k,3} \neq n_{k,4}$ a $c_{n_{k,3}\, n_{k,4}} = (-1)^{n_k}$ pro $n_{k3} = n_{k4} = n_k$.

Avšak stavový funkcionál (5) nemůže být normalisován, neboť „normalisační integrál“ $\mathfrak{N} = (\psi^{*(0)}\psi^{(0)})$ diverguje. Kdybychom postupovali nyní dále, nemohli bychom exaktně definovat průměrnou hodnotu operátoru Q výrazem

$$Q_P\,(\psi^{*(0)}\psi^{(0)}) = (\psi^{*(0)} Q \psi^{(0)}).$$

Stejně by nebylo možné formulovat správně poruchovou theorii.

4. Definujeme proto stavový funkcionál $\psi^{(0)}_{\mathrm{long}}$ místo rovnicí (5) tímto způsobem: Nechť $\varkappa$ je číslo z řady 0, 1, 2, ..., potom nechť $\psi^{(0)}_{\mathrm{long}}$ má tvar

$$\psi^{(0)}_{\mathrm{long}} = \prod_k \left\{ \lim_{\varkappa\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \sum_{n_k=0}^{\varkappa} (-1)^{n_k} \chi^{(0)}_{n_k} \right\} = \prod_k \sum_{n_k} c_{n_k}\, \chi_{n_k}, \tag{6}$$

při čemž je nyní

$$\sum_n = \lim_{\varkappa\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \sum_{n=0}^{\varkappa}$$

Normalisační integrál tohoto stavového funkcionálu dává hodnotu 1.

Při libovolném výpočtu s funkcionálem (6) postupujeme tak, že výpočet provádíme se simultánními charakteristickými funkcemi $\chi^{(0)}_{n_k}$, kde $n_k = 0, 1, \ldots, \varkappa$, a teprve po provedení výpočtu přecházíme k limitě $\varkappa \to \infty$. Definicí (6) předpisujeme na př. způsob sčítání nekonečných řad, které se vyskytují při počítání maticových elementů a odstraňujeme nejednoznačnost, k níž dochází BELINFANTE.

5. Poruchový počet provedený na bezčasovou SCHRÖDINGEROVU rovnici

$$H\psi = E\psi$$

dává, rozvineme-li H, E, ψ podle parametru e, $E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)} + \ldots$, kde

$$E^{(1)} = (\psi^{*(0)} H^{(1)} \psi^{(0)}) = \overline{H}^{(1)},$$

$$E^{(2)} = \overline{H}^{(2)} + (\psi^{*(0)} H^{(1)} \psi^{(1)}). \tag{8}$$

Rozviňme nyní funkcionál $\psi^{(1)}$ podle simultánních charakteristických funkcionálů $\chi^{(0)}_i$ všech operátorů N_3, N_4 (index k vynecháváme). Z poruchového počtu obdržíme

$$\psi^{(1)} = \sum_i \frac{(\chi_i^{(0)} H^{(1)} \psi^{(0)})}{E^{(0)} - E_i^{(0)}}\, \chi_i^{(0)}.$$

Pro $\psi^{(0)}$ užijeme rozvoje (6) a označíme $(\chi^{(0)}_i H^{(1)} \chi^{(0)}_n)$ jako $H^{(1)}_{in}$. Z (8) pak vyplývá, že

$$E^{(2)} = H^{(2)} + \sum_i \sum_{n,n'} c_n c_{n'} \frac{H_{ni}^{(1)} H_{in'}^{(1)}}{E^{(0)} - E_i^{(0)}},$$

kde $\sum_n \sum_{n'}$ mají význam (7).

6. Nyní můžeme použít takto formulovaného počtu poruchového na výpočet vlastní energie elektronu, t. j. veličiny E pro případ, že máme jediný elektron (v klidu). V nulté aproximaci je $E^{(0)} = mc^2$. Protože $E^{(1)} = 0$, zajímáme se o $E^{(2)}$. V našem případě je $H^{(2)} = 0$ a $H^{(1)} = H'$, takže

$$E^{(2)} = \sum_i \sum_{n,n'} c_n c_{n'} \frac{H_{ni}' H_{in'}'}{E^{(0)} - E_i^{(0)}}$$

což je výraz formálně shodný s výrazem, který používá BELINFANTE.

Přejděme k výpočtu maticových elementů. Všechny možné procesy lze znázorniti v tabulce, kde n_1, n_2, n_3, n_4 udávají počet vektorových, longitudinálních a skalárních fotonů o energii k.

