Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

František Machala

Fastgeordnete affine lokale Ternärringe und pregeordnete Biternärringe

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 28 (1989), No. 1, 11--25

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120213`

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM
1989 MATHEMATICA XXVIII VOL. 94

Katedra algebry a geometrie
přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Doc.RNDr. Jiří Rachůnek, CSc.

FASTGEORDNETE AFFINE LOKALE TERNÄRRINGE UND PREGEORDNETE BITERNÄRRINGE

FRANTIŠEK MACHALA

(Vorgelegt am 30.April 1988)

In [3], 4.1 wurden pregeordnete Hjelmslev-Biternärringe als eine algebraische Beschreibung der pregeordneten affinen Hjelmslev-Ebenen definiert. Zugleich wurden in [6] fastgeordnete affine lokale Ternärringe eingeführt, die fastgeordnete affine Klingenberg-Ebenen modellieren. (In Definition 11, [6] werden diese Strukturen als geordnet bezeichnet, aber wegen [7],[8] zeigt sich besser, sie fastgeordnet nennen.) In der vorliegenden Note werden die Zusammenhänge zwischen beiden algebraischen Strukturen ausführlicher studiert. Durch die Anwendung von Ergebnissen aus [5] wird z.B. gezeigt, daß pregeordnete Hjelmslev-Biternärringe zu solchen fastgeordneten (normierten) affinen lokalen Ternärringen äquivalent sind, die fastgeordnete affine Hjelmslev-Ebenen beschreiben.

In diesem Paragraphen bedeutet (M,t,t_1) stets einen in [4] und [5] definierten (normierten) affinen lokalen Ternärring. Dieser Definition nach ist (M,t) ein lokaler Ternärring mit einem vollständigen Ideal N und $(M/N,t')$ ist ein Restklassen--Ternärkorper. Die Elemente von $(M/N,t')$ werden mit $\overline{a},\overline{b},\ldots$ bezeichnet.

<u>Definition 1</u>. Ein normierter affiner lokaler Ternärring (M,t,t_1) hei3t fastgeordnet, wenn die Menge M linear geordnet ist und folgende Forderungen erfüllt sind:

(A1) Sind v,v' aus M, dann gilt $v \leqq v' \Rightarrow t(a,u,v) \leqq t(a,u,v')$ für alle $a,u \in M$.

(A2) Sind v,v' aus M, dann gilt $v \leqq v' \Rightarrow t_1(a,u,v) \leqq t_1(a,u,v')$ für alle $a \in M$, $u \in N$.

(A3) Es sei $t(x_1,u,v_1) = t(x_1,u_o,v_o)$, $t(x_2,u,v_2) = t(x_2,u_o,v_o)$ und $\overline{u} \neq \overline{u}_o$. Aus $u \leqq u_o$ bzw. $u_o \leqq u$ fogt $x_1 \leqq x_2 \Longleftrightarrow v_1 \leqq v_2$ bzw. $x_1 \leqq x_2 \Longleftrightarrow v_2 \leqq v_1$.

(A4) Gilt $y_1 = t(x_1,u_o,v_o)$, $y_2 = t(x_2,u_o,v_o)$ und $x_1 = t_1(y_1,u,v_1)$, $x_2 = t_1(y_2,u,v_2)$, dann $x_1 \leqq x_2 \Longleftrightarrow v_1 \leqq v_2$.

(A5) Gilt $x_1 = t_1(y_1,u_o,v_o)$, $x_2 = t_1(y_2,u_o,v_o)$ und $y_1 = t(x_1,u,v_1)$, $y_2 = t(x_2,u,v_2)$, dann $y_1 \leqq y_2 \Longleftrightarrow v_1 \leqq v_2$.

Die Definition 1 mit folgenden Folgerungen $(1)_1$ - $(5)_1$ sind aus [6] übernommen.

$(1)_1$ Aus (A1) folgt $v < v' \Longleftrightarrow t(a,u,v) < t(a,u,v')$.

$(2)_1$ Für $u \in N$ gilt $v < v' \Longleftrightarrow t_1(a,u,v) < t_1(a,u,v')$.

