

Jan Pícha

Modifikace Kilchlingovy metody pro gravitační torsní váhu registrující v
pevných azimutech

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 75 (1950), No. 2, D171--D177

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/120763>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1950

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- [5] W. J. DE HAAS a J. VOOGD: Proc. Roy. Soc. Amsterdam, **33**, 1929, 206.
 [6] W. MEISSNER a R. OCHSENFELD: Naturwiss. **21**, 1933, 787.
 [7] D. SHOENBERG: Superconductivity, Cambridge, 1938.
 [8] ŠUBNIKOV a NACHUTIN: Nature, **139**, 1937, 589.
 [9] L. LANDAU: Nature, **141**, 1938, 688.
 [10] C. S. GORTER a H. CASIMIR: Physica **1**, 1934, 306.
 [11] J. G. DAUNT a C. V. HEER: Phys. Rev., **76**, 1949, 854 a 985.
 [12] R. DE L. KRONIG: Z. f. Phys., **78**, 1932, 744; **80**, 1932, 203.
 [13] W. HEISENBERG: Z. Naturforschg., **2a**, 1947, 185; **3a**, 1948, 65.
 [14] J. C. SLATER: Phys. Rev., **51**, 1937, 195; **52**, 1937, 214.
 [15] F. a H. LONDON: Proc. Roy. Soc., A, **149**, 1935, 71 a F. LONDON: Une conception nouvelle de la supraconductibilité; Paris 1937.
 [16] R. BECKER, G. HELLER a F. SAUTER: Z. f. Phys., **85**, 1933, 772.
 [17] M. DÉSIRANT a D. SHOENBERG: Nature **159**, 1947, 201.
 [18] A. B. PIPPARD: Proc. Roy. Soc., A, **191**, 1947, 399.
 [19] I. ŠIMON: Phys. Rev., **77**, No. 1, 1950.
 [20] F. BITTER, J. GARRISON, A. HALPERN, E. MAXWELL, J. C. SLATER a F. SQUIRE: Phys. Rev., **70**, 1946, 97.
 [21] D. H. ANDREWS, R. M. MILTON a W. DE SORBO: J. Opt. Soc. Am., **36**, 1946, 518.
 [22] N. FUSON: J. Opt. Soc. Am., **38**, 1948, 845.

*

Physics of Low Temperatures. Part II: Superconductivity. Among the first important discoveries made after attaining the temperatures of liquid helium was the superconductivity of some metals. Although a vast amount of experimental facts has been collected since that time (1911) the difficulties in the interpretation of these facts in terms of the theories of electronic conduction in metals seem still to be insurmountable. In this article a brief survey is given both of the experimental as well as the theoretical aspects of the problem.

MODIFIKACE KILCHLINGOVY METODY PRO GRAVITAČNÍ TORSNÍ VÁHU REGISTRUJÍCÍ V PEVNÝCH AZIMUTECH.

Věnováno panu profesorovi Dr Stanislavu Hanzlíkovi k jeho sedmdesátinám v den 11. května 1948.

JAN PÍCHA, Praha.

V roce 1926 sestrojil K. KILCHLING rovnoměrně se otáčející gravitační váhu, která při velmi pomalém otáčení a tedy při spojitě změně azimutu zaznamenávala na fotografické desce spojitou křivku místo obvyklé soustavy bodů [1]. Ukázal též [2], jak lze z průběhu této křivky stanovit druhé parciální derivace potenciálu tíže U

