Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster

Příspěvky ke geometrii kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D89--D98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120738

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1939

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

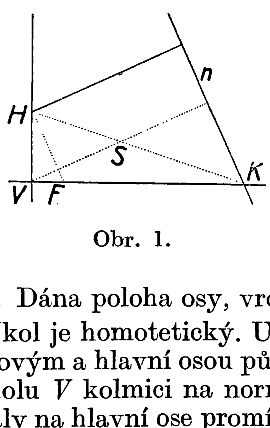
ČLÁNKY A REFERÁTY.

Příspěvky ke geometrii kuželoseček.

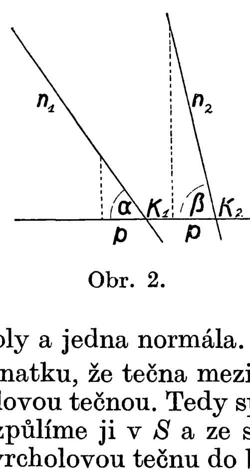
Dr. **Jan Schuster**, Praha.

Obyčejně se určují kuželosečky body a tečnami. Toto určení pro svoji přirozenost a řadu obdob založených na duálnosti se ukázalo velmi úspěšnou cestou k poznání vlastností kuželoseček. Ale přirozeně není samojediné.

Zde se chceme zabývat několika případy, kde dány svojí polohou normály nebo normály a tečny, případně jiné prvky. Tím se ovšem hned s předu vzdáváme výhod, jež v sobě utajuje metoda homogenních funkcí a musíme omezit svoje vyšetření pouze na oblast metrickou a na rovinu Cartesiovu.



Obr. 1.



Obr. 2.

1. Dána poloha osy, vrchol paraboly a jedna normála.

Úkol je homotetický. Užijeme poznatku, že tečna mezi bodem dotykovým a hlavní osou půlena vrcholovou tečnou. Tedy spustíme s vrcholu V kolmici na normálu n, rozpůlíme ji v S a ze stopy K normály na hlavní ose promítneme na vrcholovou tečnu do bodu H, jímž vedená kolmice k n je tečnou, nebo HF, rovnoběžná k normále, určuje na hlavní ose ohnisko F.

2. Dány dvě normály n_1, n_2 se sklony α, β k ose paraboly a vzájemnou vzdáleností $k = K_1K_2$ stop na ose.

Parametr p určíme z okolnosti, že subtangenty příslušné k oběma normálám mají rozdíl k. Platí totiž:

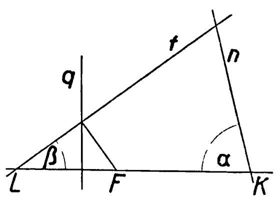
$$\tfrac{1}{2}s + p + k = \frac{s'_t}{2} + p, \text{ tedy } \frac{s'_t - s_t}{2} = k,$$

kde s'_t je subtangenta pro normálu n_2. Ale $s_t = p \operatorname{tg}^2 \alpha$, $s'_t = p \operatorname{tg}^2 \beta$ dá $p(\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2k$.

Konstrukce se zase provede homoteticky. Zvolme kolmici k přímce obsahující hlavní osu a z její paty spusťme kolmice na normály n_1 a n_2. Tyto rozpolme v bodech S_1 a S_2 a sestrojme přímky K_1S_1 a K_2S_2, jež protnou zvolenou kolmici v H_1 a H_2. Veďme pak v H_1 rovnoběžku k n_1, v H_2 rovnoběžku k n_2, jež se protnou v M. Kdyby se zvolená kolmice posouvala, opisuje M přímku. Když tedy úkon opakujeme pro novou kolmici, vznikne nový výsledný bod M'. Spojnice MM' protne přímku nesoucí hlavní osu v ohnisku F. Vrcholová tečna leží pak na průseku rovnoběžky vedené z F k normále n_1 a spojnice bodu K_1 se středem S_1 úsečky spuštěné z F kolmo na n_1.

3. Kdyby byly dány tři normály n_1, n_2, n_3 a směr hlavní osy, provedeme konstrukci pro zvolenou rovnoběžku k danému směru jako hlavní osu a normály n_1 a n_2, a opakujeme ji pro jinou zvolenou hlavní osu. Tím obdržíme dva body přímky p_3, na níž leží ohnisko. Opakujeme-li potom konstrukci pro tytéž dvě rovnoběžky k hlavní ose a pro normály n_1, n_3, obdržíme pro polohy ohnisek přímku p_2. Průsečík přímek p_2 a p_3 je hledané ohnisko.

