ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS FACULTAS RERUM NATURALIUM

1993 Mathematica XXXII Vol. 110

ISOMORPHISMEN VON KONTEXTEN UND KONZEPTUALVERBÄNDEN

FRANTIŠEK MACHALA

(Vorgelegt am 20. Juli 1992)

Abstract

The paper is devoded to some questions concerning isomorphisms of context and corresponding concept lattices. For example contexts with isomorphic concept lattices are characterised.

Key words: Context, concept lattice

MS Classification: 06B05

Definition 1 Ein *Kontext* ist ein Tripel (G, M, I), wo G, M nichtleere Mengen sind und $I \subseteq G \times M$. Es sei $A \subseteq G$. Ist $A \neq \emptyset$, dann

$$A' = \{m \in M \mid g\ I\ m \quad \forall g \in A\}.$$

Für $A = \emptyset$ gilt $A' = M$. Es sei $B \subseteq M$. Ist $B \neq \emptyset$, dann

$$B' = \{g \in G \mid g\ I\ m \quad \forall m \in B\}.$$

Für $B = \emptyset$ gilt $B' = G$. Ferner setzen wir $A'' = (A')'$, $B'' = (B')'$ für $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ und $g' := \{g\}'$, $m' := \{m\}'$ für $g \in G$, $m \in M$.

Satz 1 *Setzen wir $Q = \{A \subseteq G | A = A''\}$, dann die teilgeordnete Menge $(Q, \subseteq)$ stellt einen vollständigen Verband dar mit*

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i \quad \textit{und} \quad \bigvee_{i \in I} A_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i'\right)' \qquad \textit{für } A_i \in Q \quad \forall i \in I.$$

Bemerkung 1 Es sei $\mathfrak{J} = (G, M, I)$ ein Kontext. Der zu $\mathfrak{J}$ gehörige Verband $(Q, \bigvee, \bigwedge)$ heißt *konzeptual*, und wird mit $L_{\mathfrak{J}}$ bezeichnet. Es gilt $G \in Q$ und G ist ein Einheitselement von $L_{\mathfrak{J}}$. Zugleich ist M' ein Nullelement von $L_{\mathfrak{J}}$ und g'', $m' \in L_{\mathfrak{J}}$ für alle $g \in G$, $m \in M$.

Definition 2 Es sei L ein vollständiger Verband. Eine Teilmenge $\mathcal{U}$ bzv.$\mathcal{V}$ von L heißt *supremal* bzw. *infimal dicht* in L, wenn sich jedes Element $x \in L$ in der Form $x = \bigvee\limits_{N \subseteq \mathcal{U}} N$ bzw. $x = \bigwedge\limits_{P \subseteq \mathcal{V}} P$ ausdrücken läßt.

Bemerkung 2 Ist o bzw. 1 ein Null- bzw. Einheitselement von L und sind $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ aus Definition 2, dann $o \in \mathcal{U}$, $1 \in \mathcal{V}$.

Bezeichnungen Es sei $\mathfrak{J} = (G, M, I)$ ein Kontext. Wir setzen

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{J}} = \{g'' \mid g \in G\}, \qquad \mathcal{M}_{\mathfrak{J}} = \{m' \mid m \in M\},$$

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{J}} = \mathcal{G}_{\mathfrak{J}} \cup \{o\}, \quad \mathcal{V}_{\mathfrak{J}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{J}} \cup \{1\}, \quad \mathcal{U}'_{\mathfrak{J}} = \mathcal{U}_{\mathfrak{J}} \cup \{1\}, \quad \mathcal{V}'_{\mathfrak{J}} = \mathcal{V}_{\mathfrak{J}} \cup \{o\},$$

wo $o, 1$ die bedeutsamen Elemente von $L_{\mathfrak{J}}$ sind.

Satz 2 *Es sei* $\mathfrak{J} = (G, M, I)$ *ein Kontext. Die Menge* $\mathcal{U}_{\mathfrak{J}}$ *bzw.* $\mathcal{V}_{\mathfrak{J}}$ *ist supremal bzw. infimal dicht in* $L_{\mathfrak{J}}$ *und es gilt*

$$g\ I\ m \Longleftrightarrow g'' \subseteq m'.$$

Beweis Es sei $A \in L_{\mathfrak{J}}$. Ist $A \neq \emptyset$, dann $A = \bigvee\{g'' \mid g \in A\}$. Ist $A = \emptyset$, dann $A' = M$ und $A = A'' = M' = o$, wo $o = \bigvee\{o\}$, $o \in \mathcal{U}_{\mathfrak{J}}$.

Gilt $A' \neq \emptyset$,dann $A = \bigwedge\{m' \mid m \in A'\}$. Ist $A' = \emptyset$, dann $A = A'' = G = 1$. Offensichtlich gilt $g\ I\ m \Leftrightarrow g'' \subseteq m'$.

Bemerkung 3 Im Hauptsatz der Theorie von Konzeptualverbänden (R.Wille [2]) wird gesagt, daß $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}}$,$\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}$ dicht im Verband $L_{\mathfrak{J}}$ sind. Diese Behauptung ist aber nicht ganz pünktlich. Gilt $m' \neq G \quad \forall m \in M$, dann $G = 1 \notin \mathcal{M}_{\mathfrak{J}}$ und die Menge $\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}$ ist in $L_{\mathfrak{J}}$ nicht infimal dicht. Gilt ähnlicherweise $M' = \emptyset$, dann $o = \emptyset$, $o \notin \mathcal{G}_{\mathfrak{J}}$ und $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}}$ ist nicht supremal dicht.

Satz 3 *Es seien* $\mathfrak{J} = (G, M, I)$ *ein Kontext und* L *ein vollständiger Verband. Es seien* α, β *solche Abbildugen von* G, M *in*L*, daß* $\mathcal{U} = \alpha G \cup \{o\}$ *bzw.* $\mathcal{V} = \beta M \cup \{1\}$ *supremal bzw. infimal dicht in* L *sind und* $g\ I\ m \Leftrightarrow \alpha g \leq \beta m$ *gilt. Dann gibt es einen Isomorphismus* φ *der Verbände* $L_{\mathfrak{J}}$, L, *der eine bijektive Abbildung der Mengen* $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}}$, αG *und* $\mathcal{M}_{\mathfrak{J}}$, βM *mit* $\varphi g'' = \alpha g \quad \forall g \in G$ *und* $\varphi m' = \beta m \quad \forall m \in M$ *induziert.*

Den Beweis deuten wir nur an.

a) Es gilt $\alpha g = o \Leftrightarrow g \in M'$, $\quad \beta m = 1 \Leftrightarrow m \in G'$.

b) Es sei $x \in L$, $x \neq o, 1$.
Nach unserer Voraussetzung ist $x = \bigvee_{N \subseteq \mathcal{U}} N = \bigwedge_{P \subseteq \mathcal{V}} P$. Offensichtlich $N \neq \{o\}$, $P \neq \{1\}$ und es läßt sich $N \subseteq \alpha G$, $P \subseteq \beta M$ voraussetzen. Deshalb gibt es $N_1 \subseteq G$, $P_1 \subseteq M$ mit $\alpha N_1 = N$, $\beta P_1 = P$ und wir können $x = \bigvee\{\alpha g \mid g \in \in N_1\} = \bigwedge\{\beta m \mid m \in P_1\}$ schreiben.

c) Es läßt sich $x = \bigwedge\{\beta n \mid n \in N_1'\} = \bigvee\{\alpha h \mid h \in P_1'\}$ beweisen.

d) Nach b), c) ergibt sich $x = \bigvee\{\alpha g \mid g \in N_1\} = \bigwedge\{\beta m \mid m \in N_1') = \bigvee\{\alpha h \mid h \in \in N_1''\}$, wo $N_1'' \in L_{\mathcal{J}}$.

e) Für $x \neq o, 1$ gibt es genau eine Menge $A \in L_{\mathcal{J}}$ mit $x = \bigvee\{\alpha g \mid g \in A\}$.

f) Die Abbildung $\varphi : A \mapsto \bigvee\{\alpha g \mid g \in A\}$ für $A \neq M'$ und $M' \mapsto o$ ist ein Isomorphismus der Verbände $L_{\mathcal{J}}$, L.

g) Es sei $g'' \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}}$. Nach f), b), c) gilt $\varphi g'' = \bigvee\{\alpha h \mid h \in g''\} = \bigwedge\{\beta m \mid m \in g'\}$.
Zugleich ist aber $\alpha g = \bigvee\{\alpha g \mid g \in \{g\}\} = \bigwedge\{\beta m \mid m \in g'\}$.
Daraus folgt $\varphi g'' = \alpha g$. Ganz ähnlich läßt sich $\varphi m' = \beta m \quad \forall m' \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ beweisen.

Bezeichnungen Es seien $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ Kontexte. Ein Symbol

$$(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2})$$

bzw.

$$(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2})$$

bzw.

$$(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2})$$

bedeutet, daß ein Isomorphismus der Verbände $L_{\mathcal{J}_1}, L_{\mathcal{J}_2}$ existiert, der bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2}$ bzw. $\mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}$ und $\mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2}$ bzw. $\mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}$ und $\mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2}$ induziert.

Bemerkung 4 Es gilt $(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2}) \Rightarrow (L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}) \simeq \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2}) \Rightarrow (L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2})$. Die umgekehrten Implikationen gelten im Allgemeinen nicht.