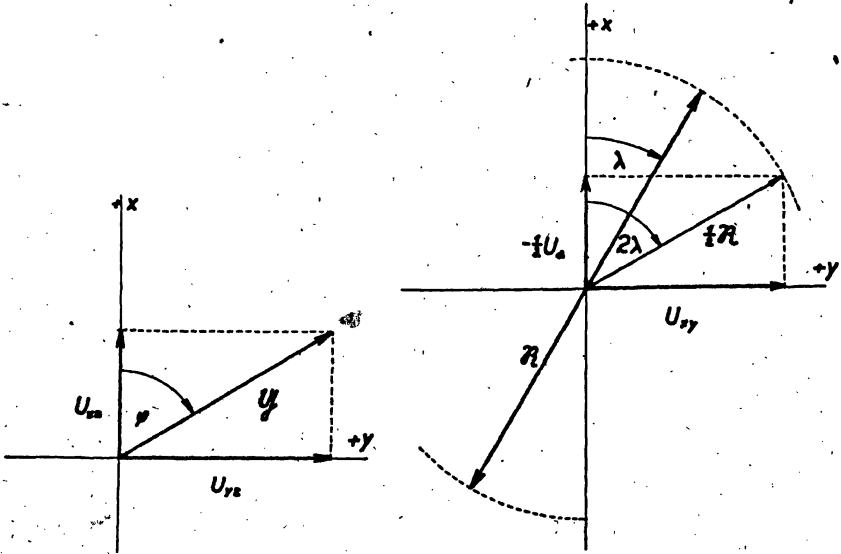
$$U_{xz} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, U_{yz} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, 2U_{xy} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Pokusil jsem se aplikovati tuto metodu na měření gravitační vahou registrující s obvyklým zastavováním v určitém sledu pevných azimutů.

Značí-li n čtení na desce v azimutu α , n_0 čtení v případě, že by na vahadlo nepůsobila žádná síla, potom rozdíl $n - n_0$ představuje výchylku vahadla torsní váhy a platí rovnice [3]

$$n - n_0 = a(U_{\Delta} \sin 2\alpha + 2U_{xy} \cos 2\alpha) + b(U_{yz} \cos \alpha - U_{xz} \sin \alpha), \quad (1)$$

kde a, b jsou konstanty přístroje. Azimut α počítáme kladně od severu přes východ na jih. K určení pěti neznámých $n_0, U_{xz}, U_{yz}, U_{\Delta}$ a $2U_{xy}$ stačí měřit jedním vahadlem v 5 různých azimutech nebo při dvojité



Obr. 1.

Obr. 2.

Obr. 1. Horizontální gradient tíhového zrychlení \mathcal{G} sestavený ze složek U_{xz} a U_{yz} .

Obr. 2. Křivostní charakteristika \mathcal{R} sestavená pomocí vektoru $\frac{1}{2}\mathcal{R}$ a jeho složek $-\frac{1}{2}U_{\Delta}$ a U_{xy} .

váze oběma vahadly ve třech různých azimutech. Horizontální gradient tíhového zrychlení (obr. 1), t. j. velikost a směr největšího stoupání horizontální složky tíhového zrychlení, je určen vztahy

$$G = \sqrt{U_{xz}^2 + U_{yz}^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{yz}}{U_{xz}}. \quad (2)$$

Pro křivostní charakteristiku hladinové plochy potenciálu tíže v daném místě platí (obr. 2)

$$R = g \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}} \right) = \sqrt{(2U_{xy})^2 + U_{\Delta}^2}, \quad \operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2U_{xy}}{-U_{\Delta}}, \quad (3)$$

kde r_{\min} a r_{\max} jsou hlavní poloměry křivosti hladinové plochy a g je tíhové zrychlení. Podle obr. 1 a 2

$$\begin{aligned} U_{zz} &= G \cos\varphi, & U_{yz} &= G \sin\varphi, \\ U_{\Delta} &= -R \cos 2\lambda, & 2U_{xy} &= R \sin 2\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Užitím výrazů (4) lze rovnici (1) dáti tvar

$$n - n_0 = aR \sin 2(\lambda - \alpha) + bG \sin(\varphi - \alpha). \quad (5)$$

Označíme-li nyní obecně

$$n - n_0 = F(\alpha),$$

$$aR \sin 2(\lambda - \alpha) = a(U_{\Delta} \sin 2\alpha + 2U_{xy} \cos 2\alpha) = F_1(2\alpha), \quad (6)$$

$$bG \sin(\varphi - \alpha) = b(-U_{zz} \sin \alpha + U_{yz} \cos \alpha) = F_2(\alpha),$$