$(3)_1$ Sind die Forderungen von (A3) erfüllt, dann aus $u \leqq u_o$ bzw. $u_o \leqq u$ folgt $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow v_1 < v_2$ bzw. $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow v_2 < v_1$.

$(4)_1$ Sind die Forderungen von (A4) erfüllt, dann $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow v_1 < v_2$.

$(5)_1$ Sind die Forderungen von (A5) erfüllt, dann
$y_1 < y_2 \Longleftrightarrow v_1 < v_2$.

<u>Definition 2</u>. Ein normierter affiner lokaler Ternärring (M,t,t_1) heißt quasigeordnet, wenn folgende Forderungen erfüllt sind:

[OM1] Die Menge M ist linear geordnet.

[OM2] Für alle a,c,d,m aus M gilt $c < d \Longrightarrow t(a,m,c) < t(a.m.d)$.

[OM2]´ Für alle a,c,d,m aus M mit $\overline{m} = \overline{0}$ gilt $c < d \Longrightarrow t_1(a,m,c) < t_1(a,m,d)$.

[OM3] Es seien c,d,m,n,r,s aus M mit $\overline{m} \neq \overline{n}$, $m < n$ und $t(s,m,c) = t(s,n,d)$. Dann aus $s < r$ bzw. $r < s$ folgt $t(r,m,c) < t(r,n,d)$ bzw. $t(r,n,d) < t(r,m,c)$.

[OM3]´ Es seien c,d,m,n,e,s aus M mit $\overline{m} \neq \overline{n}$ und $m < n$.

a) Ist $\overline{m} \neq \overline{0}$, $\overline{n} = \overline{0}$ und $t_1(s,n,d) = x$, $t_1(r,n,d) = x_2$, $t(x,m,c) = s$, $t(x_1,m,c) = r$, dann gilt $s < r \Longrightarrow x_1 < x_2$ bzw. $r < s \Longrightarrow x_2 < x_1$.

b) Ist $\overline{m} = \overline{0}$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ und $t_1(s,m,d) = x$, $t_1(r,m,d) = x_2$, $t(x,n,c) = s$, $t(x_1,n,c) = r$, dann gilt $s < r \Longrightarrow x_2 < x_1$ bzw. $r < s \Longrightarrow x_1 < x_2$.

[OM4] Ist $\overline{m} = \overline{u} = \overline{0}$ und $t(a_i,m,d_i) = b_i$, $t_1(b_i,u,v) = a_i$ für $i \in \{1,2\}$, dann $d_1 < d_2 \Longrightarrow b_1 < b_2$.

[OM4]´ Ist $\overline{m} = \overline{u} = \overline{0}$ und $t_1(a_i,m,d_i) = b_i$, $t_1(b_i,u,v) = a_i$ für $i \in \{1,2\}$, dann $d_1 < d_2 \Longrightarrow b_1 < b_2$.

[OM] Sind a,b aus M mit $\overline{a} \neq \overline{0}$ und $\overline{b} = \overline{0}$, dann $a < 0 \Longleftrightarrow a < b$.

<u>Folgerungen der Definition 2</u>

$(1)_2$ Es sei $t(a,m,c) < t(a,m,d)$. Aus $d < c$ erhält man nach [OM2] die Ungleichheit $t(a,m,d) < t(a,m,c)$, also ein Widerspruch. Aus $c = d$ folgt $t(a,m,c) = t(a,m,d)$, was wieder ein Widerspruch ist. Deshalb gilt $c < d$. Ganz ähnlich läßt sich auch die Implikation $t_1(a,m,c) < t_1(a,m,d) \Rightarrow c < d$ beweisen.

(2)$_2$ Ist $t(s,m,c) = t(s,n,d)$ und $t(r,m,c) < t(r,n,d)$ mit $\overline{m} \neq \overline{n}$, dann gilt entweder $s < r$, $m < n$ oder $r < s$, $n < m$: Nehmen wir $m < n$ und zugleich $r < s$ an, dann aus unseren Voraussetzungen und nach [OM3] erhalten wir $t(r,n,d) < t(r,m,c)$, was ein Widerspruch ist. Daraus ergibt sich $s \leqq r$, aber die Gleichheit $s = r$ führt wegen $\overline{m} \neq \overline{n}$ und $t(s,m,c) = t(s,n,d)$ wieder zum Widerspruch $t(r,m,c) = t(r,n,d)$. Somit ist $s < r$. Ähnlicherweise $n < m$ impliziert $r < s$.

