Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat.,
Mathematica **34** (1995) 137–145

MODULARE INZIDENZSTRUKTUREN

FRANTIŠEK MACHALA*

*Department of Algebra and Geometry, Faculty of Science,
Palacký University, Tomkova 40, 779 00 Olomouc, Czech Republic
E-mail: machala@risc.upol.cz*

(Vorgelegt am 30. August 1994)

Abstract

In the paper the modular incidence structures are defined and it are shown to be, as orderet sets, modular in the sense of [3]. Some fundamental properties of modular incidence structures are deduced and some examples of such structures are presented.

Key words: Modular ordered sets, modular incidence structures.

MS Classification: 08A02, 51A05, 06A06

Unter einer *Inzidenzstruktur* versteht man ein Tripel $\mathcal{J} = (G, M, I)$; dabei sind G, M nichtleere Mengen und $I \subseteq G \times M$ eine binäre Relation gennant Inzidenzrelation. Statt $(a, m) \in I$ schreibt man kürzer $a\ I\ m$ und $a\ \not I\ m$ bezeichnet man die Verneinung von $a\ I\ m$.

Wir setzen

$$A^{\uparrow} = \{m \in M \mid g\ I\ m \quad \forall g \in A\} \quad \text{bzw.} \quad B^{\downarrow} = \{g \in G \mid g\ I\ m \quad \forall m \in B\}$$

für jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq G$ bzw. $B \subseteq M$ und $\emptyset^{\uparrow} = M$ bzw. $\emptyset^{\downarrow} = G$ für die leere Menge $\emptyset$. Für $g \in G$, $m \in M$ dann schreiben wir kurz $g^{\uparrow} := \{g\}^{\uparrow}$, $m^{\downarrow} := \{m\}^{\downarrow}$. Für $A \subseteq G$ bzw. $B \subseteq M$ setzen wir $A^{\uparrow\downarrow} = (A^{\uparrow})^{\downarrow}$ bzw. $B^{\downarrow\uparrow} = (B^{\downarrow})^{\uparrow}$.

*Supported by grant no. 201/95/1631 of the Grant Agency of Czech Republic

Sind A, C Teilmengen von G, dann gilt $A \subseteq C \Rightarrow C^\uparrow \subseteq A^\uparrow$, $A^{\uparrow\downarrow\uparrow} = A^\uparrow$, $A \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$ und $A^\uparrow = \bigcap_{a \in A} a^\uparrow$. Analog gilt $B \subseteq D \Rightarrow D^\downarrow \subseteq B^\downarrow$, $B^{\downarrow\uparrow\downarrow} = B^\downarrow$, $B \subseteq B^{\downarrow\uparrow}$ und $B^\downarrow = \bigcap_{b \in B} b^\downarrow$ für $B, D \subseteq M$. Sind A_i bzw. B_i Teilmengen von G bzw. M für alle $i \in H$, dann $(\bigcup_{i \in H} A_i)^\uparrow = \bigcap_{i \in H} A_i^\uparrow$ bzw. $(\bigcup_{i \in H} B_i)^\downarrow = \bigcap_{i \in H} B_i^\downarrow$ (vgl. z. B. [4]).

Elemente von G heißen *Punkte*. Eine Teilmenge $A \subseteq G$ heißt ein *Unterraum* von $\mathfrak{J}$ dann, wenn $A = A^{\uparrow\downarrow}$ gilt. Für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq G$ ist $X^{\uparrow\downarrow}$ ein Unterraum, der durch X generiert ist. Die Punktmenge G selbst bildet einen Unterraum. Ist $A \neq \emptyset$ ein Unterraum, dann $A = \bigcup_{a \in A} a^{\uparrow\downarrow}$. Eine Teilmenge $A \subseteq G$ stellt einen Unterraum dar genau dann, wenn es eine Teilmenge $B \subseteq M$ mit $B^\downarrow = A$ gibt. Gibt es eine einelementige Menge $\{m\} \subseteq M$ mit $m^\downarrow = A$, dann heißt A eine *Hyperebene*. Es sei $A \subseteq G$ ein Unterraum mit $A \neq G$. Dann gibt es eine nichtleere Teilmenge $B \subseteq M$ mit $B^\downarrow = A$, was $A = \bigcap_{m \in B} m^\downarrow$ bedeutet. Jeder von G verschiedene Unterraum ist daher ein Durchschnitt von Hyperebenen. Ein Unterraum, der durch zwei verschiedene Punkte generiert ist, heißt eine *Gerade*. Die durch die Punkte a, b generierte Gerade bezeichnen wir mit ab, d.h. $ab := \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$.

Ferner verwenden wir die üblichen geometrischen Redewendungen: Ein Punkt liegt auf einer Geraden (in einem Unterraum), eine Gerade geht durch einen Punkt usw. Liegen zwei verschiedene Punkte a, b in einem Unterraum A, dann $ab = \{a, b\}^{\uparrow\downarrow} \subseteq A^{\uparrow\downarrow} = A$ und die Gerade ab ist in A enthalten. Eine Gerade, die in einem Unterraum A nicht enthalten ist, hat also mit A höchstens einen Punkt gemeinsam.