máme

$$F(\alpha) = F_1(2\alpha) + F_2(\alpha). \quad (7)$$

Rovnice (7) představuje zřejmě zmíněnou křivku KILCHLINGOVU pro velmi pomalu a rovnoměrně se otáčející gravitační váhu. Křivka ta se skládá ze dvou harmonických funkcí a to $F_1(2\alpha)$ o periodě π a $F_2(\alpha)$ o periodě 2π ; perioda výsledné křivky $F(\alpha)$ je tedy 2π . Z rovnic (6) vidíme, že $F_1(2\alpha) = 0$ pro azimut

$$\alpha = \lambda \pm k \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

a obdobně $F_2(\alpha) = 0$ pro azimut

$$\alpha = \varphi \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Známe-li tedy U_{zz} , U_{yz} , U_{Δ} a $2U_{xy}$ nebo R , G , λ a φ , dovedeme křivku $F(\alpha)$ pro příslušné stanoviště vypočítat.

Příklad I.

Stanoviště: Praha II, Ke Karlovu 3, v zahradě.

Přístroj: Gravitační váha Askania Z 40, č. 716 (321861) s dvěma vahadly a samočinnou fotografickou registrací.

Datum: 8. V. 1947.

Měřeno: Oběma vahadly v 5 azimutech rostoucích po 72° .

Střední hodnoty výsledků vahadla I a II

$$U_{zz} = -68,0 \text{ E}, \quad U_{yz} = +43,4 \text{ E}, \quad U_{\Delta} = -187,5 \text{ E}, \quad 2U_{xy} = +124,2 \text{ E},$$

$$G = 80,7 \text{ E}, \quad \varphi = 147^\circ 27' 09'', \quad R = 224,9 \text{ E}, \quad \lambda = 16^\circ 45' 36''$$

(1 E = 1 Eötvös = $1 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$).

Hodnoty konstant:

$$a = 0,08445, \quad b = 0,14725$$

(průměry velmi málo se lišících hodnot pro vahadlo I a II).

Rovnice (6) dávají

$$F_1(2\alpha) = -15,83 \sin 2\alpha + 10,49 \cos 2\alpha,$$

$$F_2(\alpha) = +10,01 \sin \alpha + 6,39 \cos \alpha.$$

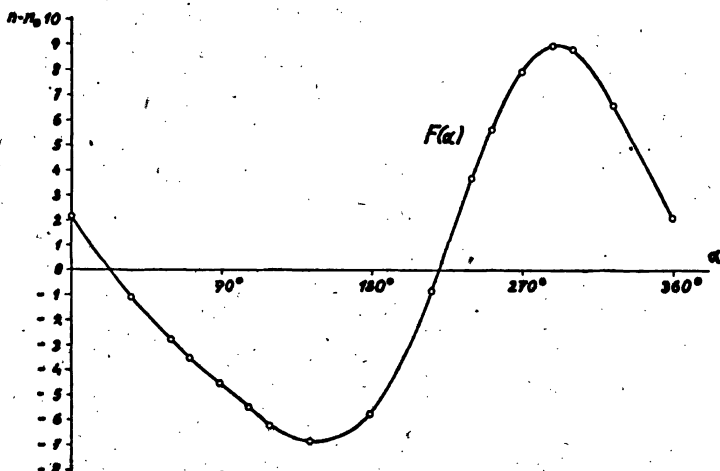
Průběh těchto funkcí a výsledná křivka $F(\alpha)$ je na obr. 3. Z něho vidíme, že průsečíky křivek $F_1(2\alpha)$ a $F_2(\alpha)$ s osou α souhlasí se vzorci (8) a (9).

Nyní naopak ze známého průběhu křivky $F(\alpha)$ stanovíme všechny neznámé veličiny. Označme

$$\operatorname{tg} 2\lambda' = \left| \frac{P}{Q} \right|, \quad \operatorname{tg} \varphi' = \left| \frac{M}{N} \right|. \quad (10)$$

Pro P, Q, M, N plyne z hodnot funkce $F(\alpha)$ v různých speciálních azimutech na př.

