

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Skalický

Nové tabulky úmrtnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D170--D173

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/120760>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1939

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

rovnice v rovnici $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Sečtením a odečtením dostaneme po vhodné úpravě Cagnoliovy rovnice; jejich podíl je věta tangentová.

c) *Dány jsou dvě strany a, b a úhel α* (omezení zatím pomíjíme). Řešení nevede k žádnému novému základnímu vzorci (věta sinová a kosinová) a všimněme si toliko, že řešení $a \sin \beta = b \sin \alpha$ skýtá omezení $b \sin \alpha \leq a$ a tím $b < a$. Rozbor na tomto místě nutno důsledně provést!

d) Jsou-li *dány tři strany*, plyne ze systému lineárních rovnic
$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$
 atd.

Východiskem uvedeného řešení byla věta o průmětech.*)

Nové tabulky úmrtnosti.

Václav Skalický, Pardubice.

1. Desáté vydání našich nejrozšířenějších tabulek Valouchových obsahuje řadu podstatných změn; ve spojení s mnoha úpravami podružnými po stránce obsahové i vnější vyzvedly tyto změny tabulky téměř na vrcholný stupeň účelnosti. Jednou z nejpodstatnějších změn obsahových je náhrada starších tabulek úmrtnosti tabulkami novými, jež byly zpracovány již podle československé statistiky. Podkladem tabulek předešlých vydání byla rakouská statistika z let 1906—1910, podle níž byl též vypracován podklad čs. zákona o sociálním pojištění. Nové tabulky jsou vypracovány podle dat z let 1929—1932 a podle sčítání lidu z roku 1930. Třebaže podklad těchto tabulek neodpovídá již dnešním státoprávním poměrům, jsou jistě bližší skutečnosti než původní, aspoň svým pozdějším datem. Není bez významu všimnouti si toho, jaký význam může míti tato změna pro matematické vyučování na střední škole.

Tabulky byly především rozšířeny o řadu veličin odvozených ze základní funkce l_x . Všechny tyto veličiny mohou býti rozděleny ve dvě skupiny, jichž význam je poněkud různý. První skupina vyjadřuje biologické zákonitosti týkající se délky lidského života, druhá pak obsahuje čísla, jež se týkají finanční stránky životního pojišťování. Tato skupina byla pozměněna po vnější stránce jen málo; pojednáme o ní proto na prvním místě.

2. Tabulka veličin pojistné matematiky obsahuje známá čísla D_x, N_x, a_x a mimo to nově připojený sloupec $S_x = N_x + N_{x+1} + \dots$. Čísel S_x může býti ve vyučování využito k tomu,

*) Viz *K. Zahradník*, Příspěvek k trigonometrii. Čas. r. VII., str. 245 až 248.

abychom aspoň několika příklady vybočili z malého počtu typických úloh, jež vedou téměř nutně k tomu, že soudnost v řešení bývá nahrazována šablonou. Snad někteří kolegové budou souhlasit s dojmem, jehož jsem na tomto místě nabyt o tom, jak rozdílně se dívají zvláště slabší žáci na úlohy ze složeného úrokování a na úlohy pojišťovací přes to, že obě skupiny jsou vnitřně příbuzné. Základní předpoklady úloh úrokovacích mohou být voleny s větší rozmanitostí, než předpoklady úloh pojišťovacích. Tato rozmanitost dosti znemožňuje tvoření vyšlapaných cest v řešení, nutí každou úlohu řešit samostatnou úvahou, a způsobuje, že úlohy úrokovací jsou proti úlohám z pojišťování u žáků poměrně málo oblíbeny. Úkolem matematického vyučování musí však být v první řadě výchova k matematickému myšlení. Se zřetelem k tomu nepodporujeme vznik určitých mechanických způsobů a vzorů, a bráníme se mu takovou volbou úloh, že skoro každá z nich obsahuje něco podstatně nového. Pojištění pense cvičíme na př. též za předpokladu, že se pense nevyplácí doživotně, nýbrž jen po jistou dobu; nebo kombinujeme pojištění premií jednorázovou s pojištěním premiemi ročními a pod.

S tohoto hlediska může být vítáno i použití čísel S_x , zakládající se na tom, že

$$S_x = \sum_x^{105} N_x = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \dots,$$

při čemž součet na pravé straně jest omezen horní hranicí tabulek. Ukončíme-li tento součet dříve, jest

$$D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \dots + nD_{x+n-1} = S_x - S_{x+n} - nN_{x+n},$$

jak se snadno dokáže.

I můžeme řešit na př. tyto úlohy:

a) Jak velikou premií P ihned splatnou si pojistí osoba x -letá doživotní důchod, začínající v n -tém roce po uzavření pojistky a stoupající z původní částky d ročně o Δ ? — Řešení podle principu kolektivního pojištění:

$$Pl_x = d \frac{l_{x+n}}{r^n} + (d + \Delta) \frac{l_{x+n+1}}{r^{n+1}} + (d + 2\Delta) \frac{l_{x+n+2}}{r^{n+2}} + \dots$$