(3)$_2$ Nehmen wir an, daß die Voraussetzungen von [OM3]$'$ a) erfüllt sind. Sei dabei $x_1 < x_2$. Aus $r < s$ folgt nach [OM3]$'$ a) $x_2 < x_1$, was ein Widerspruch ist. Somit soll $s \leqq r$ gelten. Im Falle $s = r$ ergibt sich $x = t_1(s,n,d) = x_2$ und $t(x,m,c) = s = t(x_1,m,c)$, was wegen $\overline{m} \neq \overline{0}$ die Gleichheit $x = x_1$ und folglich $x_1 = x_2$ impliziert. Deshalb ist $s < r$. Ganz ähnlich läßt sich $x_2 < x_1 \Rightarrow r < s$ beweisen. Auch im Falle [OM3]$'$ b) gilt $x_1 < x_2 \Rightarrow r < s$, $x_2 < x_1 \Rightarrow s < r$.

(4)$_2$ Nehmen wir an, daß die Voraussetzungen von [OM4] erfüllt sind und sei dabei $b_1 < b_2$. Gilt zugleich $d_2 < d_1$, dann erhält man nach [OM4] $b_2 < b_1$. Somit gilt $d_1 \leqq d_2$. Im Falle $d_1 = d_2$ ergibt sich $t(a_1,m,d_1) = b_1$, $t_1(b_1, u,v) = a_1$ und $t(a_2,m,d_1) = b_2$, $t_1(b_2,u,v) = a_2$, woher nach (4), Def.9, [4], $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ folgt. Daher soll $d_1 < d_2$ gelten.

Ähnlicherweise ergibt sich $b_1 < b_2 \Rightarrow d_1 < d_2$ auch im Falle [OM4]$'$.

(5)$_2$ Nehmen wir an, daß $1 < 0$ gilt. Wegen $t(1,1,0) = t(1,0,1) = 1$ und $\overline{0} \neq \overline{1}$, $1 < 0$ ergibt sich nach [OM3] $t(0,1,0) < t(0,0,1)$, d.h. $0 < 1$ im Widerspruch zu $1 < 0$. Deswegen gilt $0 \leqq 1$ und wegen $0 \neq 1$ ist $0 < 1$.

(6)$_2$ Es sei $t(m,m',0) = 1$. Dann gilt $\overline{m} \neq \overline{0}$ und $\overline{m'} \neq \overline{0}$, weil (M,t) ein lokaler Ternärring ist. Es sei zusätzlich $m' < 0$. Da $t(m,m',0) = t(0,0,1) = 1$ und nach (5)$_2$ auch $t(0,m',0) < t(0,0,1)$ gilt, erhalten wir nach (2)$_2$ $m < 0$. Ganz.

ähnlich läßt sich $0 < m' \Rightarrow 0 < m$ und folglich $m < 0 \Rightarrow m' < 0$, $0 < m \Rightarrow 0 < m'$ beweisen. Damit gilt $m < 0 \Leftrightarrow m' < 0$ und $m > 0 \Leftrightarrow m' > 0$.

$(7)_2$ Sind a,b,m,n,d aus M mit $\overline{m} \neq \overline{0}$ und $0 < m$, dann gilt $a < b \Leftrightarrow t(a,m,d) < t(b,m,d)$: Setzt man $t(a,m,d) = x$, dann ist $t(a,m,d) = t(a,0,x)$ und nach [OM3] ergibt sich $t(b,0,x) < t(b,m,d)$, also $x < t(b,m,d)$ und $t(a,m,d) < t(b,m,d)$. Umgekehrt gilt auch $t(a,m,d) < t(b,m,d) \Rightarrow a < b$.

Im Falle $m < 0$ läßt sich ähnlich $a < b \Leftrightarrow t(a,m,d) > t(b,m,d)$ beweisen.