Analyticky lze postupovat obdobně. Buďte dány normály rovnicemi $y = A_k x + a_k$ $(k = 1, 2, 3)$ a osa úseček měj směr osy paraboly. Má li vrchol paraboly souřadnice ξ, η, bude mít stopa normály na ose paraboly úsečku $x = \dfrac{\eta - a_k}{A_k}$, při čemž platí:



Obr. 3.

$$\frac{\eta - a_k}{A_k} - \xi = p + \tfrac{1}{2}pA_k^2$$

nebo

$$\eta - \xi A_k - p[A_k + \tfrac{1}{2}A_k^3] = a_k \quad (k=1, 2, 3).$$

Z těchto tří rovnic se musí určit neznámé ξ, η, p.

Determinant soustavy je

$$D = |\, 1, -A_k, -A_k - \tfrac{1}{2}A_k^3 \,| = \tfrac{1}{2}\,|\, 1, A_k, A_k^3 \,| =$$
$$= \tfrac{1}{2}(A_3 - A_1)(A_2 - A_3)(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 + A_3)$$

a neznámé plynou z rovnic:

$$\eta D = |\, a_k, -A_k, -A_k - \tfrac{1}{2}A_k^3 \,| = |\, a_k, A_k, A_k^3 \,| \,.\, \tfrac{1}{2}$$
$$\xi D = |\, 1, a_k, -A_k - \tfrac{1}{2}A_k^3 \,|$$
$$pD = |\, 1, -A_k, a_k \,|.$$

4. Dána přímka obsahující osu paraboly a jedna tečna a normála. Jsou-li K stopa normály, L stopa tečny, pak platí

$$KL = k = \frac{p}{2}\operatorname{cotg}^2\beta + \frac{p}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + p, \text{ t. j. } p = \frac{2k}{\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\beta}.$$

Vrchol paraboly vzdálen od stopy tečny o $\frac{p}{2}\operatorname{cotg}^2\beta$.

Při konstrukci zvolíme přímku q kolmou k ose. V jejím průsečíku s tečnou t vztyčme kolmici k tečně. Sestrojíme-li k normále kolmici, rozpůlíme-li a spojíme-li půlící bod s bodem K, protne tato přímka přímku q v bodě, v němž vedeme rovnoběžku r k normále n. Průsečík přímek k a r buď bod S. Opakujeme-li konstrukci pro jinou kolmici q' k ose, vznikne bod S'. Spojnice SS' pak protne přímku, jež nese osu paraboly, v ohnisku F.

5. Buďte dány směr hlavní osy, dvě normály a jedna tečna. Normály mějte rovnice

$$n_k \equiv y = A_k x + a_k \quad (k = 1, 2),$$

tečna buď

$$t \equiv y = Bx + b.$$

Hlavní osa měj směr osy úseček a vrchol buď $V(\xi, \eta)$.

Potom má průsek vrcholové tečny s tečnou t pořadnici

$$y = B\xi + b$$

a kolmice v něm vztyčená

$$y - (B\xi + b) = -\frac{1}{B}(x - \xi)$$

protne osu paraboly $y = \eta$ v úsečce

$$x = \xi + B^2\xi + Bb - B\eta.$$

Odtud tedy parametr dán výrazem

$$p = 2[\xi B^2 + B(b - \eta)].$$

Zavedeme-li úseky k_1, k_2 podle odst. 4, pro které nyní platí:

$$k_1 = \frac{\eta - a_1}{A_1} - \frac{\eta - b}{B}, \quad k_2 = \frac{\eta - a_2}{A_2} - \frac{\eta - b}{B},$$

bude

$$2[\xi B^2 + B(b - \eta)] = \left[\frac{\eta - a_1}{A_1} - \frac{\eta - b}{B}\right]\frac{1}{\sec^2\alpha_1 + \operatorname{cosec}^2\beta} =$$

$$= \left[\frac{\eta - a_2}{A_2} - \frac{\eta - b}{B}\right]\frac{1}{\sec^2\alpha_2 + \operatorname{cosec}^2\beta}.$$