	Počáteční stav	Mezistav	Koncový stav
1	$n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = n_4 = n$	$n_1 = 1,\ n_2 = 0,\ n_3 = n_4 = n$	$n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = n_4 = n$
2		$n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = n_4 = n$	
3		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n+1,\ n_4 = n$	
4		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n-1,\ n_4 = n$	
5		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n,\ n_4 = n+1$	
6		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n,\ n_4 = n-1$	
7		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n+1,\ n_4 = n$	$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n+1,\ n_4 = n+1$
8		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n-1,\ n_4 = n$	$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n-1,\ n_4 = n-1$
9		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n,\ n_4 = n+1$	$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n+1,\ n_4 = n+1$
10		$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n,\ n_4 = n-1$	$n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = n-1,\ n_4 = n-1$

Koncové stavy 7—10 jsou fysikálně identické se stavy 1—6. Pro impuls elektronu platí následující rovnice: Nechť $\boldsymbol{p}_a$ je impuls elektronu v počátečním stavu ($\boldsymbol{p}_a = 0$, $E_a = mc^2$), $\boldsymbol{k}$ je impuls fotonu, pak je
poč. stav mezistav konc. stav

$$\boldsymbol{p}_a = \boldsymbol{p}_i + \frac{hc}{2\pi} \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_a.$$

Přeskoky elektronu ze stavu o kladné energii do stavu o záporné energii nejsou podle positronové theorie přípustné. Přicházejí však v úvahu přeskoky libovolného elektronu ve stavu negativní energie do mezistavu o kladné energii [2]. Při těchto přeskocích platí pro impulsy relace:

$$\boldsymbol{p}_e^- = \boldsymbol{p}_a + \frac{hc}{2\pi} \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_e^-,$$

kde $\boldsymbol{p}_e^-$ je impuls elektronu ve stavu s negativní energií.

Rozvineme-li vlnové funkce elektronu podobně jako φ_ν a nahradíme-li $\frac{1}{V}\sum_k \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathbf{dk}$ dostáváme pro vlastní energii elektronu výraz

$$E^{(2)} = \frac{e^2}{(2\pi)^{-2}} \lim_{\varkappa\to\infty} \int f(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{dk}}{k}, \tag{9}$$

při čemž je:

$$f_{1,2}(\mathbf{k}) = \sum_{r=1,2} \left\{ \frac{(\alpha \mathbf{e}^r_{-k}) \Lambda^+ (\alpha \mathbf{e}^r_{-k})}{\mu - \varepsilon - k} + \frac{(\alpha \mathbf{e}^r_k) \Lambda^- (\alpha \mathbf{e}^r_k)}{\mu + \varepsilon + k,} \right\}_P,$$

$$f_3(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\varkappa} c_n' c_n (n+1)\, \delta(n, n') . \left\{ - \right\}_P =$$

$$= \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=t}^{\varkappa} c^2_n (n+1) \left\{ \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_{-k}) \Lambda^+ (\alpha \mathbf{e}^3_{-k})}{\mu - \varepsilon - k} + \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_k) \Lambda^- (\alpha \mathbf{e}^3_k)}{\mu + \varepsilon + k} \right\}_P$$

a podobně

$$f_4(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=0}^{\varkappa-1} c^2_n \,.\, n \,.\left\{ \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_k) \Lambda^+ (\alpha \mathbf{e}^3_k)}{\mu - \varepsilon + k} + \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_{-k}) \Lambda^- (\alpha \mathbf{e}^3_{-k})}{\mu + \varepsilon - k} \right\}_P,$$

$$f_5(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\varkappa} c^2_n (n+1) \left\{ \frac{\Lambda^+}{\mu - \varepsilon + k} + \frac{\Lambda^-}{\mu + \varepsilon - k} \right\}_P,$$

$$f_6(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=0}^{\varkappa-1} c^2_n \,.\, n \,.\left\{ \frac{\Lambda^+}{\mu - \varepsilon - k} + \frac{\Lambda^-}{\mu + \varepsilon + k} \right\}_P.$$

Dále je

$$f_7(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\varkappa-1} c_n c_n' (n+1)\, \delta(n', n+1) . \left\{ - \right\}_P =$$

$$= -\frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\varkappa-1} c^2_n (n+1) \left\{ \frac{\Lambda^+ (\alpha \mathbf{e}^3_{-k})}{\mu - \varepsilon - k} + \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_k) \Lambda^-}{\mu + \varepsilon + k} \right\}_P$$

a podobně

$$f_8(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\varkappa} c^2_n \,.\, n \,.\left\{ \frac{\Lambda^+ (\alpha \mathbf{e}^3_k)}{\mu - \varepsilon + k} + \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_{-k}) \Lambda^-}{\mu + \varepsilon + k} \right\}_P,$$

$$f_9(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\varkappa-1} c^2_n \cdot (n+1) \left\{ \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_k) \Lambda^+}{\mu - \varepsilon + k} \right\} + \left\{ \frac{\Lambda^- (\alpha \mathbf{e}^3_{-k})}{\mu + \varepsilon - k} \right\}_P,$$

$$f_{10}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^{\varkappa} c^2_n \,.\, n \,.\left\{ \frac{(\alpha \mathbf{e}^3_{-k}) \Lambda^+}{\mu - \varepsilon - k} + \frac{\Lambda^- (\alpha \mathbf{e}_k^3)}{\mu + \varepsilon + k} \right\}_P.$$