$(8)_2$ Es sei $t(m,m',0) = t(n,n',0) = 1$ mit $\overline{m} \neq \overline{n}$ und $m < n$. Dann gilt $\overline{m} \neq \overline{0}$, $\overline{n} \neq \overline{0}$, $\overline{m}' \neq \overline{0}$, $\overline{n}' \neq \overline{0}$.

a) Nehmen wir $0 < m$ an. Wegen $m < n$ gilt $0 < n$ und nach $(6)_2$ ist $0 < m'$, $0 < n'$. Aus $\overline{m}' \neq \overline{0}$, $m < n$ erhält man nach $(7)_2$ $t(m,m',0) < t(n,m',0)$ und folglich $t(n,n',0) < t(n,m',0)$. Wegen $t(0,n',0) = t(0,m',0) = 0$ und $0 < n$ ergibt sich nach $(2)_2$ $n' < m'$, also $0 < n' < m'$.

b) Es sei $m < n < 0$ und folglich $m' < 0$, $n' < 0$. Wegen $m' < 0$ gilt nach $(7)_2$ $m < n \Rightarrow t(n,m',0) < t(m,m',0)$ und $t(n,m',0) < t(n,n',0)$. Durch Anwendung von $(2)_2$ erhält man $n' < m'$ und $n' < m' < 0$ ähnlich zu a).

c) Im übrigen Falle $m < 0 < n$ gilt $m' < 0 < n'$ nach $(6)_2$.

Satz 1. Jeder (normierte) fastgeordnete affine lokale Ternärring ist zugleich quasigeordnet.

Beweis. Es sei $\mathcal{T} = (M,t,t_1)$ ein (normierter) fastgeordneter affiner lokaler Ternärring. Wir wollen beweisen, daß $\mathcal{T}$ die Forderungen [OM1] - [OM4]' und [OM] der Definition 2 genügt. Die Gültigkeit von [OM1], [OM2], [OM2]', [OM4] und [OM4]' folgt unmittelbar aus (A1), (A2), (A4), (A5) und $(1)_1$, $(2)_1$, $(4)_1$, $(5)_1$.

zu [OM3] Es seien c,d,m,n,r,s aus M mit $\overline{m} \neq \overline{n}$, $m < n$, $t(s,m,c) = t(s,n,d)$. Nehmen wir dabei $s < r$ an. Es gibt genau ein $w \in M$ mit $t(r,n,d) = t(r,m,w)$. Wegen $t(s,m,c) = t(s,n,d)$

und $t(r,m,w) = t(r,n,d)$ ergibt sich $c < w$ nach (A3) und $(3)_1$. Nach (A1) und $(1)_1$ gilt dann $t(r,m,c) < t(r,m,w)$, also $t(r,m,c) < t(r,n,d)$, was die Behauptung von [OM3] ist.

Im Falle $r < s$ geht man analog vor.

zu [OM 3]' Es seien c,d,m,n,r,s aus M mit $\overline{m} \neq \overline{n}$ und $m < n$.

a) Nehmen wir an, daß die Voraussetzungen von [OM3]' a) erfüllt sind, d.h.: $\overline{m} \neq \overline{0}$, $\overline{n} = \overline{0}$, $t_1(s,n,d) = x$, $t_1(r,n,d) = x_2$, $t(x,m,c) = s$, $t(x_1,m,c) = r$.

Es gibt genau ein $v \in M$ mit $t(x_2,m,v) = r$. Aus den Gleichheiten $t_1(s,n,d) = x$, $t_1(r,n,d) = x_2$, $t(x,m,c) = s$, $t(x_2,m,v) = r$ folgt nach (A5) und $(5)_1$ die Implikation $s < r \Longrightarrow c < v$. Nach Satz 4, [6] läßt sich auf dem Restklassen-Ternärkörper $(M/N,t')$ eine Anordnung $<$ durch die Vorschrift $\overline{a} < \overline{b} \Longleftrightarrow \exists u \in \overline{a}, v \in \overline{b}, u < v$ einführen. Wegen $\overline{m} \neq \overline{0}$, $\overline{n} = \overline{0}$, $m < n$ ergibt sich daraus $\overline{m} < \overline{n}$, $\overline{m} < \overline{0}$ und $m < 0$. Wegen $t(x_2,0,r) = t(x_2,m,v) = r$, $t(x_1,0,r) = t(x_1,m,c) = r$ und $m < 0$ erhält man nach (A3) $c < v \Longrightarrow x_1 < x_2$, was nach Vorangehendem $s < r \Longrightarrow x_1 < x_2$ bedeutet.