$$\begin{aligned} P &= F(0^\circ) + F(180^\circ) = -F(90^\circ) - F(270^\circ) = \dots \\ Q &= -F(45^\circ) - F(225^\circ) = F(135^\circ) + F(315^\circ) = \dots \\ M &= F(0^\circ) - F(180^\circ) = \sqrt{2}[F(45^\circ) + F(315^\circ)] = \\ &= -\sqrt{2}[F(135^\circ) + F(225^\circ)] = \dots \\ N &= F(270^\circ) - F(90^\circ) = -\sqrt{2}[F(45^\circ) + F(135^\circ)] = \\ &= \sqrt{2}[F(225^\circ) + F(315^\circ)] = \dots \end{aligned} \quad (11)$$



Obr. 3. Průběh vypočtených harmonických funkcí $F_1(2\alpha)$ a $F_2(\alpha)$ a výsledná křivka KILCHLINGOVA $F(\alpha)$.

Potom

$$\lambda = \lambda' \dots \dots \dots \text{pro } P > 0, Q > 0 \quad \lambda = 90^\circ + \lambda' \dots \text{pro } P < 0, Q < 0$$

$$\lambda = 90^\circ - \lambda' \text{ pro } P > 0, Q < 0 \quad \lambda = 180^\circ - \lambda' \dots \text{pro } P < 0, Q > 0$$

a obdobně

$$\varphi = \varphi' \dots \dots \dots \text{pro } M > 0, N > 0 \quad \varphi = 180^\circ + \varphi' \dots \text{pro } M < 0, N < 0$$

$$\varphi = 180^\circ - \varphi' \text{ pro } M > 0, N < 0 \quad \varphi = 360^\circ - \varphi' \dots \text{pro } M < 0, N > 0.$$

Ostatní veličiny vypočteme z výrazů

$$R = \frac{1}{2a} \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad G = \frac{1}{2b} \sqrt{M^2 + N^2},$$

$$U_{xz} = \frac{N}{2b}, \quad U_{yz} = \frac{M}{2b}, \quad U_{\Delta} = -\frac{Q}{2a}, \quad 2U_{xy} = \frac{P}{2a} \quad (12)$$

Příklad 2.

Stanoviště: Praha II, Albertov 6, seismický sklep.

Přístroj: Jako v př. 1.

Datum: 27. I. až 28. I. 1948.

Měřeno: Oběma vahadly v 10 nepravidelných azimutech.

Vyčíslení desky.

Vahadlo I					Vahadlo II				
poř. čís.	α	n	n_0	$n - n_0 = F(\alpha)$	poř. čís.	α	n'	n'_0	$n' - n'_0 = F(\alpha)$
1	180°	2,4		-5,78	1	0°	12,7		2,29
2	252°	13,8		5,62	2	72°	6,9		-3,51
3	270°	16,1		7,92	3	90°	5,8		-4,61
4	300°	17,0		8,82	4	120°	4,2		-6,21
5	324°	14,8		6,62	5	144°	3,6		-6,81
6	0°	10,3		2,12	6	180°	4,8		-5,61
7	36°	7,1	8,18	-1,08	7	216°	9,6	10,41	-0,81
8	60°	5,4		-2,78	8	240°	14,1		3,69
9	90°	3,8		-4,38	9	270°	18,4		7,99
10	108°	2,7		-5,48	10	288°	19,4		8,99
1	180°	2,4		-5,78	1	0°	12,7		2,29
2	252°	13,8		5,62	2	72°	6,8		-3,61
3	270°	16,1		7,92	3	90°	5,8		-4,61

Velikost n_0 byla vypočtena jako střední hodnota výrazů

$$n_0 = \frac{1}{5}(n_1 + n_2 + n_3 + n_7 + n_{10}) = \frac{1}{5}(n_1 + n_3 + n_6 + n_9) = \frac{1}{5}(n_1 + n_4 + n_8)$$

a obdobně n'_0 . Průběh křivky $F(\alpha)$ je na obr. 4. Z něho odvozené hodnoty $F(\alpha)$ pro speciální azimuty jsou

$$F(0^\circ) = 2,24, \quad F(45^\circ) = -1,73, \quad F(90^\circ) = -4,57, \quad F(135^\circ) = -6,72, \\ F(180^\circ) = -5,72, \quad F(225^\circ) = 0,88, \quad F(270^\circ) = 7,94, \quad F(315^\circ) = 7,56.$$

