Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ota Setzer

Vektorové součty v problému normál

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 2, D140--D144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120767

VEKTOROVÉ SOUČTY V PROBLÉMU NORMÁL.

Prof. OTA SETZER, Beroun.

V tomto příspěvku chci ukázati, jak lze užitím vektorových součtů odvoditi některé zajímavosti v problému normál křivek i ploch 2. stupně.

Zaveďme v prostoru pravoúhlé cartézské souřadnice a znakem $M(x/y/z)$ označme bod M o souřadnicích x, y, z.

Budiž dáno v prostoru m úseček $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$, které vycházejí z *téhož* počátečního (výchozího) bodu $A(x_0/y_0/z_0)$! Jejich koncové body jsou $B_i(x_i/y_i/z_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Vektorovým součtem prvních k těchto úseček jest úsečka $r_k = \overline{AR_k}$ a její koncový bod $R_k(X_k/Y_k/Z_k)$.

Z rovnoběžníků: $AB_1R_2B_2$, $AR_2R_3B_3$, $AR_3R_4B_4, \ldots, AR_{m-1}R_mB_m$ plyne:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= X_2 + x_0 \\ X_2 + x_3 &= X_3 + x_0 \\ X_3 + x_4 &= X_4 + x_0 \\ &\vdots \\ X_{m-1} + x_m &= X_m + x_0. \end{aligned}$$

Sečteme-li těchto $m - 1$ rovnic a současně vynecháme členy $X_2, X_3, X_4, \ldots, X_{m-1}$, které se opakují na obou stranách, dostaneme: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = X_m + (m - 1)x_0$, čili

$$X_m = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) - (m - 1)\, x_0$$

a obdobně

$$\left.\begin{aligned} X_m &= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) - (m-1)\, x_0 \\ Y_m &= \left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right) - (m-1)\, y_0 \\ Z_m &= \left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right) - (m-1)\, z_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Chceme-li vyjádřiti vektorový součet m úseček ležících v rovině, položíme $z_0 = z_i = 0$, pak také $Z_m = 0$.

Problémem normál pro středovou kuželosečku (předpokládáme ovšem $a^2 \mp b^2 = e^2 \neq 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

rozumíme úlohu, určiti normály vedené k ní z bodu $A(x_0/y_0)$. Tyto normály n_i jsou obecně čtyři a jejich paty $B_i(x_i/y_i)$ určíme jako průsečíky dané středové kuželosečky s rovnoosou hyperbolou *Apolloniovou*[1]):

[1]) B. BYDŽOVSKÝ: Úvod do analyt. geometrie, str. 218.

$$e^2xy \pm b^2xy_0 - a^2x_0y = 0. \tag{3}$$

Vyloučíme-li z rovnic (2), (3) veličiny y resp. x, dostaneme pro souřadnice x_i resp. y_i pat normál rovnice:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{b^2x^2y_0^2}{(e^2x - a^2x_0)^2} = 1 \text{ resp. } \frac{a^2x_0^2y^2}{(e^2y \pm b^2y_0)^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a po úpravě:

$$\left.\begin{aligned} x^4 - 2\,\frac{a^2x_0}{e^2}\,x^3 + \frac{a^2}{e^4}(a^2x_0^2 \pm b^2y_0^2 - e^4)x^2 + 2\,\frac{a^4x_0}{e^2}\,x - \frac{a^6x_0^2}{e^4} = 0 \\ y^4 \pm 2\,\frac{b^2y_0}{e^2}\,y^3 + \frac{b^2}{e^4}(b^2y_0^2 \pm a^2x_0^2 \mp e^4)y^2 - 2\,\frac{b^4y_0}{e^2}\,y \mp \frac{b^6y_0^2}{e^4} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pro kořeny těchto bikvadratických rovnic platí:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{2a^2x_0}{e^2},\quad \sum_{i=1}^{4} y_i = \mp\,\frac{2b^2y_0}{e^2} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{4} x_i\,x_k &= \frac{a^2}{e^4}\,(a^2x_0^2 \pm b^2y_0^2 - e^4) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (i \neq k) \\ \sum_{i,k=1}^{4} y_iy_k &= \frac{b^2}{e^4}\,(b^2y_0^2 \pm a^2x_0^2 \mp e^4) \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 &= \frac{2a^2(a^2x_0^2 \mp b^2y_0^2 + e^4)}{e^4} \\ \sum_{i=1}^{4} y_i^2 &= \frac{\mp\, 2b^2(a^2x_0^2 \mp b^2y_0^2 - e^4)}{e^4} \end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