Eine Inzidenzstruktur $\mathfrak{J} = (G, M, I)$ heißt *modular*, wenn es gilt:

(M1) $\{a, b\}^\uparrow \neq \emptyset \quad \forall a, b \in G$,

(M2) $\{m, n\}^\downarrow \neq \emptyset \quad \forall m, n \in M$,

(M3) $a, b \in G,\ x \in \{a, b\}^{\uparrow\downarrow},\ x \neq a \Rightarrow \{a, x\}^\uparrow \subseteq \{a, b\}^\uparrow$,

(M4) $m, n \in M,\ y \in \{m, n\}^{\downarrow\uparrow},\ y \neq m \Rightarrow \{m, y\}^\downarrow \subseteq \{m, n\}^\downarrow$.

Bemerkungen

1. Setzen wir in der vorgehenden Definition $a = b$, dann (M1) hat zur Folge $a^\uparrow \neq \emptyset$ für jedes $a \in G$ und die Forderung (M3) ist für alle $x \in G$, $x \neq a$ erfüllt. Dann gilt nämlich $\{a, x\}^\uparrow = a^\uparrow \cap x^\uparrow \subseteq a^\uparrow = \{a, b\}^\uparrow$. Ähnlicherweise im Falle $m = n$.

2. Gilt $x \in \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$, dann aus $x, a \in \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$ folgt $\{a, x\}^{\uparrow\downarrow} \subseteq \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$ und $\{a, b\}^\uparrow \subseteq \{a, x\}^\uparrow$. Die Forderung (M3) können wir daher äquivalent auch in der Form $\{a, x\}^\uparrow = \{a, b\}^\uparrow$ aussprechen.

3. Die Forderungen (M3), (M4) sind symmetrisch ausgesprochen. (M3) läßt sich aber allerdings im Falle $a \neq b$ einigermaßen vereinfachen: $x \in ab$, $x \neq a \Rightarrow ax = ab$.

Satz 1. *Liegen verschiedene Punkte c, d einer modularen Inzidenzstruktur auf einer Geraden ab, dann $ab = cd$.*

Beweis. Nehmen wir $c, d \in ab$, $c \neq d$ an. Wegen $a \neq b$ ist entweder $c \neq a$ oder $c \neq b$. Gilt z. B. $c \neq a$, dann erhalten wir nach (M3) $ac = ab$ und wegen $c \neq d$ dann auch $cd = ac$, also $ab = cd$.

Satz 2. *Es seien $m, n \in M$ mit $m \neq n$. Für $p, q \in \{m, n\}^{\downarrow\uparrow}$, $p \neq q$ gilt $\{m, n\}^{\downarrow\uparrow} = \{p, q\}^{\downarrow\uparrow}$.*

Satz 3. *Es sei $\mathcal{J} = (G, M, I)$ eine Inzidenzstruktur. Dann gilt $m^\downarrow = G\ \forall m \in M \iff g^\uparrow = M\ \forall g \in G$. Gilt $m^\downarrow = G$ für alle $m \in M$, dann ist $\mathcal{J}$ modular. Ist $\mathcal{J}$ modular, dann*

1. $|m^\downarrow| \geq 2\ \forall m \in M;\quad \exists g \in G,\ g^\uparrow = M \Rightarrow m^\downarrow = G\ \forall m \in M,$
2. $|g^\uparrow| \geq 2\ \forall g \in G;\quad \exists m \in M,\ m^\downarrow = G \Rightarrow g^\uparrow = M\ \forall g \in G,$
3. $\exists m \in M,\ |m^\downarrow| = 1 \Rightarrow \exists g \in G,\ g^\uparrow = M,$
4. $\exists g \in G,\ |g^\uparrow| = 1 \Rightarrow \exists m \in M,\ m^\downarrow = G.$

Beweis. Es sei $\mathcal{J}$ eine Inzidenzstruktur und nehmen wir $m^\downarrow = G\ \forall m \in M$ an. Ist $g \in G$, dann $g\ I\ m\ \forall m \in M$ und $g^\uparrow = M$. Ebenso verfahren wir im umgekehrten Falle. $\mathcal{J}$ ist dann modular: Tatsächlich, für $a, b \in G$ hat man $\{a, b\}^\uparrow = M$ und (M1) folgt daraus, daß M nichtleer ist. Zugleich ist $\{a, b\}^{\uparrow\downarrow} = G$ und $ab = cd$ gilt für beliebige $c, d \in G$, woraus schon (M3) folgt. Analog sind auch (M2), (M3) erfüllt.

Wir nehmen an, daß $\mathcal{J}$ modular ist.

Ad 1. Es sei $|m^\downarrow| \geq 2\ \forall m \in M$, $g^\uparrow = M$. Dann gilt $g\ I\ n$ für beliebiges $n \in M$ und wegen $|n^\downarrow| \geq 2$ gibt es einen Punkt $a \in G$ mit $a \neq g$ und $a\ I\ n$. Es sei b ein beliebiges Element aus G. Wegen $g \in \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$ und $g \neq a$ gilt nach (M3) $\{a, g\}^\uparrow \subseteq \{a, b\}^\uparrow$. Daraus ergibt sich $n \in \{a, b\}^\uparrow \Rightarrow n \in \{a, b\}^\uparrow \Rightarrow n \in a^\uparrow \cap b^\uparrow \Rightarrow n \in b^\uparrow \Rightarrow b\ I\ n$ und folglich $n^\downarrow = G$.