a střední hodnoty veličin vypočtené ze vzorců (11)

$$P = -3,425, \quad Q = 0,845, \quad M = 8,153, \quad N = 12,130.$$

Pro hodnoty konstant a, b jako v př. 1 dostáváme dále podle vzorců (10) a (12)

$$R = 20,89 \text{ E}, \quad \lambda = 180^\circ - \lambda' = 141^\circ 55' 46'', \\ G = 49,63 \text{ E}, \quad \varphi = \varphi' = 33^\circ 54' 24'',$$

$$U_{xz} = 41,19 \text{ E}, \quad U_{yz} = 27,68 \text{ E}, \quad U_{\Delta} = -5,00 \text{ E}, \quad 2U_{xy} = -20,28 \text{ E}.$$

Kontrolní měření dne 27. I. 1948 týmž přístrojem na stejném stanovišti ve třech azimutech dává výsledky

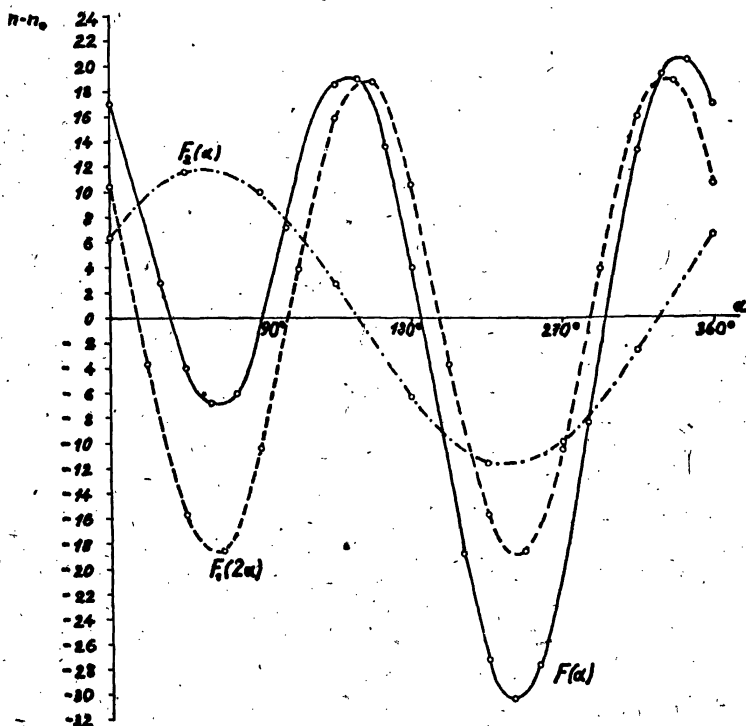
$$R = 22,11 \text{ E}, \quad \lambda = 142^\circ 44' 15'', \\ G = 49,01 \text{ E}, \quad \varphi = 33^\circ 35' 52'',$$

$$U_{xz} = 40,82 \text{ E}, \quad U_{yz} = 27,12 \text{ E}, \quad U_{\Delta} = -5,90 \text{ E}, \quad 2U_{xy} = -21,31 \text{ E}.$$

Všechny výsledky v př. 1 a 2 je ovšem třeba ještě dále opravit o územní korekce.

Vidíme tedy, že praktické využití naznačené metody je možné dvojím způsobem:

a) Měříme obvyklým způsobem ve 3 nebo v 5 rovnoměrně rostoucích azimutech. Z hodnot takto získaných vypočteme křivky $F_1(2\alpha)$ a $F_2(\alpha)$ a jejich složením najdeme křivku $F(\alpha)$. Průsečíky křivek $F_1(2\alpha)$ a $F_2(\alpha)$ s osou α jsou kontrolou vypočtených úhlů λ a φ (viz rovnice (8) a (9)). Užitím rovnic (11) a (12) pro hodnoty funkce $F(\alpha)$ odečtené z grafu lze kontrolovat správnost ostatních z měření vypočítaných veličin.