V těchto výrazech je

$$\mu = \frac{2\pi E_a}{hc}, \quad \varepsilon = + \sqrt{\mu^2 + k^2}, \quad \delta(a, b) = 0 \text{ pro } a \neq b,$$

$$\delta(a, b) = 1 \text{ pro } a = b, \ \Lambda^{\pm} = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\mu\beta + \alpha\boldsymbol{k}}{\varepsilon}\right).$$

Symbol P u kroucené závorky znamená, že máme vzít průměrnou hodnotu z výrazu v závorce. To provedeme tak, že

$$\Lambda^{\pm} \text{ nahradíme výrazem: } \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\mu}{\varepsilon}\right),$$

$$(\alpha \mathbf{e}^r)\,\Lambda^{\pm}(\alpha \mathbf{e}^r) \text{ nahradíme výrazem, pro } r = 1{,}2 : \tfrac{1}{2}\left(1 \mp \frac{\mu}{\varepsilon}\right),$$

$$\Lambda^{\pm}(\alpha \mathbf{e}^3{}_k) = -\Lambda^{\pm}(\alpha \mathbf{e}^3{}_{-k}) \text{ nahradíme výrazem: } \pm \tfrac{1}{2}\frac{\mu}{\varepsilon},$$

$$(\alpha \mathbf{e}^3{}_k)\,\Lambda^{\pm} = -(\alpha \mathbf{e}^3{}_{-k})\,\Lambda^{\pm} \text{ nahradíme výrazem: } \pm \tfrac{1}{2}\frac{\mu}{\varepsilon}.$$

7. Pro integraci výrazu (9) položíme $k = \mu \sinh z$, $\varepsilon = \mu \cosh z$ a $\ln \dfrac{P + P^0}{mc}$ označíme M (P je maximální hodnota impulsu a P^0 maximální hodnota energie elektronu v intermediárním stavu). Ve všech výrazech $f_i(\boldsymbol{k})$ můžeme ještě za $c_n{}^2$ položit 1. Tak dostáváme pro transversální část $E^{(2)}$ z výrazů $f_{1,2}(\boldsymbol{k})$

$$E^{(2)}_{\text{trans}} = \frac{e^2\mu}{2\pi}\left(M - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{-2M}\right)$$

a pro longitudinální část $E^{(2)}$ z výrazů $f_3(\boldsymbol{k}) \div f_4(\boldsymbol{k})$

$$E^{(2)}_{\text{long}} = \lim_{\varkappa \to q}\Bigg\{(\tfrac{1}{2}e^{2M} + \tfrac{1}{2}e^{-2M} - 1 + 4M)\frac{1}{\varkappa}\sum_{n=1}^{\varkappa}(n+1) +$$
$$+ (\tfrac{1}{2}e^{2M} + \tfrac{1}{2}e^{-2M} - 1 - 4M)\frac{1}{\varkappa}\sum_{n=0}^{\varkappa-1} n -$$
$$- (\tfrac{1}{2}e^{2M} + \tfrac{1}{2}e^{-2M} - 1)\left(+\frac{1}{\varkappa}\sum_{n=1}^{\varkappa-1}(n+1) + \frac{1}{\varkappa}\sum_{n=0}^{\varkappa} n\right)\Bigg\}.$$

Provedeme-li naznačené součty a limitní přechod, obdržíme jednoznačně

$$E^{(2)}_{\text{long}} = \frac{e^2\mu}{2\pi}\,2M.$$

Vlastní energie elektronu tedy je dána výrazem

$$E^{(2)} = \frac{e^2\mu}{2\pi}\left(3M - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{-2M}\right),$$

který s $P \to \infty$ diverguje logaritmicky, tak jako WEISSKOPFŮV výraz odvozený s použitím eliminace longitudinálních a skalárních fotonů. [3]

[1] WENTŽEL: Quantentheorie der Wellenfelder 1943.
[2] BELINFARTE- l. c.
FEYNMAN: Phys. Rev 1949, sv. 76, str. 749, § 4.
[3] WEISSKOPF: Phys. Rev. 1939, sv. 72, str. 56:

A contribution to the theory of self energy of the electron.

(Summary of the preceding article)

In his paper in the Physical Review (1949, vol. 76, p. 226) F. J. BELINFANTE used FERMI quantum electrodynamics without the usual elimination of longitudinal and scalar photons for his calculation of the self energy of the electron. The result he obtained is not single-valued. This non single-valuedness can be eliminated, by a suitable definition of the state funkcional of the free photon field (equation 6). The self energy of the electron is then given by the last expression in the text, which diverges logarithmically similarly to that derived by WEISSKOPF using the elimination of longitudinal and scalar photons.

Contents of individual paragraphs. 1. The Lagrangian of the interacting electron and photon fields. 2. Quantising of the free photon field. 3. State funkcional of the free photon field. 4. New definition of the state funkcional 5. Calculus of perturbation. 6. and 7. Calculation of self energy of the electron.