Tato rovnice dovoluje určit pořadnici vrcholu z rovnice

$$\eta\left\{\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{B}\right)\sec^2\alpha_2-\left(\frac{1}{A_2}-\frac{1}{B}\right)\sec^2\alpha_1+\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)\operatorname{cosec}^2\beta\right\}=$$
$$=\frac{a_1}{A_1}(\sec^2\alpha_2-\operatorname{cosec}^2\beta)-\frac{a_2}{A_2}(\sec^2\alpha_1-\operatorname{cosec}^2\beta)-$$
$$-\frac{b}{B}(\sec^2\alpha_2-\sec^2\alpha_1),$$
jejíž levou stranu lze přepsat na:
$$\eta\sin(\alpha_2-\alpha_1)\left[\frac{1+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2}-\right.$$
$$\left.-\operatorname{cotg}\beta\frac{\sin(\alpha_2+\alpha_1)}{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2}+\frac{\operatorname{cosec}^2\beta}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}\right].$$
Veličiny ξ a p se pak obdrží dosazením hodnoty η do předchozích rovnic.

Konstrukce se provede na základě úvah z odstavce 4. právě tak jako postupováno v odstavci 3. na základě odstavce druhého.

6. Dány-li naopak dvě tečny, jedna normála a směr hlavní osy, vyjdeme od rovnic tečen
$$t_k\equiv y=B_kx+b_k\quad(k=1,2)$$
a normály
$$n\equiv y=Ax+a.$$
Úseky na hlavní ose mezi tečnou a normálou jsou:
$$k_1=\frac{\eta-a}{A}-\frac{\eta-b_1}{B_1},\quad k_2=\frac{\eta-a}{A}-\frac{\eta-b_2}{B_2}.$$
Vrcholová tečna $x=\xi$ dá pro pořadnice průseků s tečnami:
$$y_1=B_1\xi+b_1,\ y_2=B_2\xi+b_2.$$
Kolmice k oběma tečnám mají rovnice
$$y-(B_1\xi+b_1)=-\frac{1}{B_1}(x-\xi),\quad y-(B_2\xi+b_2)=-\frac{1}{B_2}(x-\xi),$$
a odtud vyloučením y:
$$x-\xi=\frac{\xi(B_2-B_1)+b_2-b_1}{B_1-B_2}B_1B_2,$$
tedy
$$p=2\frac{\xi(B_2-B_1)+b_2-b_1}{B_1-B_2}B_1B_2,$$
a pořadnice ohniska
$$\eta=\frac{(B_1{}^2-B_2{}^2)\,\zeta+b_1B_1-b_2B_2}{B_1-B_2}.$$

Počítáme-li pak subtangentu z normály, je

$$\frac{pA^2}{2} = \frac{\eta - a}{A} - p - \xi.$$

Tato rovnice dovolí nyní určit ξ, neboť dosazením vznikne

$$(A^2 + 2) \cdot \frac{\xi(B_2 - B_1) + b_2 - b_1}{B_1 - B_2} B_1B_2 =$$
$$= \frac{(B_1{}^2 - B_2{}^2)\,\xi + b_1B_1 - b_2B_2}{(B_1 - B_2)\,A} - \frac{a}{A} - \xi$$

a odtud

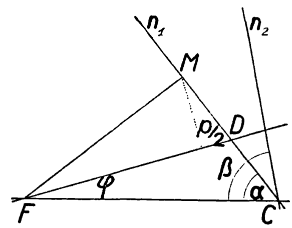
$$\xi = \frac{b_1B_1 - b_2B_2 + (b_1 - b_2)\,B_1B_2\,(A^3 + 2A) - a(B_1 - B_2)}{(B_2 - B_1)\,[B_1B_2\,(A^3 + 2A) + B_2 + B_1 - A]}.$$

Ostatní neznámé, η a p, se pak obdrží pouhou substitucí.

Konstrukce se dá zase provést tak, že z tečen t_1 a t_2 pro dvě zvolené kolmice k danému směru osy určíme geometrické místo ohnisek, totiž spojnici obou vyplývajících poloh F_1 a F_2. Oběma body F_1 a F_2 vedené rovnoběžky se směrem osy obsahují po jednom z nových bodů F'_1 a F'_2, jež se určí z tečny a normály jako v odst. 4 a spojnice jejich $F'_1F'_2$ svým průsekem s přímkou F_1F_2 určuje ohnisko F.