Obr. 4. KILCHLINGOVA křivka $F(\alpha)$ sestavená z měření torsní vahou oběma vahadly v 10 nepravidelných azimutech.

b) Měříme v řadě rovnoměrně neb nerovnoměrně zvolených azimutů. Počet a velikost jejich volíme tak, aby z naměřených hodnot byla křivka $F(\alpha)$ co nejdokonalěji vystižena. Znajíce $F(\alpha)$ postupujeme jako v příkladě 2.

U gravitační váhy kteréhokoli typu Askania je volba azimutů ome-

zena zařízením váhy na zastavování ve 3, 4 nebo 5 pravidelných azimutech. Ve všech uvedených případech je první azimut stejný. Můžeme tedy zařídit zastavování váhy v 10 azimutech, z nichž je pouze 8 poloh navzájem různých. Pro vahadlo I jsou to azimuty $\alpha = 180^\circ, 252^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 324^\circ, 36^\circ, 60^\circ, 108^\circ$ a pro vahadlo II $\alpha = 0^\circ, 72^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 240^\circ, 288^\circ$. Z měření v těchto polohách dostaneme v intervalu od 0° do 360° pro křivku $F(\alpha)$ celkem 16 vhodně ležících bodů, takže její konstrukce nečiní obtíží.

Desku takto získanou lze vyčíslit buď normálním způsobem pro 3 nebo 5 azimutů tak, že z ní vybereme čtení v příslušných azimutech, nebo výše popsanou metodou užitím grafu křivky $F(\alpha)$. To má tu výhodu, že z měření zachycených na jediné desce máme řadu na sobě nezávislých kontrol hodnot hledaných veličin a při tom se vůbec neprodlouží celková doba registrace. Tak na př. u Z-váhy Askania trvá uklidnění vahadla 40 minut. Je tedy celková doba registrace při měření v 8 azimutech 5^h20^m , při měření ve 3 azimutech s obvyklým opakováním prvních dvou bodů 3^h20^m a při měření v 5 azimutech s obvyklým opakováním prvních čtyř bodů dokonce 6 hodin.

Uvedený způsob měření a výpočet hledaných veličin ovšem předpokládá, že se teplota během registrace příliš nemění.

(Ze Státního ústavu geofyzikálního.)

LITERATURA.

- [1] K. KILCHLING: Die gleichmäßig gedrehte Drehwage, Zeitschrift für Geophysik, 1926, 134—137.
- [2] K. KILCHLING: Messungen mit der gleichmäßig gedrehten Drehwage und ein neues Rechenverfahren, Z. f. G., 1927, 281—285.
- [3] WIEN-HARMS: Handbuch der Experimentalphysik, XXV, Geophysik, 3. Teil, Angewandte Geophysik, 67.

La méthode de Kilchling modifiée pour une suite des positions fixes de la balance de torsion. L'équation (1) d'équilibre de la balance de torsion, où on se sert de la notation usuelle, peut être transformée à l'aide des relations (2), (3) et (4) à la forme donnée par l'équation (5). Dans cette — ci on représente la courbe $n - n_0 = F(\alpha)$ de KILCHLING [1, 2] comme une somme de deux fonctions harmoniques $F_1(2\alpha)$ et $F_2(\alpha)$. En posant $F_1(2\alpha) = 0$ et $F_2(\alpha) = 0$, on obtient les relations (8) et (9) entre l'azimut α et les angles λ et φ respectivement. Si l'on connaît à un point fixe les valeurs U_{xz} , U_{yz} , U_A et $2U_{xy}$ ou R , G , λ et φ , on peut calculer la courbe $F(\alpha)$ pour ce point (exemple 1 et fig. 3). Réciproquement, la forme de $F(\alpha)$ étant connue, on peut déterminer les valeurs cherchées de U_{xz} etc. ou même R etc. en utilisant les équations (10), (11) et (12) (exemple 2 et fig. 4).

On en peut faire usage à deux manières:

- a) Ayant effectué une observation normale en 3 ou 5 positions fixes, on obtient un contrôle des résultats cherchés.
- b) Ayant construit la courbe $F(\alpha)$ d'une suite suffisante dans des positions arbitraires, on en calcule les valeurs de U_{xz} etc. ou R etc.

(Institut Géophysique National, Praha.)