Vektorovým součtem 4 normál z bodu A ke středové kuželosečce (2) jest úsečka $r_4 = \overline{AR_4}$, jejíž koncový bod $R_4(X_4/Y_4)$ má podle (1) a (5) souřadnice:

$$X_4 = \frac{2a^2x_0}{e^2} - 3x_0 = \frac{x_0}{e^2}\,(2a^2 - 3e^2)$$

$$Y_4 = \frac{\mp\, 2b^2y_0}{e^2} - 3y_0 = \frac{y_0}{e^2}\,(\mp\, 2b^2 - 3e^2)$$

neboli

$$X_4 = k_xx_0,\ Y_4 = k_yy_0 \tag{6}$$

kde konstanty

$$k_x = \frac{2a^2 - 3e^2}{e^2},\ k_y = \frac{\mp\, 2b^2 - 3e^2}{e^2}$$

jsou pro *stejnolehlé* kuželosečky neměnné (a při pevném bodě A zůstává pro ně také bod R_4 neměnný).

Opisuje-li naproti tomu výchozí bod A křivku s-tého stupně, opisuje koncový bod resultanty křivku téhož stupně.

Pohybuje-li se ve spec. případě výchozí bod A po kolmici k jedné ose o_1 středové kuželosečky, pohybuje se koncový bod vektorového součtu normál po přímce rovnoběžné s druhou osou o_2 kuželosečky, čili *kolmým průmětem resultanty do osy o_1 jest stále táž úsečka.*

K zajímavým výsledkům dospějeme při řešení problému normál *rovnoosé hyperboly.* V tomto případě:

$$a = b, \; e^2 = 2a^2$$

a v našich rovnicích platí dolní znaménka:

$$X_4 = -2x_0, \quad Y_4 = -2y_0.$$

Vektorovým součtem normál vedených z *pevného* bodu A k rovnoosé hyperbole jest úsečka, jdoucí středem hyperboly, jenž ji dělí v poměru $1:2$ a jejíž délka se rovná trojnásobné vzdálenosti bodu A od středu hyperboly. Nezávisí na velikosti os ani na směru asymptot, a proto *resultanta normál bodu A pro všechny rovnoosé hyperboly o témž středu jest společná.*

Součet *čtverců* normál vedených z bodu A k rovnoosé hyperbole jest:

$$S = \sum_{i=1}^{4} [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2] = \sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + y_i^2) -$$
$$- 2x_0 \sum_{i=1}^{4} x_i - 2y_0 \sum_{i=1}^{4} y_i + 4(x_0^2 + y_0^2),$$

což po dosazení z rovnic (5), (5b) dává: $S = 3(x_0^2 + y_0^2)$.

Součet čtverců normál vedených z pevného bodu k rovnoosým hyperbolám o *témž* středu jest konstantní a rovná se trojnásobnému čtverci vzdálenosti výchozího bodu od společného středu hyperbol.

Nebylo by nesnadné dokázati, že obdobné věty platí i pro pseudonormály, t. j. přímky, které jdou bodem A a které protínají kuželosečku pod týmž úhlem φ.

Vektorovým součtem 4 pseudonormál z pevného bodu k rovnoosým hyperbolám, majícím týž střed, různé osy i asymptoty, jest stále táž úsečka, která v tomto případě *neprochází* středem hyperbol. Součet čtverců těchto 4 pseudonormál je pro všechny soustředné rovnoosé hyperboly také konstantní.

Zcela obdobně budeme postupovati i při parabole

$$y^2 = 2px. \tag{7}$$

Jí odpovídající Apolloniova hyperbola[2]) jest:

$$xy + y(p - x_0) - py_0 = 0. \tag{8}$$

[2]) B. BYDŽOVSKÝ, Úvod, str. 221.