7. V parabole dány dvě normály a ohnisko.

Je-li C průsek daných normál, F ohnisko, zvolíme $FC = a$ za základní přímku. Uvážíme-li, že subtangenta půlena vrcholem paraboly, půlí ohnisko úsečku omezenou stopou tečny a normály. Když tedy s ohniska spustíme kolmici na normálu do bodu M, půlí M normálu a průmět této poloviny na osu je $\frac{p}{2}$. Když v trojúhelníku FDM určíme MD, můžeme odtud vypočíst parametr. To provedeme pro obě normály vedené z bodu C:



Obr. 4.

$$\frac{p}{2} = a\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi + \alpha)}\cos^2(\varphi + \alpha) = a\,\frac{\sin\beta}{\sin(\varphi + \beta)}\cos^2(\varphi + \beta).$$

Obě druhé části této rovnice dají:

$$\operatorname{cotg}(\varphi + \alpha)\,[\sin(\varphi + 2\alpha) - \sin\varphi] = \operatorname{cotg}(\varphi + \beta)\,[\sin(\varphi + 2\beta) - \sin\varphi)$$

nebo rozvinutím výrazů v závorkách a zavedením tangent:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \beta)\,[\operatorname{tg}\varphi\cos 2\alpha + \sin 2\alpha - \operatorname{tg}\varphi] =$$
$$= \operatorname{tg}(\varphi + \alpha)\,[\operatorname{tg}\varphi\cos 2\beta + \sin 2\beta - \operatorname{tg}\varphi].$$

Položíme-li $\operatorname{tg}\varphi = x$, bude

$$\frac{x + \operatorname{tg}\beta}{1 - x\operatorname{tg}\beta}\,[-\,2x\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha] =$$
$$= \frac{x + \operatorname{tg}\alpha}{1 - x\operatorname{tg}\alpha}\,[-\,2x\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta]$$

nebo

$$(x + \operatorname{tg}\beta)\,(1 - x\operatorname{tg}\alpha)\,[x\sin\alpha - \cos\alpha]\sin\alpha =$$
$$= (x + \operatorname{tg}\alpha)\,(1 - x\operatorname{tg}\beta)\,[x\sin\beta - \cos\beta]\sin\beta.$$

Odtud plyne kubická rovnice

$$-\,x^3\,[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta - \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta] + x^2\,[2 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta]\,.$$
$$.\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)$$
$$+\,x\,[\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\,(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta) - (1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\,(\sin\alpha\,.$$
$$.\,\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta)] - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\,(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) = 0.$$

Když koeficienty přetvoříme v součiny, zkrátí se $\sin(\alpha - \beta)$ a zbude

$$-\,x^3\,[1 - \cos(\alpha + \beta)] + x^2\,(2 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\sin(\alpha + \beta) +$$
$$+\,x\,(2\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta - 1)\cos(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Této rovnici možno nyní dát konečný tvar:

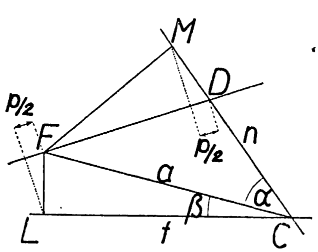
$$x^3 - x^2\,(2 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\operatorname{cotg}\frac{\alpha + \beta}{2} - x\,(2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1)\,.$$
$$.\,\frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha + \beta}{2} - 1\right) - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\frac{\alpha + \beta}{2} = 0.$$

Zajímavý případ nastane pro $\alpha + \beta = 90°$. Pak totiž odpadne vůbec člen stupně prvního a rovnice přejde v

$$x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

kde už úhly nevystupují.

Vidíme, že když se odchylky normál od spojnice jejich průsečíku s ohniskem doplňují na úhel pravý, zůstává směr osy paraboly týž pro všecky možné směry.



Obr. 5.