Analog läßt sich nach (M4) die Behauptung 2 beweisen.

Ad 3. Es sei $g \in G$ mit $g\ I\ m$. Für $n \in M$ gilt $\{m, n\}^\downarrow \neq \emptyset$ nach (M2) und wegen $m^\downarrow = \{g\}$ ist $g\ I\ n$, woher $g^\uparrow = M$.

Analog läßt sich nach (M1) die Behauptung 4 beweisen.

Verabredung. Ferner betrachten wir nur "zulässige" modulare Inzidenzstrukturen $\mathcal{J} = (G, M, I)$ mit $m^\downarrow \neq G$ für alle $m \in M$ und $g^\uparrow \neq M$ für alle $g \in G$, ohne es ausdrücklich festzustellen.

	a	b	c
m	–	–	
n	–		–
p		–	–

Abb. 1

Es sei also $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ eine solche Inzidenzstruktur. Nach Satz 3 gilt dann $|m^{\downarrow}| \geq 2$ $\forall m \in M$, $|g^{\uparrow}| \geq 2$ $\forall g \in G$ und offensichtlich auch $|G| > 2$, $|M| > 2$. Abbildung 1 zeigt die Inzidenztabelle der "kleinsten" modularen unsere Verabredung erfüllenden Inzidenzstruktur.

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ eine modulare Inzidenzstruktur. Für verschiedene $a, b \in G$ bzw. $m, n \in M$ gilt $a^{\uparrow} \not\subseteq b^{\uparrow}$ bzw. $m^{\downarrow} \not\subseteq n^{\downarrow}$.*

Beweis. Es sein m, n zwei verschiedene Elemente aus M.

1. Wir nehmen $m^{\downarrow} \neq n^{\downarrow}$ und $n^{\downarrow} \subseteq m^{\downarrow}$ an. Es gibt also einen Punkt $g \in G$ mit $g \in m^{\downarrow}$ und $g \notin n^{\downarrow}$. Wegen $|n^{\downarrow}| \geq 2$ gibt es $a, b \in n^{\downarrow}$, $a \neq b$, d.h. $a, b\ I\ n$. Zugleich ist $a, b, g\ I\ m$.

a) Zuerst nehmen wir $\{a, g\}^{\uparrow} = \{m\}$ an. Daraus folgt $m^{\downarrow} = \{a, g\}^{\uparrow\downarrow}$. Wegen $b \in m^{\downarrow}$ erhalten wir daher $b \in \{a, g\}^{\uparrow\downarrow}$. Nach (M3) gilt $\{a, b\}^{\uparrow} \subseteq \{a, g\}^{\uparrow}$ und $n \in \{a, b\}^{\uparrow}$ impliziert $n \in \{a, g\}^{\uparrow}$, also $g \in n^{\uparrow}$, was aber ein Widerspruch ist.

b) Wir nehmen an, daß es ein Element $p \in M$ mit $p \neq m$ und $p \in \{a, g\}^{\uparrow}$ gibt. Aus $\{n, p\}^{\downarrow} = n^{\downarrow} \cap p^{\downarrow} \subseteq n^{\downarrow} \subseteq m^{\downarrow}$ folgt $m \in m^{\downarrow\uparrow} \subseteq \{p, n\}^{\downarrow\uparrow}$. Wegen $g \in \{p, m\}^{\downarrow}$ gilt nach (M4) $g \in \{p, n\}^{\downarrow}$, also $g \in n^{\downarrow}$, was wieder ein Widerspruch ist.

2. Es sei $m^{\downarrow} = n^{\downarrow}$. Nach $m^{\downarrow} \neq G$ und (M2) gibt es Punkte $a, c \in G$ mit $c \notin m^{\downarrow}$, $a \in m^{\downarrow}$ und nach (M1) gibt es ein Element $p \in M$ mit $p \in \{a, c\}^{\uparrow}$, also $c\ I\ p$. Dies bedeutet $p^{\downarrow} \neq m^{\downarrow}$ und nach dem Fall 1 gilt $p^{\downarrow} \not\subseteq m^{\downarrow}$. Es gibt daher $b \in m^{\downarrow}$ und $b \notin p^{\downarrow}$. Aus $\{n, p\}^{\downarrow} = n^{\downarrow} \cap p^{\downarrow} \subseteq n^{\downarrow} = m^{\downarrow}$ folgt $m \in \{m\}^{\downarrow\uparrow} \subseteq \{n, p\}^{\downarrow\uparrow}$ und nach (M4) ergibt sich $\{m, n\}^{\downarrow} \subseteq \{n, p\}^{\downarrow}$. Wegen $b \in \{n, m\}^{\downarrow}$ gilt daher $b \in \{n, p\}^{\downarrow}$, also $b \in p^{\downarrow}$. Dies ist aber ein Widerspruch.

Ähnlicherweise läßt sich $a, b \in G$, $a \neq b \Rightarrow a^{\uparrow} \not\subseteq b^{\uparrow}$ beweisen.