Der Fall b) läßt sich ähnlich beweisen.

zu [OM] Durch die Anwendung von $(M/N,t')$ ergibt sich für $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} = \overline{0}$ folgende Beziehungen: $a < 0 \Longleftrightarrow \overline{a} < \overline{0} \Longleftrightarrow \overline{a} < \overline{b} \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow a < b$.

<u>Satz 2</u>. Jeder (normierte) quasigeordnete affine lokale Ternärring ist zugleich fastgeordnet.

<u>Beweis.</u> Es sei $\mathcal{T} = (M,t,t_1)$ quasigeordnet. Wir wollen beweisen, daß in $\mathcal{T}$ die Behauptungen (A1) - (A5) gelten.

Wegen $v = v' \Longrightarrow t(a,u,v) = t(a,u,v')$ gilt nach [OM2] unsere Behauptung (A1) $v \leqq v' \Longrightarrow t(a,u,v) \leqq t(a,u,v')$ und die Behauptung (A2) folgt ähnlicherweise aus [OM2]'.

zu (A3) Es sei $t(x_1,u,v_1) = t(x_1,u_o,v_o)$ und $t(x_2,u,v_2) = t(x_2,u_o,v_o)$ mit $\bar{u} \neq \bar{u}_o$. Aus $x_1 = x_2$ folgt $t(x_1,u,v_1) = t(x_1,u_o,v_o) = t(x_1,u,v_2)$ und daraus $v_1 = v_2$. Gilt umgekehrt $v_1 = v_2$, dann ist $t(x_1,u,v_1) = t(x_1,u_o,v_o)$, $t(x_2,u,v_1) = t(x_2,u_o,v_o)$ und wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_o$ erhält man $x_1 = x_2$ nach (K3)' a), [4].

Es sei $u \lesseqgtr u_o$. Nach $\bar{u} \neq \bar{u}_o$ ist $u \neq u_o$ und $u < u_o$.

a) Nehmen wir $x_1 < x_2$ an. Aus $t(x_1,u,v_1) = t(x_1,u_o,v_o)$ folgt nach [OM3] $t(x_2,u,v_1) < t(x_2,u_o,v_o)$ und $t(x_2,u,v_1) < t(x_2,u,v_2)$. Wegen $(1)_2$ ergibt sich daraus $v_1 < v_2$.

b) Nehmen wir $v_1 < v_2$ an. Nach [OM2] gilt $t(x_2,u,v_1) < t(x_2,u,v_2)$, also $t(x_2,u,v_1) < t(x_2,u_o,v_o)$. Wegen $t(x_1,u,v_1) = t(x_1,u_o,v_o)$ und $u < u_o$ erhält man nach $(2)_2$ $x_1 < x_2$.

Im Falle $u_o \lesseqgtr u$ geht man analog vor.

zu (A4) Es seien $y_1 = t(x_1,u_o,v_o)$, $y_2 = t(x_2,u_o,v_o)$, $x_1 = t_1(y_1,u,v_1)$, $x_2 = t_1(y_2,u,v_2)$. Nach Definition von t_1 soll dabei $\bar{u} = \bar{0}$ gelten.

1. Es sei $x_1 = x_2$. Dann ergibt sich $y_1 = t(x_1,u_o,v_o) = y_2$ und $t_1(y_1,u,v_1) = t_1(y_1,u,v_2)$, woher nach (2), Def. 9, [4] $v_1 = v_2$ folgt. Ist umgekehrt $v_1 = v_2$, dann unseren Gleichheiten nach erhält man laut (4). Def. 9, [4] $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