Dělením r^x dostáváme:

$$\begin{aligned} PD_x &= dN_{x+n} + \Delta (D_{x+n+1} + 2D_{x+n+2} + \dots) = \\ &= dN_{x+n} + \Delta S_{x+x+1} \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

b) Jak veliký kapitál splatný po n letech pojistí si osoba x -letá ročními premiemi, jež klesají z původní hodnoty p ročně

o $\frac{p}{n}$? — Řešení:

$$pl_x + \left(p - \frac{p}{n}\right) \frac{l_{x+1}}{r} + \left(p - \frac{2p}{n}\right) \frac{l_{x+2}}{r^2} + \dots + \\ + \left[p - \frac{(n-1)p}{n}\right] \frac{l_{x+n-1}}{r^{n-1}} = K \frac{l_{x+n}}{r^n}.$$

Dělením r^x dostaneme

$$p(D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+n-1}) - \frac{p}{n}[D_{x+1} + 2D_{x+2} + \dots + \\ + (n-1)D_{x+n-1}] = KD_{x+n},$$

$$p(N_x - N_{x+n}) - \frac{p}{n}[S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}] = KD_{x+n} \text{ atd.}$$

Námítka, že se tu jedná o úlohy poněkud umělé, může býti snadno vyvrácena tím, že i obvyklé úlohy se zřídka v praxi vyskytují a že konečně matematika na střední škole není, nemůže a nechce býti výcvikem pojišťovací praxe.

3. Tabulka funkce l_x a funkcí odvozených je vlastně zcela nová. Obsahuje především čísla $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$, jež mají význam i pro vyučování. q_x jest pravděpodobnost, že x -letá osoba zemře do roka. Nehledě k významu národohospodářsky výchovnému, o němž promluvíme později, mohou tato čísla býti použita při výpočtu pravděpodobnosti, že osoba x -letá zemře ve věku x' (t. j. že se dožije x' let, avšak nikoli $x' + 1$ roku). Pravděpodobnost tato jest

$$p_{x,x'} = \frac{l_{x'}}{l_x} \cdot \frac{l_{x'} - l_{x'+1}}{l_{x'}};$$

může býti proto počítána podle rovnice $p_{x,x'} = \frac{l_{x'}}{l_x} \cdot q_{x'}$, jež je přímo schopná logaritmování. Také tehdy, je-li známa pravděpodobnost dožití $\frac{l_{x'}}{l_x}$, usnadní použití čísel $q_{x'}$ výpočet. Stonásobky čísel q_x značí pak, kolik % x -letých během nejbližšího roku zemře.

Sloupec sousední obsahuje čísla $\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}$, jež jsou k předešlým asi v takovém vztahu, jako diferenciální a diferenční poměr téže funkce l_x . Numerický průběh obou veličin je přibližně týž.

Poslední sloupec této skupiny je tabulka střední délky dalšího života osoby x -leté, zvané též průměrnou délkou dalšího života:

$$\bar{e}_x = (\Sigma l_{x+1} : l_x) + \frac{1}{2}.$$

Důležitý tento pojem, významný po stránce praktické a cenný didakticky, jest v učebnicích zpravidla uváděn a odvozován; také sbírky úloh obsahují někdy příklady, které se ho týkají. Při jeho početním procvičování však bylo dosud nutno sčítati sloupec l_x od určitého místa až do konce tabulky.

Proto v některých sbírkách úloh bývá dávana přednost t. zv. věku pravděpodobnému, t. j. takovému, jehož dožití přísluší pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ (a jeho nedožítí rovněž $\frac{1}{2}$). Počítání tohoto věku je značně pohodlnější, význam jeho však je nepatrný.*) Nové tabulky odstraňují nutnost sčítání dlouhých sloupců; mimo to jest obsah sloupce \bar{e}_x velmi zajímavý a národohospodářsky poučný.

Bylo by chybou, kdyby učitel matematiky hleděl na svůj úkol jen očima matematika. Neopomene proto vésti své žáky k tomu, aby uvažovali i o obsahu tabulek úmrtnosti, a zamyslili se nad významem mnohých dat. Upozorňuji zvláště na charakteristický průběh křivky úmrtnosti, na vysokou úmrtnost dětí v prvním roce života, jež bývá zpravidla pro žáky překvapením, na malou úmrtnost v okolí 12. roku, různou úmrtnost mužů a žen a pod. Velmi dobře tu poslouží grafy, jejichž sestrojování je však dosti pracné, má-li graf zachytit zajímavé detaily s žádoucí názorností. Neškodilo by vydati důležitější grafy tohoto druhu.

Také porovnání statistického obsahu tabulek starých a nových je velmi zajímavé. Uvedme dva příklady. 1. Úmrtnost v prvním roce života: Podle starých tabulek 21 982 chlapců (18 312 dívek), podle nových 14 869 chlapců (12 457 dívek), což je jen 0,68 úmrtnosti podle tabulek starých. 2. Střední délka života chlapce právě zrozeného je podle nových tabulek 51,9 rok, což je asi 1,28-krát více než 40,7 roku podle tabulek starých. Oba příklady ukazují zvýšenou biologickou zdatnost statistického kolektiva, jež je podkladem nových tabulek. Je to výsledek plánovitého úsilí v sociální a lékařské péči o zdraví lidu. Rozdíly obou tabulek jsou ovšem způsobeny též rozdílnou strukturou obyvatelstva celků, jichž se tabulky týkají. Že podobná srovnávání dopadají pro nás příznivě, je víc než zřejmé.

*) Podotýkám ještě, že bývají názvy průměrný a pravděpodobný často v obou významech zaměňovány. Jednotnost jako všude byla by i tu vítána.