Folgerung. In jeder modularen Inzidenzstruktur $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ gilt $g^{\uparrow\downarrow} = \{g\}$ $\forall g \in G$ und $m^{\downarrow\uparrow} = \{m\}$ $\forall m \in M$.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ eine modulare Inzidenzstruktur, in welcher zwei verschidene Punkte a, b gibt, durch die genau eine Hyperebene $p^{\downarrow}$, $p \in M$ geht. Dann hat jede Hyperebene $m^{\downarrow}$, $m \neq p$ mit $p^{\downarrow}$ genau einen Punkt gemeinsam.*

Beweis. Es sei $m \in M$, $m \neq p$. Nach (M2) enthalten $m^{\downarrow}, p^{\downarrow}$ mindestens einen Punkt gemeinsam. Nehmen wir an, daß es zwei verschiedene in $m^{\downarrow}, p^{\downarrow}$ liegende Punkte g, h gibt, d.h. $g, h \in m^{\downarrow} \cap p^{\downarrow} = \{m, p\}^{\downarrow}$ und $m, p \in \{g, h\}^{\uparrow}$. Aus $g = a$ und $h = b$ folgt $m \in \{a, b\}^{\uparrow}$ und $m = p$, was aber ein Widerspruch ist. Nehmen wir also $g = a$ und $h \neq b$ an. Wegen $\{a, b\}^{\uparrow} = \{p\}$ gilt $\{a, b\}^{\uparrow\downarrow} = p^{\downarrow}$ und $h \in \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$.

Aus $h \neq a$, $m \in \{a,h\}^{\uparrow}$ folgt nach (M3) $m \in \{a,b\}^{\uparrow}$, also ein Widerspruch. Endlich sei $a \neq g,h$ und $b \neq g,h$. Nach Vorangehendem ist $\{a,h\}^{\uparrow} = \{p\}$ und durch weitere Benützung dieses Ergebnisses erhält man $\{g,h\}^{\uparrow} = \{p\}$, also $m = p$, was zu $m \neq p$ widerspricht. Die Hyperebenen $m^{\downarrow}, p^{\downarrow}$ haben also genau einen Punkt gemeinsam.

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{J} = (G,M,I)$ eine modulare Inzidenzstruktur, in der es zwei verschiedene Hyperebenen $m^{\downarrow}, n^{\downarrow}$ gibt, die genau einen Punkt a gemeinsam haben. Ist b ein Punkt mit $b \neq a$, dann geht durch a,b genau eine Hyperebene.*

Satz 7. *Es gebe in der modularen Inzidenzstruktur zwei verschiedene Punkte, die in genau einer Hyperebene liegen. Dann geht durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Hyperebene und je zwei Hyperebenen haben genau einen Punkt gemeinsam.*

Beweis. Es seinen a,b zwei verschiedene Punkte, durch die genau eine Hyperebene $p^{\downarrow}$, $p \in M$ geht. Dann $\{a,b\}^{\uparrow} = \{p\}$. Es seinen c,d weitere verschiedene Punkte. Gilt $c,d\ I\ p$, so $\{c,d\}^{\uparrow} = \{p\}$ nach Satz 5. Es gelte beispielweise $c \not\!I\ p$. Nach (M1) gibt es ein $m \in M$ mit $m \in \{c,d\}^{\uparrow}$. Nach Sätzen 5, 6 folgt aus $m \neq p$ schrittweise $\{m,p\}^{\downarrow} = m^{\downarrow} \cap p^{\downarrow} = \{g\}$, $\{m\} = \{c,g\}^{\uparrow}$ und $\{m\} = \{c,d\}^{\uparrow}$. Weiter seien m,n zwei verschiedene Elemente aus M. Nach (M2) gibt es dann einen Punkt x mit $x \in \{m,n\}^{\downarrow}$. Aus $y \in G$, $y \neq x$, $y \in \{m,n\}^{\downarrow}$ folgt $m,n \in \{x,y\}^{\uparrow}$, was ein Widerspruch ist.

Satz 8. *Gibt es in einer modularen Inzidenzstruktur zwei verschiedene Hyperebenen, die genau einen Punkt gemeinsam haben, dann haben je zwei verschiedene Hyperebenen genau einen Punkt gemeinsam und durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Hyperebene.*

Bemerkung 1. Sind die Forderungen aus Sätzen 7, 8 erfüllt, dann ist jede Hyperebene zugleich eine Gerade und umgekehrt jede Gerade ist auch eine Hyperebene.

Bemerkung 2. Eine modulare Inzidenzstruktur ist zugleich eine projektive Ebene, wenn folgende zwei Forderungen gelten:

1. Es gibt zwei verschiedene Punkte, die in genau einer Hyperebene liegen.
2. Es gibt vier Punkte, aus denen keine drei in einer Hyperebene liegen.

Definition. Es sei $\mathcal{J} = (G, M, I)$ eine Inzidenzstruktur. Bildet man die Mengen $G_1 = G \cup \{x\}$, $M_1 = M \cup \{l\}$ mit $x \notin G$, $l \notin M$, so sei $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ die Inzidenzstruktur mit folgender Inzidenzrelation I_1:

$g\ I_1\ m \Leftrightarrow g\ I\ m, \quad g \in G,\ m \in M,$

$g\ I_1\ l \quad \forall g \in G,$

$x\ I_1\ m \quad \forall m \in M.$

$\mathcal{J}_1$ heißt die *einfache Erweiterung* der Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$.