2. Es sei $\bar{u}_o = \bar{0}$. Nach [OM4]' und $(4)_2$ gilt $v_1 < v_2 \Longleftrightarrow x_1 < x_2$.

3. Es sei $\bar{u}_o \neq \bar{0}$. Zuerst nehmen wir $u_o < 0$ an. Da $\mathcal{T}$ normiert ist ([5]), gilt $x_2 = t_1(y_1,0,x_2)$ und $x_2 = t_1(y_2,0,x_2)$. Zugleich ist $y_1 = t(x_1,u_o,v_o)$, $y_2 = t(x_2,u_o,v_o)$. Wegen $u_o < 0$ folgt daher aus [OM3]' a) und $(3)_2$ $y_2 < y_1 \Longleftrightarrow x_1 < x_2$. Wir setzen $x = t_1(y_1,u,v_2)$ und betrachten die Gleichheiten $y_1 = t(x_1,u_o,v_o)$, $y_2 = t(x_2,u_o,v_o)$, $x = t_1(y_1,u,v_2)$, $x_2 = t_1(y_2,u,v_2)$. Wegen $u_o < 0$, $\bar{u}_o \neq \bar{0}$, $\bar{u} = \bar{0}$ ergibt sich nach [OM] $u_o < u$. Wegen [OM3]' a) und $(3)_2$ gilt dann $y_2 < y_1 \Longleftrightarrow x_1 < x$ und nach [OM2], $(1)_2$ folgt daraus $x_1 < x \Longleftrightarrow t_1(y_1,u,v_1) < t_1(y_1,u,v_2) \Longleftrightarrow v_1 < v_2$. Gilt $0 < u_o$, dann ist $u < u_o$ und durch Anwendung

von [OM3]' b), [OM2], $(1)_2$, $(3)_2$ erhält man schrittweise, wie oben: $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow y_1 < y_2 \Longleftrightarrow x_1 < x \Longleftrightarrow v_1 < v_2$.

zu (A5) Es sei $x_1 = t_1(y_1,u_o,v_o)$, $x_2 = t_1(y_2,u_o,v_o)$, $y_1 = t(x_1,u,v_1)$, $y_2 = t(x_2,u,v_2)$. Analog zu (A4) läßt sich $y_1 = y_2 \Longleftrightarrow v_1 = v_2$ beweisen. Ist $\overline{u} = \overline{0}$, dann folgt die Äquivalenz $y_1 < y_2 \Longleftrightarrow v_1 < v_2$ aus [OM4] und $(4)_2$.

Wir nehmen $\overline{u} \neq \overline{0}$ an. Nach K_3', [4] gibt es genau ein Element $x \in M$ mit $y_2 = t(x,u,v_1)$. Betrachten wir die Gleichheiten $x_1 = t_1(y_1,u_o,v_o)$, $x_2 = t_1(y_2,u_o,v_o)$, $y_1 = t(x_1,u,v_1)$, $y_2 = t(x,u,v_1)$ und nehmen wir dabei $u < u_o$ an, dann gilt nach [OM3]' a) und $(3)_2$ $y_1 < y_2 \Longleftrightarrow x < x_2$. Aus $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{u}_o = \overline{0}$, $u < u_o$ folgt nach [OM] $u < 0$ und wegen $y_2 = t(x,u,v_1) = t(x,0,y_2)$ erhält man schrittweise nach [OM3], [OM2], $(1)_2$, $(2)_2$ $x < x_2 \Longleftrightarrow t(x_2,u,v_1) < t(x_2,0,y_2) \Longleftrightarrow t(x_2,u,v_1) < t(x_2,u,v_2) \Longleftrightarrow v_1 < v_2$.

Im Falle $u_o < u$ erhalten wir ähnlicherweise $y_1 < y_2 \Longleftrightarrow x_2 < x \Longleftrightarrow v_1 < v_2$.

<u>Bemerkung</u>. Nach Sätzen 1 und 2 sind fastgeordnete und quasigeordnete (normierte) affine lokale Ternärringe äquivalent.

II

In [2] ist ein Biternärring definiert als eine algebraische Struktur mit zwei Ternäroperationen T,T' (siehe auch [5]).

<u>Definition 3</u>. Ein Biternärring (M,T,T') heißt pregeordnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(OM1) Die Menge M ist linear geordnet.