Definition 3 Es seien $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$, $\mathcal{J}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ Kontexte. Eine Abbildung $\rho : G_1 \cup M_1 \to G_2 \cup M_2$ heißt *Homomorphismus* von $\mathcal{J}_1$ in $\mathcal{J}_2$, wenn $\rho G_1 \subseteq G_2 \quad \rho M_1 \subseteq M_2$ und $g \; I_1 \; m \Rightarrow \rho g \; I_2 \; \rho m$ gilt. Ein Homomorfismus $\rho : \mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$ ist ein *Isomorphismus*, wenn ρ bijektive Abbildungen der Mengen G_1, G_2 und M_1, M_2 induziert mit $\rho g \; I_2 \; \rho m \Rightarrow g \; I_1 \; m$. Sind die Kontexte $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ isomorph, so schreibt man $\mathcal{J}_1 \simeq \mathcal{J}_2$.

Definition 4 Ein Kontext $\mathfrak{I}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ ist *Teilkontext* von $\mathfrak{I}= (G, M, I)$, wenn

$$G_1 \subseteq G,\ M_1 \subseteq M \quad \text{und} \quad I_1 = I \cap (G_1 \times M_1).$$

Ein Kontext $\mathfrak{I}_2$ ist in $\mathfrak{I}$ *eingebettet*, wenn es einen Teilkontext von $\mathfrak{I}$ gibt, der zu $\mathfrak{I}_2$ isomorph ist.

Definition 5 Ein Kontext $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ ist *bereinigt*, wenn

$$\begin{array}{llll} g'' = h'' & \Rightarrow \quad g = h & \text{für} & g, h \in G, \\ m' = n' & \Rightarrow \quad m = n & \text{für} & m, n \in M. \end{array}$$

Konstruktion 1 Es sei $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ ein Kontext. Auf G definieren wir eine Äquivalenzrelation $g \sim h \Leftrightarrow g'' = h''$. Die Klassen von $\sim$ bezeichnen wir mit $\bar{g}, \bar{h}, \ldots$ und die Klassenmenge mit $\bar{G}$. Ähnlicherweise definieren wir $m \sim n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m' = n'$ für $m, n \in M$ und bezeichnen $\bar{m}, \bar{n}, \ldots \in \bar{M}$.
Sind $g, h \in G,\ m, n \in M$ mit $\bar{g} = \bar{h},\ \bar{m} = \bar{n}$ gegeben, dann

$$g\ I\ m \Longleftrightarrow g'' \subseteq m' \Longleftrightarrow h'' \subseteq n' \Longleftrightarrow h\ I\ n.$$

Damit können wir eine Relation $\bar{I} \subseteq \bar{G} \times \bar{M}$ durch die Vorschrift $\bar{g}\ \bar{I}\ \bar{m} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g\ I\ m$ definieren und folglich einen Kontext $\bar{\mathfrak{I}} = (\bar{G}, \bar{M}, \bar{I})$ erklären.

Bemerkung 5 Der Kontext $\bar{\mathfrak{I}}$ ist ein maximaler bereinigter Kontext, der in $\mathfrak{I}$ eingebettet ist. Es gilt $\bar{\mathfrak{I}} = \bar{\bar{\bar{\mathfrak{I}}}}$.

Theorem 1 *Sind $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ Kontexte, dann gilt*

$$\bar{\mathfrak{I}}_1 \simeq \bar{\mathfrak{I}}_2 \Longleftrightarrow (L_{\mathfrak{I}_1}, \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_1}, \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_1}) \simeq (L_{\mathfrak{I}_2}, \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_2}, \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_2}).$$

Beweis 1. a) Es seien $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ ein Kontext und $\bar{\mathfrak{I}}$ der zu $\mathfrak{I}$ nach Konstruktion 1 bestimmte bereinigte Kontext. Nach Satz 2 sind die Mengen $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{I}}} =$ $= \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}} \cup \{\bar{o}\},\ \mathcal{V}_{\bar{\mathfrak{I}}} = \mathcal{M}_{\bar{\mathfrak{I}}} \cup \{\bar{1}\}$ in $L_{\bar{\mathfrak{I}}}$ dicht. Definieren wir Abbildungen

$$\begin{array}{lll} \alpha : G \mapsto L_{\bar{\mathfrak{I}}} & \text{mit} \quad \alpha : g \mapsto \bar{g}'' & \forall g \in G, \\ \beta : M \mapsto L_{\bar{\mathfrak{I}}} & \text{mit} \quad \beta : m \mapsto \bar{m}' & \forall m \in M, \end{array}$$

dann $\alpha G = \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}}$, $\beta M = \mathcal{M}_{\bar{\mathfrak{I}}}$ und $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{I}}} = \alpha G \cup \{\bar{o}\}$, $\mathcal{V}_{\bar{\mathfrak{I}}} = \beta M \cup \{\bar{1}\}$. Offensichtlich gilt $g\ I\ m \Leftrightarrow \alpha g \leq \beta m$ und nach Satz 3 erhalten wir $(L_{\mathfrak{I}}, \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}, \mathcal{M}_{\mathfrak{I}}) \simeq (L_{\bar{\mathfrak{I}}}, \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}}, \mathcal{M}_{\bar{\mathfrak{I}}})$.

b) Es seinen $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ Kontexte mit $\bar{\mathfrak{I}}_1 \simeq \bar{\mathfrak{I}}_2$.

Dann gilt $(L_{\bar{\mathcal{I}}_1}, \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{I}}_1}, \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{I}}_1}) \simeq (L_{\bar{\mathcal{I}}_2}, \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{I}}_2}, \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{I}}_2})$.
Nach a) ist $(L_{\mathcal{I}_1}, \mathcal{G}_{\mathcal{I}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{I}_1}) \simeq (L_{\bar{\mathcal{I}}_1}, \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{I}}_1}, \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{I}}_1})$, $(L_{\mathcal{I}_2}, \mathcal{G}_{\mathcal{I}_2}, \mathcal{M}_{\mathcal{I}_2}) \simeq (L_{\bar{\mathcal{I}}_2}, \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{I}}_2}, \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{I}}_2})$ und folglich $(L_{\mathcal{I}_1}, \mathcal{G}_{\mathcal{I}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{I}_1}) \simeq (L_{\mathcal{I}_2}, \mathcal{G}_{\mathcal{I}_2}, \mathcal{M}_{\mathcal{I}_2})$.

2. Es sein $\mathcal{I}_i = (G_i, M_i, I_i)$, $\bar{\mathcal{I}}_i = (\bar{G}_i, \bar{M}_i, \bar{I}_i)$ für $i \in \{1, 2\}$. Die Abbildung ' werden wir in $\mathcal{I}_1$ rechts und in $\mathcal{I}_2$ links zeichnen. Nehmen wir $(L_{\mathcal{I}_1}, \mathcal{G}_{\mathcal{I}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{I}_1}) \simeq$ $\simeq (L_{\mathcal{I}_2}, \mathcal{G}_{\mathcal{I}_2}, \mathcal{M}_{\mathcal{I}_2})$ an. In diesem Falle gibt es einen Isomorphismus $\varphi : L_{\mathcal{I}_1} \mapsto L_{\mathcal{I}_2}$, der bijektive Abbildungen $\alpha : \mathcal{G}_{\mathcal{I}_1} \mapsto \mathcal{G}_{\mathcal{I}_2}$, $\beta : \mathcal{M}_{\mathcal{I}_1} \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{I}_2}$, induziert. Dann sind $\rho : \bar{g} \mapsto g'' \quad \forall \bar{g} \in \bar{G}_1$, $\sigma : {}''h \mapsto \bar{h} \quad \forall\, {}''h \in \mathcal{G}_{\mathcal{I}_2}$ bijektive Abbildungen der Mengen $\bar{G}_1$,$\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_{\mathcal{I}_2}, \bar{G}_2$ und $\xi = \sigma\alpha\,\rho$ ist eine bijektive Abbildung von $\bar{G}_1, \bar{G}_2$. Ähnlicherweise läßt sich eine bijektive Abbildung η von $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ bestimmen. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \bar{g}\ \bar{I}_1\ \bar{m} \Leftrightarrow g\ I_1\ m \Leftrightarrow g'' \subseteq m' \Leftrightarrow \alpha g'' \subseteq \beta m' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow {}''h \subseteq {}'n \Leftrightarrow h\ I_2\ n \Leftrightarrow \bar{h}\ \bar{I}_2\ \bar{n} \Leftrightarrow \xi\bar{g}\ \bar{I}_2\ \eta\bar{m}. \end{aligned}$$

Das Paar (ξ, η) bestimmt einen Isomorphismus der Kontexte $\bar{\mathcal{I}}_1, \bar{\mathcal{I}}_2$.

Definition 6 Ein Kontext $\mathcal{I} = (G, M, I)$ heißt *trivial*, wenn der zugehörige bereinigte Kontext $\bar{\mathcal{I}} = (\bar{G}, \bar{M}, \bar{I})$ durch $\bar{G} = \{\bar{g}\}$, $\bar{M} = \{\bar{m}\}$ und $\bar{g}\ \bar{I}\ \bar{m}$ definiert ist.

Bemerkung 6 Ein Kontext $\mathcal{I} = (G, M, I)$ ist trivial genau dann, wenn der Verband $L_{\mathcal{I}}$ einelementig ist.

Definition 7 Ein bereinigter Kontext $\mathcal{I} = (G, M, I)$ heißt *geöffnet*, wenn $g' \neq M \quad \forall g \in G$ und $m' \neq G \quad \forall m \in M$ gilt.