Es seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_1$ die Inzidenzstrukturen aus obiger Definition. Wir wollen alle Unterräume der Inzidenzstruktur $\mathcal{J}_1$ bestimmen. Die Bezeichnungen $\downarrow$, $\uparrow$ bezeichnen wir dabei bezüglich $\mathcal{J}$ von rechts und bezüglich $\mathcal{J}_1$ von links.

1. Es sei $A \subseteq G$. Dann ${}^{\uparrow}A = \{n \in M \mid A \subseteq n^{\downarrow}\} \cup \{l\}$ und ${}^{\downarrow\uparrow}A = {}^{\downarrow}\{n \in M \mid A \subseteq n^{\downarrow}\} \cap {}^{\downarrow}\{l\} = (A^{\uparrow\downarrow} \cup \{x\}) \cap G = A^{\uparrow\downarrow}$.

2. Es sei $B \subseteq G_1$, $x \in B$. Dann ist $B = A \cup \{x\}$ mit $A \subseteq G$. Es gilt ${}^{\uparrow}B = {}^{\uparrow}(A \cup \{x\}) = {}^{\uparrow}A \cap {}^{\uparrow}x = (\{n \in M \mid A \subseteq {}^{\downarrow}n\} \cup \{l\}) \cap M = \{n \in M \mid A \subseteq n^{\downarrow}\}$ und ${}^{\downarrow\uparrow}B = {}^{\downarrow}\{n \in M \mid A \subseteq n^{\downarrow}\} = A^{\downarrow\uparrow} \cup \{x\}$. Somit erhält man ${}^{\uparrow\downarrow}B = B \Leftrightarrow {}^{\downarrow\uparrow}(A \cup \{x\}) = A^{\uparrow\downarrow} \cup \{x\} = A \cup \{x\} \Leftrightarrow A^{\uparrow\downarrow} = A$.

Alle Unterräume von $\mathcal{J}_1$ sind entweder zugleich die Unterräume von $\mathcal{J}$ oder sie stellen die Vereinigung der Unterräume von $\mathcal{J}$ mit $\{x\}$ dar.

Satz 9. *Es seien $\mathcal{J} = (G, M, I)$ eine Inzidenzstruktur und $\mathcal{J}_1$ ihre einfache Erweiterung. Die Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ ist genau dann modular, wenn $\mathcal{J}$ modular ist.*

Beweis. 1. Es sei $\mathcal{J}$ modular. Es sollen für $\mathcal{J}_1$ die Forderungen (M1)–(M4) nachgeprüft werden.

Ad (M1). Für $a, b \in G$ gibt es ein $m \in M$ mit $a, b\ I\ m$, woher $a, b\ I_1\ m$ und $m \in {}^{\uparrow}\{a, b\}$ folgt. Für $a, x \in G_1$ mit $a \neq x$ gibt es ein $m \in M$ mit $a\ I\ m$, also $a\ I_1\ m$. Wegen $x\ I_1\ m$ gilt dann $m \in {}^{\uparrow}\{a, x\}$.

Ad (M2). Wir verfahren analog zu Ad (M1).

Ad (M3). Sind a, b zwei Punkte von G, dann ${}^{\downarrow\uparrow}\{a, b\} = \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$. Für $g \in G$ mit $g \neq a$ gilt ${}^{\uparrow}\{a, g\} = \{m \in M \mid m \in \{a, g\}^{\uparrow}\} \cup \{l\}$. Es sei $g \in {}^{\downarrow\uparrow}\{a, b\}$, also $g \in \{a, b\}^{\uparrow\downarrow}$; weiter sei $c \in {}^{\uparrow}\{a, g\}$ angenommen. Aus $c = l$ folgt $a, b\ I_1\ l$ und $c \in {}^{\uparrow}\{a, b\}$. Für $c = m$, $m \in M$ gilt $m \in \{a, g\}^{\uparrow}$ und nach (M3) ergibt sich $m \in \{a, b\}^{\uparrow}$, also $m \in {}^{\uparrow}\{a, b\}$ und $c \in {}^{\uparrow}\{a, b\}$.

Für $a \in G$ ist ${}^{\downarrow\uparrow}\{a, x\} = a^{\uparrow\downarrow} \cup \{x\} = \{a\} \cup \{x\}$. Es sei $g \in {}^{\downarrow\uparrow}\{a, x\}$. Aus $g = x$ folgt ${}^{\uparrow}\{a, g\} = {}^{\uparrow}\{a, x\}$ und für $g = a$ erhält man ${}^{\uparrow}\{x, g\} = {}^{\uparrow}\{x, a\}$.