8. Dáno ohnisko paraboly, jedna tečna a jedna normála.

MD je zase polovice normály. Kolmice *FL* s *F* na tečnu spuštěná se promítá do osy délkou $\frac{1}{2}p$. Je-li *C* průsek tečny a normály, obdržíme pro parametr dva výrazy

$$\frac{p}{2} = a\frac{\cos^2(\varphi + \alpha)\sin\alpha}{\sin(\varphi + \alpha)} = a\frac{\sin^2(\varphi - \beta)\sin\beta}{\sin(\varphi - \beta)}.$$

Rovnice určující φ nebude souměrná, ale za to je jednodušší:

$$\sin\alpha\cos^2(\varphi + \alpha) = \sin\beta\sin(\varphi + \alpha)\sin(\varphi - \beta).$$

Zaveďme dvojnásobné úhly:

$$\sin\alpha + \sin\alpha\cos(2\varphi + 2\alpha) = \sin\beta[\cos(\alpha + \beta) - \cos(2\varphi + \alpha - \beta)].$$

Když ještě přejdeme k funkcím úhlů součtových, bude

$$2\sin\alpha + \sin(2\varphi + 3\alpha) - \sin(2\varphi + \alpha) =$$
$$= \sin(\alpha + 2\beta) - \sin\alpha - \sin(2\varphi + \alpha) + \sin(2\varphi + \alpha - 2\beta)$$

nebo

$$3\sin\alpha + 2\sin(2\varphi + 2\alpha)\cos\alpha = 2\sin(\varphi + \alpha)\cos(\varphi - 2\beta).$$

Přeřaděním obdržíme:

$$3\sin\alpha + \sin 2\varphi[\cos 3\alpha - \cos(\alpha - 2\beta)] +$$
$$+ \cos 2\varphi[\sin 3\alpha - \sin(\alpha - 2\beta)] = \sin(\alpha + 2\beta)$$

nebo

$$\sin\alpha - \sin\beta\cos(\alpha + \beta) -$$
$$- \sin 2\varphi\sin(\alpha+\beta)\sin(2\alpha-\beta) + \cos 2\varphi\sin(\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta) = 0.$$

Zaveďme zase $\operatorname{tg}\varphi = x$, takže

$$x^2[2\sin 2\beta\cos\alpha - 3\sin\alpha + \sin 3\alpha] -$$
$$-4x\sin(\alpha+\beta)\sin(2\alpha-\beta) + 2[3\sin\alpha + \sin 3\alpha - 2\sin 2\beta\cos\alpha] = 0.$$

Kdyby šlo o případ $\alpha + \beta = 90°$, je lépe vyjít z rovnice nerozvinuté,

$$\sin\alpha[1 + \cos(2\varphi + 2\alpha)] = -\cos\alpha\cos(2\alpha + 2\alpha - 90).$$

Shrneme-li dva členy v jeden, přejde rovnice ve

$$\sin\alpha + \sin(2\varphi + 3\alpha) = 0,$$

z níž bude

$$2\varphi + 3\alpha = -\alpha + k\,.\,360°,\ 180 + \alpha + k\,.\,360°,$$

t. j.

$$\varphi = -2\alpha + k\,.\,180° \text{ nebo } = -\alpha + k\,.\,180°.$$

Pak musí být osa přeponou pravoúhlého trojúhelníka s ohniskem jako středem. Kružnice opsaná z F poloměrem FC protne tečnu a normálu v bodech osy.

9. Uvažujme tři normály

$$y = A_k x + a_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Ohnisko F měj souřadnice (x_0, y_0). Kolmice $y - y_0 = -\frac{1}{A_k}(x - x_0)$ s ohniska spuštěná na normálu bude mít patu v bodě:

$$x = \frac{y_0 A_k + x_0 - A_k a_k}{1 + A_k^2}, \quad y = \frac{y_0 A_k^2 + A_k x_0 - a_k}{1 + A_k^2}.$$

Má-li osa křivky směrnici B, tedy rovnici $y - y_0 = B(x - x_0)$, má stopa K_k normály na této ose souřadnice:

$$x = \frac{y_0 - Bx_0 - a_k}{A_k - B}, \quad y = \frac{A_k y_0 - A_k B x_0 - B a_k}{A_k - B}.$$