Konstruktion 2 Es sei $\mathcal{I} = (G, M, I)$ ein Kontext, der nichttrivial ist. Wir bestimmen einen bereinigten Kontext $\bar{\mathcal{I}} = (\bar{G}, \bar{M}, \bar{I})$ nach Konstruktion 1. Dann gibt es in $\bar{\mathcal{I}}$ höchstens ein Element $\bar{h} \in \bar{G}$ bzw. $\bar{n} \in \bar{M}$ mit $\bar{h}' = \bar{M}$ bzw. $\bar{n}' = \bar{G}$. Da $\bar{\mathcal{I}}$ nichttrivial ist, gilt $\bar{G} - \{\bar{h}\} \neq \emptyset$, $\bar{M} - \{\bar{n}\} \neq \emptyset$. Wir betrachten einen Kontext $\mathcal{R}(\mathcal{I}) = (G^1, M^1, I^1)$ mit $G^1 = \bar{G}$ bzw. $M^1 = \bar{M}$, wenn kein Element $\bar{h} \in \bar{G}$ bzw. $\bar{n} \in \bar{M}$ mit den beschriebenen Eigenschaften existiert und $G^1 = \bar{G} - \{\bar{h}\}$ bzw. $M^1 = \bar{M} - \{\bar{n}\}$ im umgekehrten Fall. Dabei gilt $I^1 = \bar{I} \cap (G^1 \times M^1)$.

Bemerkung 7 Der Kontext $\mathcal{R}(\mathcal{J})$ aus Konstruktion 2 ist ein maximaler geöffneter Kontext, der in $\mathcal{J}$ eingebettet ist. Es gilt

$$\mathcal{R}(\mathcal{J}) = \mathcal{R}(\bar{\mathcal{J}}) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{J})) = \mathcal{R}(\mathcal{J}).$$

Theorem 2 *Sind $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ nichttriviale Kontexte, dann*

$$\mathcal{R}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_2) \Longleftrightarrow (L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2}).$$

Beweis 1. Es seien $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ein bereinigter nichttrivialer Kontext und $\mathcal{R}(\mathcal{J}) = (G^1, M^1, I^1)$ der zu $\mathcal{J}$ gehörige geöffnete Kontext. Die Null- und Einheitselemente der Verbände $L_\mathcal{J}, L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$ bezeichnen wir mit $o_1, 1_1$ und $o_2, 1_2$. Es gilt $o_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, $1_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$. Im Kontext $\mathcal{J}$ bzw. $\mathcal{R}(\mathcal{J})$ bezeichnen wir wieder die Abbildung ' rechts bzw. links.

a) Wir nehmen an, daß es Elemente $h \in G$, $n \in M$ mit $h' = M$ und $n' = G$ gibt. Dann gilt $h'' = o_1$, $n' = 1_1$ und $\mathcal{U}_\mathcal{J} = \mathcal{G}_\mathcal{J}$, $\mathcal{V}_\mathcal{J} = \mathcal{M}_\mathcal{J}$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : G \mapsto L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})} \quad \text{mit} \quad \alpha : g \mapsto {}''g \quad \forall g \in G^1,\ h \mapsto o_2,$$

$$\beta : M \mapsto L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})} \quad \text{mit} \quad \beta : m \mapsto {}'m \quad \forall m \in M^1,\ n \mapsto 1_2.$$

Es gilt $\alpha G = \mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})} \cup \{o_2\} = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, $\quad \beta M = \mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})} \cup \{1_2\} = \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$.
Für $g \in G^1$, $m \in M^1$ ist

$$g\ I\ m \Leftrightarrow g\ I^1\ m \Leftrightarrow {}''g \subseteq {}'m \Leftrightarrow \alpha g \leq \beta m.$$

Ferner ist $h\ I\ m \quad \forall m \in M$ und zugleich $\alpha h = o_2 \leq x \quad \forall x \in L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, also $\alpha h \leq \beta m \quad \forall m \in M$. Gleichermaßen gilt $g\ I\ n \quad \forall g \in G$ und $\alpha g \leq \beta n \quad \forall g \in G$. Nach Satz 3 gibt es einen Isomorphismus $\varphi : L_\mathcal{J} \mapsto L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, der bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{G}_\mathcal{J}, \alpha G$ und $\mathcal{M}_\mathcal{J}, \beta M$ induziert. Wegen $\mathcal{G}_\mathcal{J} = \mathcal{U}_\mathcal{J}$, $\mathcal{M}_\mathcal{J} = \mathcal{V}_\mathcal{J}$ und $\alpha G = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, $\beta M = \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$ induziert φ auch bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{U}_\mathcal{J}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$ und $\mathcal{V}_\mathcal{J}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$.

b) Wir nehmen an, daß es ein Element $h \in G$ mit $h' = M$ gibt und zugleich $m' \neq G \quad \forall m \in M$ gilt. Dann ergibt sich $M^1 = M$ und $h'' = o_1 \in \mathcal{G}_\mathcal{J}$, $1_1 \notin \mathcal{M}_\mathcal{J}$, also $\mathcal{U}_\mathcal{J} = \mathcal{G}_\mathcal{J}$ und $\mathcal{V}_\mathcal{J} = \mathcal{M}_\mathcal{J} \cup \{1_1\}$. Wir betrachten Abbildungen

$$\alpha : g \mapsto {}''g \quad \forall g \in G^1, \quad h \mapsto o_2 \quad \text{und} \quad \beta : m \mapsto {}'m \quad \forall m \in M.$$

Es gilt $\alpha G = \mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})} \cup \{o_2\} = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$ und $\beta M = \mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, also $\mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})} = \beta M \cup \{1_2\}$. Wieder gibt es einen Isomorphismus $\varphi : L_{(\mathcal{J})} \mapsto L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, der bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{G}_\mathcal{J}, \alpha G$ und $\mathcal{M}_\mathcal{J}, \beta M$ induziert. Wegen $\mathcal{U}_\mathcal{J} = \mathcal{G}_\mathcal{J}$ und $\alpha G = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$ induziert φ auch eine bijektive Abbildung der Mengen $\mathcal{U}_\mathcal{J}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$.
Wegen $\varphi 1_1 = 1_2$ und $1_1 \notin \mathcal{M}_\mathcal{J}$, $1_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$ induziert φ eine bijektive Abbildung der Mengen $\mathcal{V}_\mathcal{J} = \mathcal{M}_\mathcal{J} \cup \{1_1\}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})} = \beta M \cup \{1_2\}$.

c) Gibt es $n \in M$ mit $n' = G$ und zugleich $g' \notin M \quad \forall g \in G$, dann verfahren wir analog zu b).

d) Es sei $g' \neq M \quad \forall g \in G$ und $m' \neq G \quad \forall m \in M$, also $\mathcal{J} = \mathcal{R}(\mathcal{J})$. Dann $\mathcal{U}_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{J}} = \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}$.

2. Es sei $\mathcal{J}$ ein nichttrivialer Kontext. Nach Theorem 1 gilt $(L_{\mathcal{J}}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}}) \simeq$ $\simeq (L_{\bar{\mathcal{J}}}, \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{J}}}, \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{J}}})$ und nach Bemerkung 4 folgt daraus $(L_{\mathcal{J}}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}}) \simeq (L_{\bar{\mathcal{J}}}, \mathcal{U}_{\bar{\mathcal{J}}}, \mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}})$. Nach 1 ist $(L_{\bar{\mathcal{J}}}, \mathcal{U}_{\bar{\mathcal{J}}}, \mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}}) \simeq (L_{\mathcal{R}(\bar{\mathcal{J}})}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\bar{\mathcal{J}})}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\bar{\mathcal{J}})}) \simeq (L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})})$.

3. Es seien $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ nichttriviale Kontexte mit $\mathcal{R}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_2)$. Offensichtlich ist $(L_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}) \simeq (L_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)})$. Nach 2 gilt $(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)})$, $(L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2}) \simeq (L_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)})$, also $(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}) \simeq L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2})$.

4. Es seien $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$, $\mathcal{J}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ nichttriviale Kontexte und nehmen wir an, daß $(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2})$ gilt. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi : L_{\mathcal{J}_1} \mapsto L_{\mathcal{J}_2}$, der bijektive Abbildungen $\alpha : \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1} \mapsto \mathcal{U}_{\mathcal{J}_2}$, $\beta : \mathcal{V}_{\mathcal{J}_1} \mapsto \mathcal{V}_{\mathcal{J}_2}$ induziert. Dabei gilt $\alpha o_1 = o_2$, $\beta 1_1 = 1_2$. Die Abbildungen α, β induzieren weiter bijektive Abbildungen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ der Mengen $\mathcal{U}_{\bar{\mathcal{J}}_1}$, $\mathcal{U}_{\bar{\mathcal{J}}_2}$ und $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}_1}$, $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}_2}$ durch die Vorschrifte $\bar{\alpha} g'' = \overline{\alpha g''} \quad \forall g \in G_1$ mit $\bar{\alpha}(\bar{o}_1) = \bar{o}_2$ im Falle $\bar{o}_1 \notin \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{J}}_1}$ und $\bar{\beta} m' = \overline{\beta m'} \quad \forall m \in M_1$ mit $\bar{\beta}(\bar{1}_1) = \bar{1}_2$ im Falle $\bar{1}_1 \notin \mathcal{M}_{\bar{\mathcal{J}}_1}$.

In den Kontexten $\mathcal{R}(\mathcal{J}_1), \mathcal{R}(\mathcal{J}_2)$ gilt $\bar{o}_1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}$, $\bar{1}_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}$, $\bar{o}_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}$, $\bar{1}_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}$. Wegen $\mathcal{U}_{\bar{\mathcal{J}}_1} = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}$, $\mathcal{U}_{\bar{\mathcal{J}}_2} = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}$, $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}_1} = \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}$, $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}_2} = \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}$, induzieren $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}$. Ähnlich wie im Teil 2 des Beweises von Theorem 1 beweisen wir $\mathcal{R}(\mathcal{J}_1) \simeq$ $\simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_2)$.