Ad (M4). Sind $m, n \in M$, dann ${}^{\downarrow}\{m, n\} = \{g \in G \mid g \in \{m, n\}^{\downarrow}\} \cup \{x\}$ und ${}^{\uparrow\downarrow}\{m, n\} = \{p \in M \mid p \in \{m, n\}^{\downarrow\uparrow}\}$. Es sei $y \in {}^{\uparrow\downarrow}\{m, n\}$, $y \neq m$, also $y \in \{m, n\}^{\downarrow\uparrow}$. Für $c \in {}^{\downarrow}\{m, y\}$ ist entweder $c = x$ oder $c \in \{m, y\}^{\downarrow}$. Im Falle $c = x$ ergibt sich $c\ I_1\ m, n$ und $c \in {}^{\downarrow}\{m, n\}$. Aus $c \neq x$ folgt nach (M4) $c \in \{m, n\}^{\downarrow}$, was aber $c \in {}^{\downarrow}\{m, n\}$ bedeutet. Für $m \in M$ gilt ${}^{\downarrow}\{m, l\} = m^{\downarrow}$ und ${}^{\uparrow\downarrow}\{m, l\} = m^{\downarrow\uparrow} \cup \{l\} = \{m\} \cup \{l\}$. Gilt $y \in {}^{\uparrow\downarrow}\{m, l\}$, dann ist entweder $y = l$ oder $y = m$ und ${}^{\downarrow}\{m, y\} = {}^{\downarrow}\{y, l\} = {}^{\downarrow}\{m, l\}$.

2. Es sei $\mathcal{J}_1$ modular. Die Gültigkeit von (M1), (M2) in $\mathcal{J}$ ist offensichtlich.

Ad (M3). Es seien $a, b, g \in G$ mit $g \neq a$ und $g \in \{a,b\}^{\uparrow\downarrow}$ gegeben. Nehmen wir dabei $m \in \{a,g\}^{\uparrow}$ an. Wegen $\{a,g\}^{\uparrow} = \{m \mid a,g\ I\ m\}$ ist $a,g\ I\ m$ und $a,g\ I_1\ m$, also $m \in {}^{\uparrow}\{a,g\}$. Daraus folgt $m \in {}^{\uparrow}\{a,b\}$, weil $\mathfrak{J}_1$ modular ist. Wegen ${}^{\uparrow}\{a,b\} = \{m \in M \mid m \in \{a,b\}^{\uparrow}\} \cup \{l\}$ ist $m \in \{a,b\}^{\uparrow}$ und in $\mathfrak{J}$ gilt (M3).

Ad (M4). Man verfährt analog zu Ad (M3).

Bemerkung 3. Die Figur 11 in [2] enthält die Inzidenztabelle der einfachen Erweiterung der projektiven Ebene des Ranges 2.

Ferner führen wir einige Zusammenhänge zwischen angeordneten Mengen und Inzidenzstrukturen ein. Ist $(A, \leq)$ eine angeordnete Menge, dann $U(B) = \{x \in A \mid b \leq x\ \forall b \in B\}$ bzw. $L(B) = \{x \in A \mid x \leq b\ \forall b \in B\}$ heißt ein Ober- bzw. Unterkegel einer nichtleeren Menge $B \subseteq A$. Für $B = \emptyset$ setzen wir $U(B) = L(B) = A$. In den speziellen Fällen $B = \{a\}$, $B = \{a,b\}$ schreibt man kurz $U(a)$, $L(a)$ bzw. $U(a,b)$, $L(a,b)$ anstatt $U(\{a\})$, $L(\{b\})$ usw. Es läßt sich leicht einsehen, daß $U(B) = \bigcap_{b \in B} U(b)$, $L(B) = \bigcap_{b \in B} L(b)$ gilt.

Für Elemente $a, b, c \in A$ setzen wir $Q_L = L(U(a,b), c)$ und $Q_R = L(U(a, L(b,c))$. Aus $a \leq c$ folgt dann $Q_R \subseteq Q_L$. Gilt außerdem eine von den Beziehungen $a = c$, $b \leq c$, $c \leq b$, $a \leq b$, dann gilt sogar $Q_L = Q_R$. Ist die Gleichheit $Q_L = Q_R$ für alle Tripel $(a,b,c) \in A^3$ mit $a \leq c$ erfüllt, so nennt man die angeordnete Menge $(A, \leq)$ *modular* (vgl. [3]). Ein Verband ist modular genau dann, wenn er als angeordnete Menge modular ist.

Es sei $\mathfrak{J} = (G, M, I)$ eine Inzidenzstruktur. Auf der Menge $A = G \cup M$ läßt sich eine Anordnung $\leq$ folgendermaßen einführen: $a \leq a\ \forall a \in G$, $m \leq m\ \forall m \in M$, $a \leq m \Leftrightarrow a\ I\ m$ für $a \in G$, $n \in M$. Für $a \in G$ bzw. $m \in M$ erhalten wir $U(a) = a^{\uparrow} \cup \{a\}$, $L(a) = \{a\}$ bzw. $L(m) = m^{\downarrow} \cup \{m\}$, $U(m) = \{m\}$ und für verschiedene Elemente $a, b \in G$ bzw. $m, n \in M$, dann $U(a,b) = \{a,b\}^{\uparrow}$, $L(a,b) = \emptyset$ bzw. $L(m,n) = \{m,n\}^{\downarrow}$, $U(m,n) = \emptyset$.

