Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D45--D48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120742

ÚLOHY.

Řešení úloh 2—8 z ročníku 66 (1937), str. D 223—224.

Jsou-li n, k celá čísla, $0 < k \leq n$, potom nechť $\sigma_k(n)$ značí v úlohách 2, 3, 4 součet všech součinů po k různých činitelích, vybraných z řady $1, 2, \ldots, n$. Na př.

$$\sigma_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n,$$

$$\sigma_2(4) = 1\,.\,2 + 1\,.\,3 + 1\,.\,4 + 2\,.\,3 + 2\,.\,4 + 3\,.\,4 \text{ atd.}$$

Úloha 2. Najděte obecný tvar celých kladných čísel n, pro něž číslo $\sigma_2(n)$ je dělitelno číslem $\sigma_1(n)$. Najděte nejmenší takové n.

E. Bunický.

Řešení. (Zaslali pp. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř; Ing. Em. Klier, Plzeň; prof. K. Lerl, Místek; prof. F. Tvrdý, Náchod.)

Jest

$$\sigma_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}\,\sigma_1(n);$$

tedy

$$\sigma_1^2(n) = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sigma_2(n) = \frac{2n+1}{3}\,\sigma_1(n) + 2\sigma_2(n);$$

$$\sigma_2(n) = \sigma_1(n)\,.\,\tfrac{1}{12}\,(3n^2 - n - 2) = \sigma_1(n)\,.\,\tfrac{1}{12}\,(n-1)(3n+2).$$

Tedy $\sigma_2(n)$ je dělitelno $\sigma_1(n)$ tehdy a jen tehdy, je-li $(n-1)(3n+2) \equiv 0 \pmod{12}$, t. j. buďto $n \equiv 1$ nebo $n \equiv 10 \pmod{12}$.

Úloha 3. Dokažte, že pro každé celé $n \geq 3$ je číslo $\sigma_3(n)$ dělitelno číslem $\sigma_1(n)$. Jaký význam má podíl $\sigma_3(n) : \sigma_1(n)$? *E. Bunický.*

Řešení. (Zaslali pp. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř; ing. Em. Klier, Plzeň; prof. K. Lerl, Místek.)

Jest

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \sigma_1^2(n);$$

$$\sigma_1^3(n) = (1 + \ldots + n)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\,(1 + 2 + \ldots$$
$$+ n)\,(1\,.\,2 + 1\,.\,3 + \ldots + (n-1)\,.\,n)$$
$$- 3\,(1\,.\,2\,.\,3 + 1\,.\,2\,.\,4 + \ldots + (n-2)(n-1)\,n);$$

$$\sigma_1^3(n) = \sigma_1^2(n) + 3\,\sigma_1(n)\,\sigma_2(n) - 3\,\sigma_3(n);$$

$$\frac{\sigma_3(n)}{\sigma_1(n)} = \frac{\sigma_1(n) + 3\,\sigma_2(n) - \sigma_1^2(n)}{3} = \sigma_1(n)\,\frac{1}{12}\,(n-1)(n-2) = \binom{n+1}{4}.$$

Úloha 4. Najděte obecný tvar celých čísel $n \geqq 3$, pro něž číslo $\sigma_3(n)$ je dělitelno číslem $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. *E. Bunický.*

Řešení. (Zaslali pp. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř; ing. Em. Klier, Plzeň; prof. K. Lerl, Místek.)

Ježto $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sigma_1^2(n)$, nastane (podle posledního řádku předešlého řešení) hledaný případ tehdy a jen tehdy, je-li $(n-1)(n-2) \equiv 0 \pmod{12}$, t. j. je-li buďto $n \equiv 1$ nebo $n \equiv 2$ nebo $n \equiv 5$ nebo $n \equiv 10 \pmod{12}$.

V úlohách 5, 6, 7 značí $t_1, t_2, \ldots$ řadu Fibonacciho, definovanou vztahy

$$t_1 = 1,\ t_2 = 2,\quad t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Úloha 5. Dokažte, že pro $n = 2, 3, \ldots$ jest

$$t_{2n} = t_n^2 + t_{n-1}^2. \tag{2}$$

J. Lapšin.

Řešení. (Zaslali pp. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř; ing. Em. Klier, Plzeň; prof. K. Lerl, Místek.)

Buďte α, β kořeny rovnice $u^2 = u + 1$, volené tak, že $\alpha - \beta = \sqrt{5}$. Tvrdím: definuji-li a, b tak, že

$$a\alpha + b\beta = 1,\ a\alpha^2 + b\beta^2 = 2, \tag{3}$$

je

$$t_n = a\alpha^n + b\beta^n. \tag{4}$$

Tato rovnice je vskutku platna pro $n = 1, 2$; platí-li pak pro všechna $n \leqq k$ (kde $k \geqq 2$), je

$$t_{k+1} = t_k + t_{k-1} = a\alpha^k\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + b\beta^k\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = a\alpha^{k+1} + b\beta^{k+1}$$

$$\left(\text{neboť } 1 + \frac{1}{\alpha} = \alpha,\ 1 + \frac{1}{\beta} = \beta\right),$$

takže (4) platí i pro $n = k + 1$, čímž její obecná platnost dokázána. Z (3) snadno plyne

$$a = \frac{\alpha}{\sqrt{5}},\ b = -\frac{\beta}{\sqrt{5}},\ \text{takže } t_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1});$$

odtud

$$t_n^2 + t_{n-1}^2 = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n+1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{2n+1}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) - 2\alpha^n\beta^n(1 + \alpha\beta)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) = t_{2n}$$

$$\left(\text{neboť } \alpha\beta = -1,\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha - \beta = -\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right).$$