Definition 8 Ein Kontext $\mathcal{J}$ ist *$\mathcal{R}$-trivial,* wenn für $\mathcal{R}(\mathcal{J}) = (G^1, M^1, I^1)$ gilt $G^1 = \{g\}$, $M^1 = \{m\}$, $I^1 = \emptyset$. Ein Kontext $\mathcal{J}$ ist *$\mathcal{P}$-trivial,* wenn er entweder trivial oder $\mathcal{R}$-trivial ist.

Bemerkung 8 Ein Kontext $\mathcal{J}$ ist $\mathcal{R}$-trivial genau dann, wenn der Verband $L_{\mathcal{J}}$ zweielementig ist. Ein Kontext $\mathcal{J}$ ist nicht $\mathcal{P}$-trivial genau dann, wenn $L_{\mathcal{J}}$ mindestens drei Elemente enthält.

Definition 9 Ein geöffneter Kontext $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ist *perfekt,* wenn gilt

1. $\exists h \in G,\ h' = \emptyset \implies \exists m \in M,\ m' = G - \{h\}$,

2. $\exists n \in M,\ m' = \emptyset \implies \exists g \in G,\ g' = M - \{n\}$.

Konstruktion 3 Es sei $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ein geöffneter Kontext, der nicht $\mathcal{R}$-trivial ist. Da $\mathcal{J}$ bereinigt ist, gibt es höchstens ein Element $h \in G$ bzw. $n \in M$ mit $h' = \emptyset$ bzw. $n' = \emptyset$. Gibt es ein solches Element, dann setzen wir

$$G^2 = G - \{h\} \quad \text{und} \quad M^2 = M - \{n\}.$$

Wir betrachten folgende Möglichkeiten:

(1) Es gibt $h \in G,\ h' = \emptyset$ und zugleich gibt es $m \in M,\ m' = G^2$.

(2) Es gibt $h \in G,\ h' = \emptyset$ und es gilt $m' \neq G^2 \quad \forall m \in M$.

(3) Es gibt $n \in M,\ n' = \emptyset$ und zugleich gibt es $g \in G,\ g' = M^2$.

(4) Es gibt $n \in M,\ n' = \emptyset$ und es gilt $g' \neq M^2 \quad \forall g \in G$.

(5) $g' \neq \emptyset \quad \forall g \in G$.

(6) $m' \neq \emptyset \quad \forall m \in M$.

Wir definieren einen Kontext $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ folgenderweise:

a) Gilt (1), (3) bzw. (1), (6) bzw. (3), (5) bzw (5), (6), dann $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

b) Gilt (2), (3) bzw. (2), (6), dann $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = (G^2, M, I^2)$.

c) Gilt (1), (4) bzw. (4), (5), dann $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = (G, M^2, I^2)$.

d) Gilt (2), (4), dann $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = (G^2, M^2, I^2)$.

Die Relation I^2 ist stets durch I induziert.

Bemerkung 9 Es sei $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ein Kontext, der nicht $\mathcal{P}$-trivial ist. Zu $\mathcal{J}$ ordnen wir nach Konstruktionen 1–3 die Kontexte $\bar{\mathcal{J}}$, $\mathcal{R}(\mathcal{J})$, $\mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}))$ und setzen $\mathcal{P}(\mathcal{J})=\mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}))$. Dann ist $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ ein maximaler perfekter Kontext, der in $\mathcal{J}$ eingebettet ist. Dabei gilt $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = \mathcal{P}(\bar{\mathcal{J}})$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{J})) = \mathcal{P}(\mathcal{J})$.

Theorem 3 *Sind $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ Kontexte, die nicht $\mathcal{P}$-trivial sind, dann*

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_2) \Longleftrightarrow (L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2}).$$

Beweis 1. Es sei $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ein geöffneter Kontext und $L_{\mathcal{J}}$ der zugehörige Verband mit den bedeutsamen Elementen $o, 1$. Dann ist $o \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}},\ 1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$. Zuerst wollen wir $(L_{\mathcal{J}}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}}) \simeq (L_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}, \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})})$ beweisen. Die Abbildung ' unterscheiden wir in verschiedenen Kontexten damit, daß wir sie wie rechts sowie links zeichnen.

a) Wir nehmen an, daß $\mathcal{J}$ die Forderung (2) aber nicht (4) erfüllt. Dann gilt in $\mathcal{J}$ entweder (3) oder (6) und folglich $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = (G^2, M, I^2)$. Gilt (3),dann $n' = \emptyset = o$ und $o \in \mathcal{M}_\mathcal{J}$. Im Falle (6) ist $o \notin \mathcal{M}_\mathcal{J}$. Daher erhalten wir $\mathcal{U}_\mathcal{J} = \mathcal{G}_\mathcal{J} \cup \{o\} = \mathcal{U}'_\mathcal{J}$ und $\mathcal{V}_\mathcal{J} = \mathcal{M}_\mathcal{J} \cup \{1\}$. Gilt (3) bzw. (6), so $\mathcal{V}'_\mathcal{J} = \mathcal{V}_\mathcal{J}$ bzw. $\mathcal{V}'_\mathcal{J} = \mathcal{V}_\mathcal{J} \cup \{o\}$.

Im Kontext $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ gilt offensichtlich $o_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$, $1_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$. Aus (2) folgt dabei $1_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$. Wir erhalten $\mathcal{U}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} = \mathcal{G}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} \cup \{o_2\}$ und $\mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} = \mathcal{U}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} \cup \ \{1_2\}$. Analog zu $\mathcal{J}$ gilt $\mathcal{V}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} = \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} \cup \{1_2\}$ und für (3) bzw. (6) dann $\mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} = \mathcal{V}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ bzw. $\mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} = \mathcal{V}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} \cup \ \{o_2\}$. Erklären wir eine Abbildung $\alpha : G \mapsto L_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ mit $\alpha : g \mapsto \ ''g \quad \forall g \in G^2,\ h \mapsto 1_2$, dann ist $x = \mathcal{G}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} \cup \{1_2\} = \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$. Für $\beta : m \mapsto \ 'm \quad \forall m \in M$ ist $\beta M = \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ und $\mathcal{V}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} = \beta M \cup \{1_2\}$. Die Mengen $\alpha G \cup \{o_2\}$, $\beta M \cup \{1_2\}$ sind in $L_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ dicht.

Sind $g \in G^2,\ m \in M$, dann

$$g \ I \ m \ \Leftrightarrow g \ I^2 \ m \Leftrightarrow \ ''g \subseteq \ 'm \Leftrightarrow \alpha g \leq \beta m.$$

Es gilt $h \not I \ m \quad \forall m \in M$. Nehmen wir dabei $\alpha h \leq \beta m$ an, dann $1_2 \leq \beta m$, also $\beta m = 1_2$, was ein Widerspruch zu $1_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ ist. Nach Satz 3 gibt es also einen Isomorphismus $\varphi : L_\mathcal{J} \mapsto L_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ mit $\varphi \mathcal{G}_\mathcal{J} = \alpha G$, $\varphi \mathcal{M}_\mathcal{J} = \beta M$, woher folgt

$$\varphi \mathcal{U}'_\mathcal{J} = \varphi \mathcal{U}_\mathcal{J} = \varphi(\mathcal{G}_\mathcal{J} \cup \{o\}) = \varphi \mathcal{G}_\mathcal{J} \cup \{o_2\} = \alpha G \cup \{o_2\} = \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}.$$

(Die Gleichheit $\varphi \mathcal{U}_\mathcal{J} = \mathcal{U}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ ist aber nicht erfüllt, weil $1 \in \mathcal{U}_\mathcal{J}$ und $\varphi 1 = 1_2 \notin$ $\notin \mathcal{U}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$ gilt.) Zugleich ist

$$\varphi \mathcal{V}'_\mathcal{J} = \varphi(\mathcal{M}_\mathcal{J} \cup \{1\}) = \beta M \cup \ \{1_2\} = \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} \cup \{1_2\} = \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$$

im Falle (3) und

$$\varphi \mathcal{V}'_\mathcal{J} = \varphi(\mathcal{M}_\mathcal{J} \cup \{1\} \cup \{o\}) = \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{J})} \cup \{1_2\} \cup \{o_2\}) = \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$$

im Falle (6). Damit erhalten wir $(L_\mathcal{J}, \mathcal{U}'_\mathcal{J}, \mathcal{V}'_\mathcal{J}) \simeq (L_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}, \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})})$.

b) Gilt in $\mathcal{J}$ die Forderung (4), aber nicht (2), dann ist $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = (G, M^2, I^2)$ und es läßt sich mit Benutzung von α, β ähnlicherweise wie in a) verfahren.

c) In $\mathcal{J}$ gilt (2), (4), also $\mathcal{P}(\mathcal{J}) = (G^2, M^2, I^2)$.
Durch die Abbildung α bzw. β, die nach a) bzw. b) definiert ist, bestimmen wir einen Isomorphismus $\varphi : L_\mathcal{J} \mapsto L_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}$, der die verlangten Eigenschaften hat.