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{J} = (G, M, I)$ eine Inzidenzstruktur. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

1. *Es gilt $a^{\uparrow} \neq \emptyset\ \forall a \in G$, $m^{\downarrow} \neq \emptyset\ \forall m \in M$ und die angeordnete Menge $(G \cup M, \leq)$ ist modular.*
2. *Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{J}$ ist modular.*

Beweis. Wir setzen $A = G \cup M$.

1. $\Rightarrow$ 2. Wir nehmen an, daß die angeordnete Menge $(A, \leq)$ modular mit $a^{\uparrow} \neq \emptyset\ \forall a \in G$, $m^{\downarrow} \neq \emptyset\ \forall m \in M$ ist und wollen beweisen, daß in diesem Falle $\mathfrak{J}$ die Forderungen (M1)–(M4) erfüllt.

Ad (M1). Es seien $a, b \in G$ gegeben. Ist $a = b$, dann gilt nach unserer Voraussetzung $\{a,b\}^{\uparrow} = a^{\uparrow} \neq \emptyset$. Es sei $a \neq b$. Nehmen wir dabei $\{a,b\}^{\uparrow} = \emptyset$, also $U(a,b) = \emptyset$ an. Wegen $a^{\uparrow} \neq \emptyset$ gibt es ein $c \in M$ mit $a\ I\ c$, was $a \leq c$ bedeutet.

Unserer Voraussetzung $\{a,b\}^\uparrow = \emptyset$ nach ist $b \not I c$ und folglich $L(b,c) = \emptyset$. Damit erhalten wir $Q_R = L(U(a,\emptyset)) = L(U(a) \cap A) = LU(a) = L(a) = \{a\}$. Zugleich gilt aber $Q_L = L(\emptyset, c) = L(c) = c^\downarrow \cup \{c\}$. Wegen $a \neq c$ ist also $Q_L \neq Q_R$, was einen Widerspruch bedeutet.

Ad (M2). Wir verfahren ähnlich wie im vorigen Fall.

Ad (M3). Es seien $a, b \in G$ gegeben. Im Falle $a = b$ ist die Forderung (M3) stets erfüllt. Es sei also $a \neq b$. Wir betrachten $x \in G$ mit $x \neq a$ und $x \in \{a,b\}^{\uparrow\downarrow}$, was $x\ I\ m\ \forall m \in \{a,b\}^\uparrow$ bedeutet und nehmen wir dabei an, daß es ein $c \in M$ mit $c \in \{a,x\}^\uparrow$ und $c \notin \{a,b\}^\uparrow$ gibt, was $a, x\ I\ c$ und $b \not I c$ impliziert. Wegen $b \not I c$ gilt $L(b,c) = \emptyset$ und daraus folgt $Q_R = L(a) = \{a\}$. Offensichtlich ist $Q_L = L(U(a,b),c) = LU(a,b) \cap L(c)$. Wegen $x\ I\ c$ und $x \leq m\ \forall m \in \{a,b\}^\uparrow$ gilt $x \in L(c)$ und $x \in L((a,b)^\uparrow) = LU(a,b)$, also $x \in Q_L$. Zugleich ist aber $x \notin Q_R$, woher $Q_L \neq Q_R$ folgt, was wegen $a \leq c$ ein Widerspruch ist. Damit erhält man $\{a,x\}^\uparrow \subseteq \{a,b\}^\uparrow$.

Ad (M4). Es seien $b, c \in M$ gegeben. Es genügt nur den Fall $a \neq b$ bedenken. Wir wählen ein $y \in M$ mit $y \neq c$ und $y \in \{b,c\}^{\downarrow\uparrow}$, was $g\ I\ y\ \forall g \in \{b,c\}^\downarrow$ bedeutet und nehmen dabei an, daß es einen Punkt $a \in G$ mit $a \in \{c,y\}^\downarrow$ und $a \notin \{b,c\}^\downarrow$ gibt, was $a\ I\ c, y$ und $a \not I b$ impliziert. Wegen $a \not I b$ gilt $U(a,b) = \emptyset$ und daraus folgt $Q_L = L(\emptyset, c) = L(c)$. Offensichtlich ist $Q_R = L(U(a, L(b,c)) = L(U(a) \cap UL(b,c))$. Setzen wir $B = U(a) \cap UL(b,c)$, dann $c, y \in B$, weil $c, y \in U(a)$ und wegen $c, y \in \{b,c\}^{\downarrow\uparrow}$ auch $c, y \in UL(b,c)$ gilt. Daher erhalten wir $Q_R = L(B) \subseteq L(c) \cap L(y)$, wo $L(c) = c^\downarrow \cup \{c\}$ und $L(y) = y^\downarrow \cup \{y\}$ ist. Aus $Q_L = Q_R$ folgt $L(c) \subseteq L(c) \cap L(y)$ und $L(c) \subseteq L(y)$, was wegen $c \neq y$ ein Widerspruch ist. Damit erhalten wir $\{c,y\}^\downarrow \subseteq \{b,c\}^\downarrow$.

2. $\Rightarrow$ 1. Wir setzen voraus, daß die Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ modular ist. Dann gilt $a^\uparrow \neq \emptyset\ \forall g \in G$ und $m^\downarrow \neq \emptyset\ \forall m \in M$. Wir wollen die Gleichheit $Q_L = Q_R$ für beliebige $a, b, c \in A$ mit $a \leq c$ beweisen. Es genügt aber nur solche Fälle nachzuprüfen, wo $a \neq c$ und die Elemente a, b bzw. b, c nicht vergleichbar sind. Aus $a \leq c$, $a \neq c$ folgt dann $a \in G$, $c \in M$ und $a\ I\ c$.