Úloha 6. Dokažte, že platí

$$t_{2n+1} = t_{n+1}^2 - t_{n-1}^2,\ t_{n+1}^2 - t_n^2 = t_{n-1}t_{n+2},$$
$$t_{2n+1} = t_{n-1}t_{n+2} + t_{n-2}t_{n+1},\ t_{2n} = \tfrac{1}{2}(t_{n+1}^2 + t_{n-2}^2),$$
$$t_{2n} = t_{n+1}t_{n-1} + t_n t_{n-2},$$
$$t_{4n} = t_n^4 + 6t_n^2 t_{n-1}^2 - 4t_n t_{n-1}^3 + 2t_{n-1}^4$$
$$(= (t_n^2 + t_{n-1}^2)^2 + t_{n-1}^2(2t_n - t_{n-1})^2).$$

E. Bunický.

Řešení. (Zaslali pp. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř; ing. Em. Klier, Plzeň; prof. K. Lerl, Místek.)

Z (1) a (2) plyne

$$t_{2n+2} = t_{n+1}^2 + t_n^2;\ t_{2n+1} = t_{2n+2} - t_{2n} = t_{n+1}^2 - t_{n-1}^2.$$
$$t_{n+1}^2 - t_n^2 = (t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} + t_n) = t_{n-1}t_{n+2}.$$

Tedy .

$$t_{2n+1} = t_{n+1}^2 - t_n^2 + t_n^2 - t_{n-1}^2 = t_{n-1}t_{n+2} + t_{n-2}t_{n+1}.$$

Sečtením a odečtením rovnic

$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1},\ t_{n-2} = t_n - t_{n-1}$$

plyne

$$t_n = \tfrac{1}{2}(t_{n+1} + t_{n-2}),\ t_{n-1} = \tfrac{1}{2}(t_{n+1} - t_{n-2}),$$

takže

$$t_{2n} = t_n^2 + t_{n-1}^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+1}^2 + t_{n-2}^2).$$
$$t_{2n} = t_n^2 + t_{n-1}^2 = t_n(t_{n-1} + t_{n-2}) + t_{n-1}(t_{n+1} - t_n)$$
$$= t_n t_{n-2} + t_{n+1}t_{n-1}.$$
$$t_{4n} = t_{2n}^2 + t_{2n-1}^2 = (t_n^2 + t_{n-1}^2)^2 + (t_n^2 - t_{n-2}^2)^2;$$
$$t_n^2 - t_{n-2}^2 = t_n^2 - (t_n - t_{n-1})^2 = t_{n-1}(2t_n - t_{n-1});$$
$$t_{4n} = (t_n^2 + t_{n-1}^2)^2 + t_{n-1}^2(2t_n - t_{n-1})^2.$$

Úloha 7. Dokažte, že pro $n > 3$ platí rovnice

$$t_n = t_{n'}^2 + (-1)^n t_{n''}^2,$$

kde

$$n' = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}(1 + (-1)^{n+1}),\ n'' = \tfrac{1}{2}n - 1 - \tfrac{1}{4}(1 + (-1)^{n+1}).$$

E. Bunický.

Řešení. (Zaslali pp. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř; ing. Em. Klier, Plzeň; prof. K. Lerl, Místek.)

Pro sudé n je $n' = \frac{1}{2}n$, $n = 2n'$, $n'' = n' - 1$, tedy podle (2)

$$t_n = t_{2n'} = t_{n'}^2 + (-1)^n t_{n''}^2.$$

Pro liché n je $n' = \frac{1}{2}(n + 1)$, $n = 2n' - 1$, $n'' = n' - 2$, tedy podle prvního vzorce úlohy 6

$$t_n = t_{2n'-1} = t_{n'}^2 - t_{n'-2}^2 = t_{n'}^2 + (-1)^n t_{n''}^2.$$

Úloha 8. Budiž $\varphi(m)$ počet oněch čísel v řadě $1, 2, \ldots, m$, jež jsou nesoudělná s m. Ukažte, že při daném m výraz

$$\sqrt[n-1]{\frac{(\varphi(m))^n}{\varphi(m^n)}} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

nezávisí na n. Jaká je hodnota tohoto výrazu? *E. Bunický.*

Řešení. (Zaslali pp. prof. dr. A. Hyška, Jaroměř; ing. Em. Klier, Plzeň; prof. K. Lerl, Místek; prof. F. Tvrdý, Náchod.)

Jsou-li $p_1, \ldots, p_r$ ona (navzájem různá) prvočísla, jimiž je m dělitelno a položíme-li

$$M = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

je $\varphi(m) = mM$, $\varphi(m^n) = m^n M$, takže uvedený výraz se rovná M.