Příslušné eliminace veličin y resp. x z rovnic (7), (8) vedou ke kubickým rovnicím pro souřadnice tří pat normál:

$$\left.\begin{aligned} &x^3 + 2x^2(p - x_0) + x(p - x_0)^2 - \frac{p}{2} y^2_0 = 0 \\ &y^3 + 2py(p - x_0) - 2p^2 y_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Odtud vypočteme:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = -2(p - x_0), \sum_{i=1}^{3} y_i = 0 \tag{10}$$

Nyní provedeme opět vektorový součet 3 normál z bodu A k naší parabole: $r_3 = \overline{AR_3}$. Podle (1) a (10) jest

$$X_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i - 2x_0 = -2p, \; Y_3 = \sum_{i=1}^{3} y_i - 2y_0 = -2y_0 \tag{11}$$

Vektorovým součtem normál vedených z bodu k parabole jest úsečka, kterou osa paraboly dělí v poměru 1 : 2 a jež pro *různé* výchozí body A má koncový bod stále na rovnoběžce s vrcholovou tečnou ve vzdálenosti $-2p$.

Chceme-li v *prostoru* vésti normály z bodu $A(x_0/y_0/z_0)$ k středové ploše 2. stupně, na př.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{12}$$

určíme jejich paty $B_i(x_i/y_i/z_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 6$ takto:[3])

K bodu $A_1(x_0/y_0)$ stanovíme v rovině $z = 0$ ke křivce osového řezu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ příslušnou Apolloniovu hyperbolu:

$$H_1 \equiv e_1^2 xy + b^2 x y_0 - a^2 x_0 y = 0 \; (e_1^2 = a^2 - b^2) \tag{13}$$

a k bodu $A_2(x_0/z_0)$ určíme v rovině $y = 0$ ke křivce osového řezu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Apolloniovu hyperbolu:

$$H_2 \equiv e_2^2 xz + c^2 x z_0 - a^2 x_0 z = 0 \; (e_2^2 = a^2 - c^2), \tag{14}$$

nad hyperbolami H_1 (resp. H_2) sestrojíme válcové plochy $P_1 \perp xy$ ($P_2 \perp xz$); jejich průsečnicí jest prostorová křivka 3. stupně. Šest průsečíků této kubiky s danou plochou jest 6 pat hledaných normál.

---

[3]) KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ, Deskr. geom., II. díl., str. 485.

Předpokládejme v dalším, že uvažovaná plocha není rotační, takže je $e_i^2 \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Pak postupnou eliminací z rovnic (12), (13), (14) dostaneme pro souřadnice pat rovnice 6. stupně, jejichž první dva členy jsou ($e_3^2 = b^2 - c^2$):

$$\left.\begin{aligned} x^6 - \frac{2a^2(e_1^2 + e_2^2)x_0}{e_1^2 e_2^2}\,x^5 + \ldots = 0 \\ y^6 - \frac{2b^2(e_1^2 - e_3^2)y_0}{e_1^2 e_3^2}\,y^5 + \ldots = 0 \\ z^6 + \frac{2c^2(e_2^2 + e_3^2)z_0}{e_2^2 e_3^2}\,z^5 + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Pro součty kořenů platí:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{2a^2(e_1^2 + e_2^2)x_0}{e_1^2 e_2^2}, \quad \sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{2b^2(e_1^2 - e_3^2)y_0}{e_1^2 e_3^2}, \quad \sum_{i=1}^{6} z_i = \frac{-2c^2(e_2^2 + e_3^2)z_0}{e_2^2 e_3^2}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (1), vyjdou pro souřadnice koncového bodu resultanty hodnoty (h_x, h_y, h_z jsou konstanty):

$$\begin{gathered} X_6 = \sum_{i=1}^{6} x_i - 5x_0 = h_x x_0, \quad Y_6 = \sum_{i=1}^{6} y_i - 5y_0 = h_y y_0, \\ Z_6 = \sum_{i=1}^{6} z_i - 5z_0 = h_z z_0. \end{gathered} \tag{16}$$

Rovnice (16) ukazují, že mezi souřadnicemi počátečního i koncového bodu resultanty jest opět lineární závislost. Pohybuje-li se tedy bod A po ploše s-tého stupně, pohybuje se koncový bod vektorového součtu šesti normál po ploše *téhož* stupně.

Obdobné věty platí i pro ostatní nerotační středové kvadriky. Ve zvl. případě ($s = 1$) odvodíme:

Vedeme-li z různých bodů roviny ϱ, kolmé k ose o_1 středové kvadriky, normály k ploše, jest vektorovým součtem těchto 6 normál úsečka, jejíž kolmý průmět do osy o_1 jest pro všechny body roviny ϱ *společný*.

*

Somme vectorielle dans l'étude des normales aux coniques et aux surfaces du second degré. L'auteur étudie quelques détails élémentaires et intéressants de la théorie des normales aux coniques (surtout à l'hyperbole équilatère) et aux surfaces du second degré.