1. Es sei b ein Punkt. Dann gilt $b \not I c$, $L(b,c) = \emptyset$ und $Q_R = LU(a,\emptyset) = L(a) = \{a\}$. Nach (M1) ist $\{a,b\}^\uparrow \neq \emptyset$ und folglich $U(a,b) \neq \emptyset$. Offensichtlich gilt $a \in LU(a,b) \cap L(c) = Q_L$. Wir nehmen an, daß es einen Punkt $x \neq a$ mit $x \in Q_L$ gibt. Dann $x \in \{a,b\}^{\uparrow\downarrow}$ und zugleich $x\ I\ c$. Wegen $c \in \{x,a\}^\uparrow$ und $c \notin \{a,b\}^\uparrow$ gilt $\{x,a\}^\uparrow \not\subseteq \{a,b\}^\uparrow$, was zu (M3) widerspricht. Es gilt daher $Q_L = \{a\}$ und $Q_L = Q_R$.

2. Gilt $b \in M$, dann $a \not I b$, $U(a,b) = \emptyset$ und $Q_L = L(c)$. Wir wollen beweisen, daß auch $Q_R = L(c)$ ist. Offensichtlich gilt $c \in U(a) \cap UL(b,c)$. Nehmen wir dabei an, daß es ein $x \in M$ mit $x \neq c$ und $x \in U(a) \cap UL(b,c)$ gibt. Dann gilt $x \in \{b,c\}^{\downarrow\uparrow}$ und $a\ I\ x$. Wegen $a \in \{x,c\}^\downarrow$, $a \notin \{b,c\}^\downarrow$ ergibt sich $\{x,c\}^\downarrow \not\subseteq \{b,c\}^\downarrow$, was zu (M4) widerspricht. Somit erhalten wir $\{c\} = U(a) \cap UL(b,c)$, woraus schon $L(U(a) \cap UL(b,c)) = L(c)$ und $Q_R = L(c) = Q_L$ folgt.

Jetzt führen wir einige Beispiele der modularen Inzidenzstrukturen an.

1. Jede projektive Ebene ist zugleich eine modulare Inzidenzstruktur.

2. Es sei P ein beliebiger projektiven Raum (siehe z. B. [1]); mit G bzw. M bezeichnen wir seine Punktmenge bzw. Hyperebenemenge. Dann ist $\mathfrak{I} =$

(G, M, I) eine modulare Inzidenzstruktur, wo I die übliche Inzidenzrelation ist. Für jede Hyperebene m von P ist $m^{\downarrow}$ die Hyperebene von $\mathcal{J}$. In $\mathcal{J}$ sollen wir also die Hyperebenen als Punktmengen auffassen.

3. Es seien $P = (G, M, I)$ ein projektiver Raum endlicher Dimension n nach dem Beispiel 2 und U ein Unterraum von P der Dimension d mit $d < n - 2$. Die Inzidenzstruktur $\mathcal{J} = (G_1, M, I_1)$ mit $G_1 = G - U$, $I_1 = (G_1 \times M) \cap I$ ist modular.

4. Es seien n, d natürliche Zahlen mit $n \geq 4$, $1 \leq d \leq n - 2$. Wir bestimmen eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J} = (G, M, I)$ folgendermaßen: Wir setzen $G = \{a_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$, $M = \{m_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ und die Inzidenzrelation I definieren wir wie folgt: Für $j \in \{1, \ldots, d\}$ ist $a_i \; I \; m_j \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, für $k \in \{d+1, \ldots, n\}$ ist $a_i \; I \; m_k$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ und $a_k \; I \; m_k$. Die Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ ist modular (Abb. 2 enthält die Inzidenztabelle von $\mathcal{J}$ für $n = 6$, $d = 3$.)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
m_1		–	–	–	–	–
m_2	–		–	–	–	–
m_3	–	–		–	–	–
m_4	–	–	–	–		
m_5	–	–	–		–	
m_6	–	–	–			–

Abb. 2

In den Hyperebenen $m_i^{\downarrow}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ liegen $n - 1$ Punkte, in $m_j^{\downarrow}$, $j \in \{d+1, \ldots, n\}$ dann $d + 1$ Punkte. Alle Geraden sind zweipunktige Mengen mit Ausnahme der Geraden $\{a_{d+1}, \ldots, a_n\}$.

In [2] kann man weitere Beispiele der endlichen modularen Inzidenzstrukturen finden.

Literatur

[1] Lenz, H.: *Vorlesungen über projektive Geometrie.* Leipzig, 1965, S. 360.

[2] Machala, F.: *Konstruktionen einiger endlicher modularer Inzidenzstrukturen.* Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat. **100** (1991), 235–253.

[3] Rachůnek, J., Larmerová, J.: *Translation of distributive and modular sets.* Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat. **91** (1988), 13–25.

[4] Wille, R.: *Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts.* In: I. Rival (ed.). Ordered sets. Riedel, Dordrecht–Boston, 1982, 445–470.