2. Es sei $\mathcal{J}$ ein Kontext, der nicht $\mathcal{P}$-trivial ist.
Dann gibt es Kontexte $\mathcal{R}(\mathcal{J})$, $\mathcal{P}(\mathcal{J})$. Wegen $\mathcal{R}(\mathcal{J})=\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{J}))$ gilt nach Theorem 2 $(L_\mathcal{J}, \mathcal{U}_\mathcal{J}, \mathcal{V}_\mathcal{J}) \simeq (L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{U}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{V}_{\mathcal{R}(\mathcal{J})})$. Nach Bemerkung 4 ist dann $(L_\mathcal{J}, \mathcal{U}'_\mathcal{J}, \mathcal{V}'_\mathcal{J}) \simeq$ $\simeq (L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{U}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{V}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J})})$. Aus dem ersten Teil unseres Beweises ergibt sich

$$(L_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{U}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}, \mathcal{V}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J})}) \simeq (L_{\mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}))}, \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}))}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}))}).$$

Wegen $\mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}))=\mathcal{P}(\mathcal{J})$ gilt dann $(L_\mathcal{J}, \mathcal{U}'_\mathcal{J}, \mathcal{V}'_\mathcal{J}) \simeq (L_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}, \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J})})$.

Es seien $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ Kontexte, die nicht $\mathcal{P}$-trivial sind mit $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_2)$. Offensichtlich ist $(L_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)}) \simeq (L_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)})$ und nach Vorangehendem gilt $(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)}) \simeq (L_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{V}_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)})$, $(L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2}) \simeq$ $\simeq (L_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)} \mathcal{U}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{V}'_{\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)})$. Daraus erhält man endlich

$$(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1}) \simeq L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2}).$$

3) Es seien $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$, $\mathcal{J}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ geöffnete Kontexte, die nicht $\mathcal{R}$-trivial sind und nehmen wir $(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2})$ an. Sind $o_1, 1_1 \in L_{\mathcal{J}_1}$ und $o_2, 1_2 \in L_{\mathcal{J}_2}$ bedeutsame Elemente von $L_{\mathcal{J}_1}, L_{\mathcal{J}_2}$, dann $o_1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}$, $1_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}$, $o_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}$, $1_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2}$. Dabei gilt

$$\exists h_1 \in G_1,\ h'_1 = \emptyset \Leftrightarrow 1_1 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \qquad \exists n_1 \in M_1,\ n'_1 = \emptyset \Leftrightarrow o_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}$$

und ähnlicherweise für $\mathcal{J}_2$. Wir bezeichnen $G_1^2 = G_1$ bzw. $G_1^2 = G_1 - \{h_1\}$, wenn es kein Element bzw. genau ein Element $h_1 \in G_1$ mit $h'_1 = \emptyset$ gibt. Die Mengen M_1^2, G_2^2, M_2^2 und Kontexte $\mathcal{J}_1^2 = (G_1^2, M_1^2, I_1^2)$, $\mathcal{J}_2^2 = (G_2^2, M_2^2, I_2^2)$ definieren wir in analoger Weise. Es gilt

$$\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1^2} = \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1} - \{o_1, 1_1\}, \qquad \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2^2} = \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2} - \{o_2, 1_2\},$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}_1^2} = \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1} - \{o_1, 1_1\}, \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2^2} = \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2} - \{o_2, 1_2\}.$$

Unserer Voraussetzung nach gibt es einen Isomorphismus $\varphi : L_{\mathcal{J}_1} \mapsto L_{\mathcal{J}_2}$, der bijektive Abbildungen $\alpha : \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1} \mapsto \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}$, $\beta : \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1} \mapsto \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2}$ induziert. Wegen $\varphi o_1 = o_2$, $\varphi 1_1 = 1_2$ induziert φ auch bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1^2}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_2^2}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_1^2}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_2^2}$. Die Abbildung $\xi : g \mapsto g'' \mapsto \alpha g'' = {}''k \mapsto k \quad \forall g \in G_1^2$ von G_1^2 auf G_2^2 ist bijektiv. Analog läßt sich die bijektive Abbildung $\eta : m \mapsto m' \mapsto$ $\mapsto \beta m' = {}'g \mapsto g$ von M_1^2 auf M_2^2 definieren. Dabei gilt für $g \in G_1^2$, $m \in M_1^2$:

$$g\ I_1^2\ m \Leftrightarrow g\ I_1\ m \Leftrightarrow g'' \subseteq m' \Leftrightarrow \alpha g'' \subseteq \beta m' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}''k \subseteq {}'q \Leftrightarrow k\ I_2\ q \Leftrightarrow k\ I_2^2\ q \Leftrightarrow \xi q\ I_2^2\ \eta m.$$

Bestimmen wir eine Abbildung $\gamma : G_1^2 \cup M_1^2 \mapsto G_2^2 \cup M_2^2$ durch die Vorschriften $\gamma g = \xi g \quad \forall g \in G_1^2$, $\gamma m = \eta m \quad \forall m \in M_1^2$, dann ist γ ein Isomorphismus von $\mathcal{J}_1^2$, $\mathcal{J}_2^2$, also $\mathcal{J}_1^2 \simeq \mathcal{J}_2^2$.

a) Wir nehmen $1_1 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, o_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, 1_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, o_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2}$ an. Dann gibt es Elemente $h_1 \in G_1$, $h_2 \in G_2$, $n_1 \in M_1$, $n_2 \in M_2$ mit $h'_1 = {}'h_2 = n'_1 = {}'n_2 = \emptyset$. Der Isomorphismus $\gamma : \mathcal{J}_1^2 \mapsto \mathcal{J}_2^2$, läßt sich in einen Isomorphismus von $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ durch $h_1 \mapsto h_2$, $n_1 \mapsto n_2$ erweitern. Gilt daher in $\mathcal{J}_1$ manche aus den Eigenschaften (1)–(4), dann gilt diese Eigenschaften auch in $\mathcal{J}_2$. Erfüllen $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ die Eigenschaften (1), (3), dann

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{P}(\mathcal{J}_1), \quad \mathcal{J}_2 = \mathcal{P}(\mathcal{J}_2) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_2).$$

Gelten in $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ die Eigenschaften (2), (3), dann

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) = (G_1^2, M_1, I_1^2), \qquad \mathcal{P}(\mathcal{J}_2) = (G_2^2, M_2, I_2^2).$$

Der Isomorphismus γ läßt sich in einen Isomorphismus von $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1)$, $\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)$ durch $h_1 \mapsto h_2$ erweitern. Analog verfahren wir im Falle (1), (4). Gilt (2), (4), dann $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}_1^2$, $\mathcal{P}(\mathcal{J}_2) = \mathcal{J}_2^2$, und folglich $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_2)$.

b) Nehmen wir $1_1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, o_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, 1_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, o_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2}$ an. Es gibt Elemente $h_2 \in G_2$, $n_1 \in M_1$, $n_2 \in M_2$ mit $'h_2 = n_1' = 'n_2 = \emptyset$ und $\mathcal{J}_1$ erfüllt (5). In $\mathcal{J}_2$ gilt entweder (1) oder (2). Zuerst nehmen wir an, daß (1) gilt. Dann gibt es $m \in M_2$ mit $'m = G_2^2$. Wegen $m \in M_2^2$ gibt es $q \in M_1^2$ mit $q' = G_1^2 = G_1$, weil $\mathcal{J}_1^2$, $\mathcal{J}_2^2$ isomorph sind. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß $\mathcal{J}_1$ geöffnet ist. In $\mathcal{J}_2$ gilt daher (2). Da $\mathcal{J}_1$ die Eigenschaft (5) hat, können hier nur (3) oder (4) gelten. Zuerst nehmen wir an, daß (3) gilt. Dann $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}_1$ und es gibt $g \in G_1$ mit $g' = M_1^2$. Aus $g \in G_1^2$ erhalten wir mittels des Isomorphismus γ, daß in G_2^2 ein Element k mit $'k = M_2^2$ existiert. In $\mathcal{J}_2$ gilt dann auch (3), woraus $\mathcal{P}(\mathcal{J}_2) = (G_2^2, M_2, I_2^2)$ folgt. Der Isomorphismus γ läßt sich durch $n_1 \mapsto n_2$ in einen Isomorphismus von $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{P}(\mathcal{J}_2)$ erweitern, was $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_2)$ bedeutet.

Gilt in $\mathcal{J}_1$ die Eigenschaft (4), dann gilt (4) auch in $\mathcal{J}_2$ und daraus folgt

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) = (G_1, M_1^2, I_2^2), \qquad \mathcal{P}(\mathcal{J}_2) = (G_2^2, M_2^2, I_2^2).$$

Wegen $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}_1^2$, $\mathcal{P}(\mathcal{J}_2) = \mathcal{J}_2^2$ erhalten wir $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_2)$.

Ähnlicherweise wie in a), b) prüfen wir noch folgende Fälle nach:

c) $1_1 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \quad o_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, \quad 1_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \quad o_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2},$

d) $1_1 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \quad o_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, \quad 1_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \quad o_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2},$

e) $1_1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \quad o_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, \quad 1_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \quad o_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2},$

f) $1_1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \quad o_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, \quad 1_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \quad o_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2},$

g) $1_1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \quad o_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, \quad 1_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \quad o_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2},$

h) $1_1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \quad o_1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}, \quad 1_2 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}, \quad o_2 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2}.$

4) Es sei $(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_1}) \simeq L_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{U}'_{\mathcal{J}_2}, \mathcal{V}'_{\mathcal{J}_2})$, wo $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ nicht $\mathcal{P}$-triviale Kontexte sind. Es läßt sich leicht $(L_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{U}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}, \mathcal{V}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)}) \simeq (L_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{U}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)}, \mathcal{V}'_{\mathcal{R}(\mathcal{J}_2)})$ zeigen. Nach Teil 3 erhalten wir dann $\mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}_1)) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{R}(\mathcal{J}_2))$ und $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_2)$. Damit ist der Beweis des Theorems 3 beendet.