Rozdíl úseček obou uvažovaných bodů je:

$$\frac{y_0 - Bx_0 - a_k}{A_k - B} - \frac{y_0 A_k + x_0 - A_k a_k}{1 + A_k^2} =$$

$$= \frac{y_0 - a_k - BA_k^2 x_0 - x_0 A_k + y_0 B A_k - B A_k a_k}{(A_k - B)(1 + A_k^2)} =$$

$$= \frac{(1 + BA_k)(y_0 - x_0 A_k - a_k)}{(A_k - B)(1 + A^2_k)}.$$

Vzdálenost uvažovaných bodů se obdrží znásobením této hodnoty výrazem $\sqrt{1 + A_k^2}$ a její průmět do osy křivky plyne, když ještě znásobíme cosinem sklonu obou směrů, totiž normály a osy, jenž roven $\frac{1 + BA_k}{\sqrt{1 + A_k^2}\sqrt{1 + B^2}}$. Vzniklá hodnota je rovna polovičnímu parametru paraboly:

$$\frac{p}{2} = \frac{(1 + BA_k)^2 (y_0 - x_0 A_k - a_k)}{(A_k - B)(1 + A_k^2)\sqrt{1 + B^2}} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Tyto tři rovnice dovolují určit vztah mezi x_0, y_0, vyloučíme-li p a B, tedy geometrické místo ohniska.

Pro usnadnění počtu zaveďme označení:

$$u = \tfrac{1}{2} p \sqrt{1 + B^2}, \quad y_0 - x_0 A_k - a_k = T_k,$$

čímž se obdrží rovnice tvaru

$$u (A_k - B)(1 + A_k^2) - (1 + 2BA_k) T_k - B^2 A_k^2 T_k = 0.$$

Aby se vyloučení usnadnilo, přepišme tuto rovnici ještě ve tvar:

$$u (A_k - B)(1 + A_k^2) - T_k - BT_k A_k (2 + BA_k) = 0.$$

Oba tvary, platné pro $k = 1, 2, 3$, dají jako výsledek vyloučení dvě determinantní rovnice:

$$| (A_k - B)(1 + A_k^2),\ (1 + 2BA_k),\ A_k^2 T_k | = 0,$$
$$| (A_k - B)(1 + A_k^2),\quad T_k,\quad T_k A_k (2 + BA_k) | = 0$$

nebo

$$| A_k + A_k^3,\ T_k,\ A_k^2 T_k | + B\, | 1 + A_k^2,\ T_k,\ - A_k^2 T_k + 2A_1A_2A_3A_k T_k | - 2B^2\, | 1 + A_k^2, A_kT_k,\ T_kA_k^2 | = 0,$$

$$2\, | A_k + A_k^3,\ T_k,\ A_kT_k | - 2B\, | 1 + A_k^2,\ T_k,\ T_kA_k | + B\, | A_k + A_k^3,\ T_k,\ T_kA_k^2 | - B^2\, | 1 + A_k^2,\ T_k,\ T_kA_k^2 | = 0.$$

Označme:

$$D_1 = | A_k + A_k^3,\ T_k,\ A_k^2T_k |,\quad D_2 = | 1 + A^2_k,\ T_k,\ T_kA_k^2 |,$$
$$D_3 = | 1 + A_k^2,\ T_k,\ T_k A_k |,\quad D_4 = | 1 + A_k^2,\ A_kT_k,\ A_k^2T_k |,$$
$$D_5 = | A_k + A_k^3,\ T_k,\ T_kA_k |$$

a obdržíme:

$$D_1 + B\,(- D_2 + 2A_1A_2A_3D_3) - 2B^2D_4 = 0,$$
$$2D_5 + B\,(- 2D_3 + D_1) \qquad - B^2D_2 = 0.$$

Výsledek vyloučení veličiny B je tudíž

$$(D_1D_2 - 4D_4D_5)^2 = [- D_2^2 + 2A_1A_2A_3D_2D_3 + 4D_3D_4 - 2D_1D_4]\ .$$
$$.\ [- 2D_2D_5 + 4A_1A_2A_3D_3D_5 + 2D_1D_3 - D_1^2].$$

Uvážíme-li, že každý z determinantů D je podle souřadnic x_0, y_0 stupně druhého, vidíme, že každý faktor poslední rovnice je stupně čtvrtého, a rovnice celkem stupně osmého.

10. Pro srovnání proveďme touto metodou případ, kdy dány tři tečny paraboly:

$$y = B_kx + b_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Pata kolmice z ohniska $F(x_0, y_0)$ má souřadnice

$$x = \frac{y_0 B_k + x_0 - B_k b_k}{1 + B_k^2},\quad y = \frac{y_0 B_k^2 + B_k x_0 - b_k}{1 + B_k^2}.$$

Kolmice sama se promítne do osy úseček délkou

$$x - x_0 = \frac{y_0 B_k - x_0 B_k^2 - B_k b_k}{1 + B_k^2}.$$

a její délka se obdrží znásobením secantou sklonu, t. j. $\dfrac{\sqrt{1 + B_k^2}}{B_k}$.