Es sei L ein vollständiger Verband mit bedeutsamen Elementen $o, 1$. Ferner sei $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{V}$ eine supremal bzw. infimal dichte Teilmenge von L.

a) Wir betrachten einen Kontext $\mathcal{J}_L = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, I)$, wo

$$g\ I\ m \iff g \leq m \quad \text{für} \quad g \in \mathcal{U},\ m \in \mathcal{V}.$$

Zu $\mathcal{J}_L$ ordnen wir den Verband $L_{\mathcal{J}_L}$. Wir definieren die Einbettung α bzw. β der Menge $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{V}$ in L durch die Vorschrifte $\alpha g = g$, $\beta m = m$. Nach Satz 3 gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi : L_{\mathcal{J}_L} \mapsto L \quad \text{mit} \quad \varphi g'' = \alpha g = g \quad \forall g \in \mathcal{U}, \quad \varphi m' = \beta m = m \quad \forall m \in \mathcal{V}.$$

Dieser Isomorphismus induziert bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_2}$, $\alpha\mathcal{U} = \mathcal{U}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_L}$, $\beta\mathcal{V} = \mathcal{V}$. Daraus folgt, daß $\mathcal{J}_L$ ein bereinigter Kontext ist. Wegen $o_L \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}_L}$, $1_L \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_L}$ gilt $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_L} = \mathcal{U}_{\mathcal{J}_L}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_L} = \mathcal{V}_{\mathcal{J}_L}$.

b) Wir nehmen an, daß L mindestens zwei Elemente enthält und betrachten einen Kontext $\mathcal{J}_L^1 = (\mathcal{U} - \{o\}, \mathcal{V} - \{1\}, I^1)$, wo I^1 die zugehörige Restriktion von I ist. Es gibt einen Isomorphismus $\varphi^1 : L_{\mathcal{J}_L^1} \mapsto L$, der bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_L^1}$, $\mathcal{U} - \{o\}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_L^1}$, $\mathcal{V} - \{1\}$ induziert. Die Mengen $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_L^1}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_L^1}$ sind in $L_{\mathcal{J}_L^1}$ nicht dicht.

c) Wir definieren einen Kontext $\mathcal{J}_L^2 = (\mathcal{U}', \mathcal{V}', I^2)$, wo I^2 durch $\leq$ erklärt ist. Auch in diesem Falle gibt es einen Isomorphismus $\varphi^2 : L_{\mathcal{J}_L^2} \mapsto L$, der bijektive Abbildungen von $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_L^2}$, $\mathcal{U}'$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_L^2}$, $\mathcal{V}'$ induziert.

Es sei $\mathcal{J} = (G, M, I)$ ein Kontext. Nach Vorangehendem bestimmen wir einen Kontext $\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}} = (\mathcal{U}_\mathcal{J}, \mathcal{V}_\mathcal{J}, L_\mathcal{J})$ und den Verband $L_{\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}}}$. Es gibt einen Isomorphismus der Verbände $L_{\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}}}$, $L_\mathcal{J}$, der bijektive Abbildungen der Mengen $\mathcal{U}_\mathcal{J}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}}}$ und $\mathcal{V}_\mathcal{J}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}}}$ induziert. Es gilt $(L_\mathcal{J}, \mathcal{U}_\mathcal{J}, \mathcal{V}_\mathcal{J}) \simeq (L_{\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}}}, \mathcal{U}_{\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}}}, \mathcal{V}_{\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}}})$. Ist $\mathcal{J}$ nicht trivial, dann gilt nach Theorem 2 $\mathcal{R}(\mathcal{J}) \simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_{L_\mathcal{J}})$.

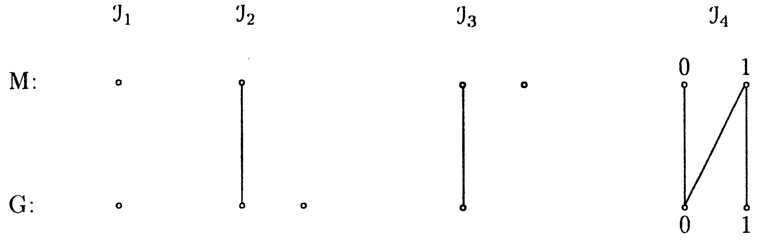
Prüfen wir in dieser Weise auch die übrigen Fälle, erhalten wir folgende Möglichkeiten: Es sei $\mathcal{J}$ ein Kontext.

1. Es sei $\mathcal{J}_L^1 = (\mathcal{G}_\mathcal{J}, \mathcal{M}_\mathcal{J}, I^1)$. Dann $\bar{\mathcal{J}} \simeq \bar{\mathcal{J}}_L^1$, wo $\bar{\mathcal{J}}$, $\bar{\mathcal{J}}_L^1$ bereinigte Kontexte nach Konstruktion 1 sind. Wegen $\bar{\mathcal{J}}_L^1 = \mathcal{J}_L^1$ erhalten wir $\bar{\mathcal{J}} \simeq \mathcal{J}_L^1$.

2. Nehmen wir an, daß $\mathcal{J}$ nichttrivial ist. Gilt $\mathcal{J}_L = (\mathcal{U}_\mathcal{J}, \mathcal{V}_\mathcal{J}, I)$, dann $\mathcal{R}(\mathcal{J}) \simeq$ $\simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_L)$.

3. Nehmen wir an, daß $\mathcal{J}$ nicht $\mathcal{P}$-trivial ist. Gilt $\mathcal{J}_L^2 = (\mathcal{U}_\mathcal{J}', \mathcal{V}_\mathcal{J}', I^2)$, dann $\mathcal{P}(\mathcal{J}) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{J}_L^2)$.

Bemerkung 10 In manchen Artikeln, die den Kontexten gewidmet sind, findet man einige Ungenauigkeiten vor. Z. B. im Artikel: M. Erne: Distributive Laws for Concept Lattices [1]:
1. Die Mengen J_o, M_o (S.4) sollen nicht dicht sein.
2. Auf der Seite 4 wird ein L-Kontext $\mathbb{L} = (J, M, \leq)$ definiert, wo J bzw. M supremal bzw. infimal dichte Menge in vollständigem Verband L ist. Auf der Seite 5 wird eine Behauptung eingeführt: "Ein Kontext ist bereinigt, wenn er zu einem L-Kontext isomorph ist". Diese Behauptung ist aber nicht richtig. Dazu zeigen wir ein Beispiel: Es seinen $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ Kontexte, die auf Abb. a), b), c) dargestellt sind.



a) b) c) d)

Der Verband $L_{\mathcal{J}_1}$ bzw. $L_{\mathcal{J}_2}$ bzw. $L_{\mathcal{J}_3}$ ist zweielementig mit den Elementen $o, 1$. Dieser Verband enthält genau eine supremal dichte Teilmenge $\mathcal{U} = \{o, 1\}$ und genau eine infimal dichte Teilmenge $\mathcal{V} = \{o, 1\}$. Der zugehörige L-Kontext ist dann $\mathcal{J}_4 = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \leq)$ und er ist auf Abb. d) dargestellt. Die Kontexte $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ sind bereinigt und sie sind nicht zu $\mathcal{J}_4$ isomorph, d.h. sie sind zu keinem L-Kontext isomorph. Nach Theorem 2 aber gilt

$$\mathcal{R}(\mathcal{J}_1) \simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_2) \simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_3) \simeq \mathcal{R}(\mathcal{J}_4) \simeq \mathcal{J}_1.$$

Bezeichnungen Ist $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ ein Teilkontext eines Kontextes $\mathcal{J} = (G, M, I)$, dann setzen wir

$$\mathcal{G}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} = \{g'' \in L_{\mathcal{J}} \mid g \in G_1\}, \qquad \mathcal{M}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} = \{m' \in L_{\mathcal{J}} \mid m \in M_1\},$$

$$\mathcal{U}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} = \mathcal{G}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} \cup \{o\}, \qquad \mathcal{V}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} = \mathcal{M}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} \cup \{1\},$$

wo $o, 1$ bedeutsame Elemente von $L_{\mathcal{J}}$ sind.

Definition 10 Ein Teilkontext $\mathcal{J}_1$ von $\mathcal{J}$ heißt in $\mathcal{J}$ *zulässig*, wenn die Mengen $\mathcal{U}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1}$, $\mathcal{V}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1}$ dicht in $L_{\mathcal{J}}$ sind. Ein Kontext $\mathcal{J}_2$ ist in $\mathcal{J}$ *zulässig eingebettet*, wenn es einen zulässigen Teilkontext $\mathcal{J}_1$ von $\mathcal{J}$ gibt, der zu $\mathcal{J}_2$ isomorph ist.

Satz 4 *Es sei $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ ein Teilkontext eines Kontextes $\mathcal{J} = (G, M, I)$. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

1. Es gibt einen Isomorphismus -

$$\varphi : L_{\mathcal{J}_1} \mapsto L_{\mathcal{J}} \qquad \text{mit} \quad \varphi\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1} = \mathcal{G}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1}, \quad \varphi\mathcal{M}_{\mathcal{J}_1} = \mathcal{M}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1}.$$

2. Der Teilkontext $\mathcal{J}_1$ ist in $\mathcal{J}$ zulässig.

Beweis $1 \Rightarrow 2$. Nach Satz 2 sind $\mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{J}_1}$ in $L_{\mathcal{J}_1}$ dicht. Da φ ein Isomorphismus ist, sind auch

$$\varphi\mathcal{U}_{\mathcal{J}_1} = \varphi(\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1} \cup \{o\}) = \varphi\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1} \cup \{o_1\} = \mathcal{G}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} \cup \{o_1\} = \mathcal{U}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1},$$

$$\varphi\mathcal{V}_{\mathcal{J}_1} = \varphi(\mathcal{M}_{\mathcal{J}_1} \cup \{1\}) = \varphi\mathcal{M}_{\mathcal{J}_1} \cup \{1_1\} = \mathcal{M}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1} \cup \{1_1\} = \mathcal{M}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}^1}$$

in $L_{\mathfrak{I}}$ dicht und $\mathfrak{I}_1$ ist in $\mathfrak{I}$ zulässig.

$2 \Rightarrow 1$. Ist $\mathfrak{I}_1$ in $\mathfrak{I}$ zulässig, dann sind die Mengen $\mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}1}$, $\mathfrak{V}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}1}$ in $L_{\mathfrak{I}}$ dicht. Betrachten wir die Abbildungen $\alpha : g \mapsto g'' \quad \forall g \in G_1$, $\beta : m \mapsto m' \quad \forall m \in M_1$, so gilt $\alpha G_1 \cup \{o\} = \mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}1}$, $\beta M_1 \cup \{1\} = \mathfrak{V}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}1}$. Wegen

$$g\ I_1\ m \Leftrightarrow g\ I\ m \Leftrightarrow g'' \subseteq m' \Leftrightarrow \alpha g \leq \beta m$$

für $g \in G_1, m \in M_1$ gibt es dann nach Satz 3 einen Isomorphismus $\varphi : L_{\mathfrak{I}_1} \mapsto L_{\mathfrak{I}_1}$ mit $\varphi \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_1} = \mathcal{G}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}1}$, $\varphi \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_1} = \mathcal{M}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}1}$.

Bemerkung 11 Ist φ der im Satz 4 beschriebene Isomorphismus, dann gilt nach Satz 3

$$\varphi\, ''g = g'' \quad \forall g \in G_1, \qquad \varphi\, 'm = m' \quad \forall m \in M_1.$$

Satz 5 *Jeder zulässige Teilkontext eines bereinigten Kontextes ist bereinigt.*

Beweis Es sei $\mathfrak{I}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ ein zulässiger Teilkontext eines bereinigten Kontextes $\mathfrak{I}$. Sind $g, h \in G_1$ mit $''g = ''h$ gegeben, dann gilt nach Satz 4 $g'' = h''$ und daraus folgt $g = h$. Ganz ähnlich $'m = 'n$, $m, n \in M_1$ impliziert $m = n$.

Bemerkung 12 Es seien $\mathfrak{I}$ ein Kontext und $\bar{\mathfrak{I}}$, $\mathcal{R}(\mathfrak{I})$, $\mathcal{P}(\mathfrak{I})$ Kontexte, die zu $\mathfrak{I}$ nach Konstruktionen 1,2,3 bestimmt sind. Der Kontext $\bar{\mathfrak{I}}$ ist in $\mathfrak{I}$ zulässig eingebettet. Ist $\mathfrak{I}$ nicht trivial bzw. nicht $\mathcal{P}$-trivial, dann ist $\mathcal{R}(\mathfrak{I})$ bzw. $\mathcal{P}(\mathfrak{I})$ in $\mathfrak{I}$ zulässig eingebettet und in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig.

Es sei $\mathfrak{I}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ ein Teilkontext eines Kontextes $\mathfrak{I} = (G, M, I)$. Nach Konstruktion 1 bestimmen wir den bereinigten Kontext $\bar{\mathfrak{I}} = (\bar{G}, \bar{M}, \bar{I})$ und zugleich bezeichnen wir

$$\bar{G}_1 = \{\bar{g} | g \in G_1\}, \qquad \bar{M}_1 = \{\bar{m} | m \in M_1\}, \qquad \bar{I}_1 = \bar{I} \cap (\bar{G}_1 \times \bar{M}_1).$$

Dann ist $\mathfrak{I}^*_1 = (\bar{G}_1, \bar{M}_1, \bar{I}_1)$ ein Teilkontext von $\bar{\mathfrak{I}}$. Ferner betrachten wir den bereinigten Kontext $\tilde{\mathfrak{I}}_1 = (\tilde{G}_1, \tilde{M}_1, \tilde{I}_1)$, der zu $\mathfrak{I}_1$ nach Konstruktion 1 bestimmt ist.

Satz 6 *Ist $\bar{\mathfrak{I}}^*_1$ der zu $\mathfrak{I}^*_1$ gehörige bereinigte Kontext, dann $\bar{\mathfrak{I}}^*_1 \simeq \tilde{\mathfrak{I}}_1$.*

Beweis Betrachten wir die Abbildung $\alpha : \tilde{G}_1 \mapsto L_{\tilde{\mathfrak{I}}}$ mit $\tilde{g} \mapsto {''\tilde{g}} \quad \forall \tilde{g} \in \tilde{G}_1$, dann $\alpha \tilde{G}_1 = \mathcal{G}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}$ und $\alpha \tilde{G}_1 \cup \{\tilde{o}\} = \mathcal{G}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} \cup \{\tilde{o}\} = \mathfrak{U}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}$, was nach Satz 2 eine supremal dichte Menge in $L_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}$ ist. Ähnlicherweise definieren wir $\beta : \tilde{M}_1 \mapsto L_{\tilde{\mathfrak{I}}}$

mit $\bar{m} \mapsto {}'\bar{m} \quad \forall \bar{m} \in \bar{M}_1$. Dann ist $\beta \bar{M}_1 \cup \{\tilde{1}\} = \mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}_1}$ eine infimal dichte Menge in $L_{\bar{\mathcal{J}}}$. Zugleich gilt

$$\bar{g}\ \bar{I}_1\ \bar{m} \Leftrightarrow g\ I\ m \Leftrightarrow \bar{g}\ \tilde{I}_1\ \tilde{m} \Leftrightarrow {}''\bar{g} \subseteq {}'\bar{m}$$

für $\bar{g} \in \bar{G}_1$, $\bar{m} \in \bar{M}_1$ und nach Satz 3 folgt daraus $(L_{\mathcal{J}_1^*}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1^*}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1^*}) \simeq (L_{\tilde{\mathcal{J}}_1}, \mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{J}}_1}, \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{J}}_1})$. Nach Theorem 1 erhält man $\tilde{\mathcal{J}}_1 \simeq \bar{\mathcal{J}}_1^*$.

Satz 7 *Ist $\mathcal{J}_1$ ein Teilkontext eines Kontextes $\mathcal{J}$, dann ist $\mathcal{J}_1^*$ in $\bar{\mathcal{J}}$ zulässig genau dann, wenn $\mathcal{J}_1$ in $\mathcal{J}$ zulässig ist. Ist $\mathcal{J}_1$ in $\mathcal{J}$ zulässig, dann $\mathcal{J}_1^* \simeq \tilde{\mathcal{J}}_1$ und $\tilde{\mathcal{J}}_1$ ist in $\bar{\mathcal{J}}$ zulässig eingebettet.*

Beweis Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : L_{\mathcal{J}} \mapsto L_{\bar{\mathcal{J}}}$ mit $\varphi g'' = \bar{g}'' \quad \forall g \in G_1$, $\varphi m' = \bar{m}' \quad \forall m \in M_1$, wo $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$. Dabei gilt $\varphi \mathcal{U}_{\mathcal{J}1}^{\mathcal{J}} = \varphi(\{g''|g \in G_1\} \cup \{o\}) = \{\varphi g''|g \in G_1\} \cup \{\bar{o}\} = \{\bar{g}''|\bar{g} \in \bar{G}_1\} \cup \{\bar{o}\} = \mathcal{U}_{\bar{\mathcal{J}}1}^{\bar{\mathcal{J}}^*}$. Ganz ähnlich ergibt sich $\varphi \mathcal{V}_{\mathcal{J}1}^{\mathcal{J}} = \mathcal{V}_{\bar{\mathcal{J}}1}^{\bar{\mathcal{J}}}$. In φ stellt sich jede dichte Menge wieder auf eine dichte Menge dar und deshalb ist $\mathcal{J}_1$ in $\mathcal{J}$ zulässig genau dann, wenn $\mathcal{J}_1^*$ in $\bar{\mathcal{J}}$ zulässig ist.

Es sei $\mathcal{J}_1$ in $\mathcal{J}$ zulässig. Dann ist $\mathcal{J}_1^*$ in $\bar{\mathcal{J}}$ zulässig und nach Satz 5 ist $\mathcal{J}_1^*$ bereinigt, d.h. $\mathcal{J}_1^* = \bar{\mathcal{J}}_1^*$ Nach Satz 6 gilt $\mathcal{J}_1^* \simeq \tilde{\mathcal{J}}_1$ und $\tilde{\mathcal{J}}_1$ ist in $\bar{\mathcal{J}}$ zulässig eingebettet.