Znásobíme-li pak vzniklou hodnotu sinem sklonu tečny a osy, pro který je

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{B - B_k}{1 + B B_k},\quad \text{takže}\quad \sin \omega = \frac{B - B_k}{\sqrt{1 + B^2}\sqrt{1 + B_k^2}},$$

obdržíme poloviční subnormálu, tudíž

$$\frac{p}{2} = \frac{(y_0 - x_0 B_k - b_k)\,(B - B_k)}{(1 + B_k^2)\sqrt{1 + B^2}}.$$

Položme zase

$$u = \frac{p}{2}\sqrt{1 + B^2},\quad T'_k = y_0 - x_0B_k - b_k.$$

takže $$u\,(1 + B_k^2) = T'_k(B - B_k).$$
Vyloučení veličin u a B dá rázem

$$\begin{vmatrix} 1 + B_1^2, & T'_1, & T'_1B_1 \\ 1 + B_2^2, & T'_2, & T'_2B_2 \\ 1 + B_3^2, & T'_3, & T'_3B_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ale tato rovnice druhého stupně není než rovnice kruhu opsaného trojúhelníku z tečen, vyjádřená trojúhelníkovými souřadnicemi normálními (T_k úměrny vzdálenostem bodu od stran).

11. Jistou zajímavost může mít případ smíšený, kdy dány dvě tečny a jedna normála. Pak jde o rovnice:

$$\begin{aligned} u\,(A_1 - B)\,(1 + A_1^2) - (1 + 2BA_1)\,T_1 - B^2A_1^2T_1 &= 0 \\ u\,(1 + B_2^2) \qquad\qquad - T'_2(B - B_2) \qquad &= 0 \\ u\,(1 + B_3^2) \qquad\qquad - T'_3(B - B_3) \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Vypočtěme u a B z posledních dvou a dosaďme do první.

$$B = \frac{T'_2\,B_2(1 + B_3^2) - T'_3\,B_3\,(1 + B_2^2)}{T'_2\,(1 + B_3^2) - T'_3\,(1 + B_2^2)},$$

$$u = \frac{T'_2T'_3\,(B_3 - B_2)}{T'_3\,(1 + B_2^2) - T'_2\,(1 + B_3^2)}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty, obdržíme rovnici stupně čtvrtého.

Jiný případ by byl případ dvou normál a jedné tečny

$$\begin{aligned} u\,(A_1 - B)\,(1 + A_1^2) - (1 + 2BA_1)\,T_1 - B^2A_1^2T_1 &= 0 \\ u\,(A_2 - B)\,(1 + A_2^2) - (1 + 2BA_2)\,T_2 - B^2A_2^2T_2 &= 0 \\ u\,(1 + B_3^2) \qquad\qquad - T'_3(B - B_3) \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Vyloučíme-li u, dosadíce

$$u = \frac{T'_3\,(B - B_3)}{1 + B_3^2},$$

obdržíme kvadratické rovnice podle B:

$$\begin{aligned} &B^2[T'_3(1 + A_1^2) + A_1^2T_1(1 + B_3^2)] + B[2A_1T_1(1 + B_3^2) - (A_1 + \\ &\quad + B_3^2)\,T'_3(1 + A_1^2)] + A_1B_3T'_3(1 + A_1^2) + T_1(1 + B_3^2) = 0 \\ &B^2[T'_3(1 + A_2^2) + A_2^2T_2(1 + B_3^2)] + B[2A_2T_2(1 + B_3^2) - (A_2 + \\ &\quad + B_3^2)\,T'_3(1 + A_2^2)] + A_2B_3T'_3(1 + A_2^2) + T_2(1 + B_3^2) = 0. \end{aligned}$$

Přepíšeme-li tyto rovnice ve tvar

$$B^2m + Bn + p = 0,\quad B^2m' + Bn' + p' = 0,$$

je výsledek vyloučení

$$(pm' - p'm)^2 + (m'n - mn')\,(np' - n'p) = 0.$$

Tato rovnice se ukazuje rovnicí stupně čtvrtého podle souřadnic x_0, y_0.

(Pokračování.)