Theorem 4 *Es seien $\mathcal{J} = (G, M, I)$, $\mathcal{J}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ Kontexte und $\bar{\mathcal{J}}$, $\bar{\mathcal{J}}_1$, die zu ihnen gehörigen bereinigten Kontexte. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

1. Es gibt einen Isomorphismus

$$\varphi : L_{\mathcal{J}_1} \mapsto L_{\mathcal{J}} \qquad \text{mit} \quad \varphi \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{J}}, \quad \varphi \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{J}}.$$

2. Der Kontext $\bar{\mathcal{J}}_1$ ist in $\bar{\mathcal{J}}$ zulässig eingebettet.

Beweis $1 \Rightarrow 2$. Wir setzen

$$\begin{aligned} G_2 &= \{h \in G|\ \exists g \in G_1,\ \varphi\, {}''g = h''\}, \\ M_2 &= \{n \in M|\ \exists m \in M_1,\ \varphi\, {}'m = m'\}. \end{aligned}$$

(Die Abbildung ' bezeichnen wir in $\mathcal{J}_1$ bzw. in $\mathcal{J}$ links bzw. rechts.) Setzen wir weiter

$$I_2 = I \cap (G_2 \times M_2) \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_2 = (G_2, M_2, I_2),$$

dann ist $\mathcal{J}_2$ ein Teilkontext von $\mathcal{J}$ und es gilt $\varphi \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1} = \mathcal{G}_{\mathcal{J}2}^{\mathcal{J}}$, $\varphi \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1} = \mathcal{M}_{\mathcal{J}2}^{\mathcal{J}}$. Nach Satz 2 sind $\mathcal{U}_{\mathcal{J}_1} = \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1} \cup \{o_1\}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{J}_1} = \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1} \cup \{1_1\}$ in $L_{\mathcal{J}_1}$ dicht. Da φ ein Isomorphismus ist, sind $\mathcal{U}_{\mathcal{J}2}^{\mathcal{J}} = \mathcal{G}_{\mathcal{J}2}^{\mathcal{J}} \cup \{o\} = \varphi \mathcal{G}_{\mathcal{J}} \cup \{\varphi o_1\} = \varphi \mathcal{U}_{\mathcal{J}_1}$ und $\mathcal{V}_{\mathcal{J}2}^{\mathcal{J}}$ in $L_{\mathcal{J}}$ dicht und es gilt

$$(L_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}) \simeq (L_{\mathcal{J}}, \mathcal{G}_{\mathcal{J}2}^{\mathcal{J}}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}2}^{\mathcal{J}}).$$

Der Teilkontext $\mathfrak{I}_2$ ist in $\mathfrak{I}$ zulässig und aus Satz 4 folgt

$$(L_{\mathfrak{I}}, \mathcal{G}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}^2}, \mathcal{M}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{I}^2}) \simeq (L_{\mathfrak{I}_2}, \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_2}, \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_2}),$$

woher

$$(L_{\mathfrak{I}_1}, \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_1}, \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_1}) \simeq (L_{\mathfrak{I}_2}, \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_2}, \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_2}).$$

Nach Theorem 1 ergibt sich daraus $\bar{\mathfrak{I}}_1 \simeq \bar{\mathfrak{I}}_2$. Nach Vorangehendem betrachten wir einen Teilkontext $\mathfrak{I}_2^*$ von $\bar{\mathfrak{I}}$. Da $\mathfrak{I}_2$ in $\mathfrak{I}$ zulässig ist, ist nach Satz 7 der Kontext $\mathfrak{I}_2^*$ in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig und $\bar{\mathfrak{I}}_2 \simeq \mathfrak{I}_2^*$. Daraus folgt $\bar{\mathfrak{I}}_1 \simeq \mathfrak{I}_2^*$ und $\bar{\mathfrak{I}}_1$ ist in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig eingebettet.

$2 \Rightarrow 1$. Nach der Voraussetzung gibt es einen Teilkontext $\mathfrak{I}^*$ von $\bar{\mathfrak{I}}$, der in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig und zu $\mathfrak{I}_1$ isomorph ist. Dabei ist $\mathfrak{I}^*$ bereinigt. Nach Theorem 1 gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi_1 : L_{\mathfrak{I}_1} \mapsto L_{\bar{\mathfrak{I}}} \qquad \text{mit} \quad \varphi_1 \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_1} = \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}_1}, \quad \varphi_1 \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_1} = \mathcal{M}_{\bar{\mathfrak{I}}_1}.$$

Wegen $\bar{\mathfrak{I}}_1 \simeq \mathfrak{I}^*$ gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi_2 : L_{\bar{\mathfrak{I}}_1} \mapsto L_{\mathfrak{I}^*} \qquad \text{mit} \quad \varphi_2 \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}_1} = \mathcal{G}_{\mathfrak{I}^*}, \quad \varphi_2 \mathcal{M}_{\bar{\mathfrak{I}}_1} = \mathcal{M}_{\mathfrak{I}^*}.$$

Da $\mathfrak{I}^*$ in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig ist, gibt es nach Satz 4 einen Isomorphismus

$$\varphi_3 : L_{\mathfrak{I}^*} \mapsto L_{\bar{\mathfrak{I}}} \qquad \text{mit} \quad \varphi_3 \mathcal{G}_{\mathfrak{I}^*} = \mathcal{G}^{\mathfrak{I}^*}_{\bar{\mathfrak{I}}}, \quad \varphi_3 \mathcal{M}_{\mathfrak{I}^*} = \mathcal{M}^{\mathfrak{I}^*}_{\bar{\mathfrak{I}}},$$

wobei $\mathcal{G}^{\mathfrak{I}^*}_{\bar{\mathfrak{I}}} \subseteq \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}}$, $\mathcal{M}^{\mathfrak{I}^*}_{\bar{\mathfrak{I}}} \subseteq \mathcal{M}_{\bar{\mathfrak{I}}}$. Nach Theorem 1 gibt es endlich einen Isomorphismus

$$\varphi_4 : L_{\bar{\mathfrak{I}}} \mapsto L_{\mathfrak{I}} \qquad \text{mit} \quad \varphi_4 \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}} = \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}, \quad \varphi_4 \mathcal{M}_{\bar{\mathfrak{I}}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{I}}.$$

Setzen wir $\varphi = \varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1$, dann $\varphi : L_{\mathfrak{I}_1} \mapsto L_{\mathfrak{I}}$ ist ein Isomorphismus mit

$$\varphi \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_1} = \varphi_4\varphi_3\varphi_2 \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}_1} = \varphi_4\varphi_3 \mathcal{G}_{\mathfrak{I}^*} = \varphi_4 \mathcal{G}^{\mathfrak{I}^*}_{\bar{\mathfrak{I}}} \subseteq \varphi_4 \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{I}}} = \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}.$$

Ganz ähnlich erhält man $\varphi \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_1} \subseteq \mathcal{M}_{\mathfrak{I}}$.

Theorem 5 *Es seien $\mathfrak{I}_1 = (G_1, M_1, I_1)$, $\mathfrak{I}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ Kontexte. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

1. Die Verbände $L_{\mathfrak{I}_1}$, $L_{\mathfrak{I}_2}$ sind isomorph.

2. Es gibt einen solchen Kontext $\mathfrak{I}$, daß $\bar{\mathfrak{I}}_1$, $\bar{\mathfrak{I}}_2$ in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig eingebettet sind.

Beweis $1 \Rightarrow 2$. Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : L_{\mathfrak{I}_1} \mapsto L_{\mathfrak{I}_2}$. Betrachten wir einen Kontext $\mathfrak{I} = (L_{\mathfrak{I}_2}, L_{\mathfrak{I}_2}, \leq)$, dann gilt $L_{\mathfrak{I}} \simeq L_{\mathfrak{I}_2}$ und es gibt einen Isomorphismus

$$\varphi_1 : L_{\mathfrak{I}} \mapsto L_{\mathfrak{I}_2} \qquad \text{mit} \quad \varphi_1 \mathcal{G}_{\mathfrak{I}} = L_{\mathfrak{I}_2} = \varphi_1 \mathcal{M}_{\mathfrak{I}}.$$

Die Abbildung $\varphi_1^{-1}\varphi$ ist ein Isomorphismus von $L_{\mathfrak{I}_1}$, $L_{\mathfrak{I}}$. Wegen $\varphi \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_1} \subseteq L_{\mathfrak{I}_2}$ und $\varphi_1^{-1} L_{\mathfrak{I}_2} = \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$ gilt $\varphi_1^{-1}\varphi \mathcal{G}_{\mathfrak{I}_1} \subseteq \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$ und ähnlicherweise auch $\varphi_1^{-1}\varphi \mathcal{M}_{\mathfrak{I}_1} \subseteq \mathcal{M}_{\mathfrak{I}}$.

Nach Theorem 4 ist $\bar{\mathfrak{I}}_1$ in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig eingebettet. Zugleich aber gilt $\varphi_1^{-1}\mathcal{G}_{\mathfrak{I}_2} \subseteq \mathcal{G}_{\mathfrak{I}}$, $\varphi_1^{-1}\mathcal{M}_{\mathfrak{I}_2} \subseteq \mathcal{M}_{\mathfrak{I}}$ und auch $\bar{\mathfrak{I}}_2$ ist in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig eingebettet.

$2 \Rightarrow 1$. Es sei $\mathfrak{I} = (G, M, I)$ ein Kontext derart, daß $\bar{\mathfrak{I}}_1$, $\bar{\mathfrak{I}}_2$ in $\bar{\mathfrak{I}}$ zulässig eingebettet sind. Nach Theorem 4 gibt es Isomorphismen

$$\varphi_1 : L_{\mathfrak{I}_1} \mapsto L_{\mathfrak{I}}, \qquad \varphi_2 : L_{\mathfrak{I}_2} \mapsto L_{\mathfrak{I}}.$$

Dann ist $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ ein Isomorphismus der Verbände $L_{\mathfrak{I}_1}$, $L_{\mathfrak{I}_2}$.

Literatur

[1] Erné, M.: *Distributive Laws for Concept Lattices.* Technische Hochschule Darmstadt, 1989.

[2] Wille, R.: *Restructuring lattice theory: an approach based on hirearchies of concepts.* In: I. Rival (ed.), Ordered sets. Reidel, Dordrecht-Boston 1982, 445-470.

Author's address: Department of Algebra and Geometry
Faculty of Science
Palacký University
Tomkova 38, Hejčín
779 00 Olomouc
Czech Republic