(OM2) Für alle a,c,d,m aus M gilt $c < d \Longrightarrow T(a,m,c) < T(a,m,d)$.

(OM3) Es seien c,d,m,n,r,s aus M mit $m \not\parallel n$, $m < n$ und $T(s,m,c) = T(s,n,d)$. Dann aus $s < r$ bzw. $r < s$ folgt $T(r,m,c) < T(r,n,d)$ bzw. $r < s \Longrightarrow T(r,n,d) < T(r,m,c)$.

(OM4) Gilt $T(a_i, m, d_i) = b_i$, $T'(b_i, u, v) = a_i$ für $i \in \{1,2\}$ und $m \sim_\varphi 0$, $u \sim_\varphi 0$, dann $d_1 < d_2 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow b_1 < b_2$.

(OM5) Es gelten auch Behauptungen (OM2)′, (OM3)′ und (OM4)′, die wir durch Austauschung der Ternäroperationen T und T' in (OM2), (OM3) und (OM4) erhalten.

(OM6) Sind a, b aus M mit $a \not\sim_\varphi 0$ und $b \sim_\varphi 0$, dann $a < 0 \Longleftrightarrow a < b$.

Bemerkung. Durch kleinere Gestaltungen können wir nach Beweis des Satzes IV, [5] aus jedem (normierten) affinen lokalen Ternärring (M, t, t_1) einen unvollständigen Biternärring herstellen. Dabei verwechseln wir nach [5] die Ternäroperationen t gegen T und die partielle Ternäroperation t_1 gegen T'. Anstatt $\bar{a} = \bar{b}$ bzw. $\bar{a} \neq \bar{b}$ schreiben wir $a \sim_\varphi b$ bzw. $a \not\sim_\varphi b$. Ein unvollständiger Biternärring (M, T, T'), der die Forderungen

[OM1] - [OM4]′, [OM] eines quasigeordneten affinen lokalen Ternärringes (nach durchgeführten Änderungen) erfüllt, heißt auch quasigeordnet. In (M, T, T') offensichtlich gelten auch die Folgerungen der Definition 2. Die entsprechenden Bedingungen (OM1), (OM2), (OM3), (OM4), (OM4)′, (OM6) aus Definition 3 und [OM1], [OM2], [OM3], [OM4], [OM4]′, [OM] aus Definition 2 sind äquivalent. In pregeordneten Biternärringen deshalb gelten alle durch die eingeführten Bedingungen bewiesene Folgerungen der Definition 2.

In [5] wurde gezeigt, daß Biternärringe, unvollständige Biternärringe und (normierte) affine lokale Ternärringe äquivalent sind. Die Beziehungen aus [5] verwenden wir zum Beweis der fundamentalen Behauptung, daß fastgeordnete (normierte) affine lokale Ternärringe und pregeordnete Biternärringe äquivalent sind. Dazu genügt es nach der vorigen Bemerkung und nach Sätzen 1,2 die Äquivalenz der quasigeordneten unvollständigen Biternärringe und der pregeordneten Biternärringe zu beweisen.

Satz 3. Quasigeordnete unvollständige Biternärringe und pregeordnete Biternärringe sind äquivalent.

Beweis. 1. (M,T,T') sei ein pregeordneter Biternärring, der normal zur Äquivalenzrelation $\sim_\varphi$ auf M ist, wobei $N = \{x \in M \mid x \sim_\varphi 0\}$. Zu (M,T,T') bestimmen wir nach Satz 1, [5] einen unvollständigen Biternärring (M,t,t_1), wo $t(a,b,c) := T(a,b,c)$ $\forall a,b,c \in M$, $t_1(a,b,c) := T'(a,b,c)$ $\forall a,c \in M$ $\forall b \in N$ gesetzt ist. Wir wollen zeigen, daß in (M,t,t_1) alle Forderungen der Definition 2 erfüllt sind. Nach Bemerkung genügt es nur $[OM2]'$ und $[OM3]'$ zu bedenken. Da $[OM2]'$ unmittelbar aus $(OM2)'$ folgt, es bleibt nur $[OM3]'$ zu beweisen:

a) Es seien c,d,m,n,r,s aus M mit $m < n$, $m \not\sim_\varphi 0$, $n \sim_\varphi 0$ und ferner sei $t_1(s,n,d) = x$, $t_1(r,n,d) = x_2$, $t(x,m,c) = s$, $t(x_1,m,c) = r$. Unseren Verabredungen nach können wir die eingeführten Gleichheiten in der folgenden Form einschreiben:

$T'(s,n,d) = x$, $T'(r,n,d) = x_2$, $T(x,m,c) = s$, $T(x_1,m,c) = r$. Setzen wir $T(m',m,0) = 1$ und $T(c',m,c) = 0$, dann erhalten wir wegen $T'(0,m',c') = c'$ und nach (B7) in der Definition des Biternärringes [2], [5] die Implikationen $T(x,m,c) = s \Longrightarrow T'(s,m',c') = x$ und $T(x_1,m,c) = r \Longrightarrow T'(r,m',c') = x_1$. Wegen $m \not\sim_\varphi 0$, $n \sim_\varphi 0$ und $m < n$ ergibt sich nach (OM6) $m < 0$. Aus $T(m',m,0) = 1$ folgt dann nach $(6)_2$ $m' < 0$ und nach (OM6) ist $m' < n$. Wegen $T'(s,m',c') = T'(s,n,d)$ gilt nach $(OM3)'$ $s < r \Longrightarrow T'(r,m',c') < T'(r,n,d)$ und $x_1 < x_2$. Analog läßt sich $r < s \Longrightarrow x_2 < x_1$ beweisen.

Im Falle b) können wir ähnlich verfahren.

2. (M,t,t_1) sei ein quasigeordneter unvollständiger Biternärring, wo die partielle Ternäroperation t_1 auf der Menge $M \times N \times M$ definiert ist. (M,t,t_1) erweitern wir nach Satz 2, [5] in einen Biternärring (M,T,T'). Dabei setzen wir $T(a,b,c) := t(a,b,c)$ $\forall a,b,c \in M$, $T'(a,b,c) := t_1(a,b,c)$ $\forall a,c \in M$ $\forall b \in N$ und $T'(a,b,c) = d$ für $b \notin N$, wo $T(b,b',0) = 1$, $T(c,b',c') = 0$ und $T(d,b',c') = a$ ist. Wir zeigen, daß der Biternärring (M,T,T') pregeordnet ist. Dazu genügt es die Gültigkeit von $(OM2)'$ und $(OM3)'$ zu beweisen.

zu (OM2)′ Es seien a,c,d,m aus M mit $c < d$.

a) Gilt $m \sim_\varphi 0$, dann $T'(a,m,c) < T'(a,m,d)$ folgt aus [OM2]′.

b) Wir nehmen $m \not\sim_\varphi 0$ an und setzen $x_1 = T'(a,m,c)$, $x_2 = T'(a,m,d)$. Bestimmen wir Elemente $m',c',d' \in M$ durch $T(m,m',0) = 1$, $T(c,m',c') = T(d,m',d') = 0$, dann erhalten wir nach Definition von T' die Gleichheiten $T(x_1,m',c') = T(x_2,m',d') = a$.

Zuerst sei $m' < 0$. Da $T(c,m',c') = T(c,0,0) = 0$ gilt, erhält man wegen $c < d$ nach [OM3] $T(d,m',c') < T(d,0,0)$, also $T(d,m',c') < T(d,m',d')$. Nach $(1)_2$ und [OM2] ergibt sich daraus $c' < d'$ und $T(x_2,m',c') < T(x_2,m',d')$, also $T(x_2,m',c') < T(x_1,m',c')$. Nach $(7)_2$ gilt $x_1 < x_2$ und folglich $T'(a,m,c) < T'(a,m,d)$.

Nehmen wir $m' > 0$ an, dann erhalten wir schrittweise

$$c < d \Longrightarrow d' < c' \Longrightarrow T(x_1,m',c') < T(x_2,m',c') \Longrightarrow x_1 < x_2.$$

zu (OM3)′ Es sein $m \not\sim_\varphi n$, $m < n$ und $T'(s,m,c) = T'(s,n,d) = x$. Ferner sei $r \in M$ mit $s < r$. Wir setzen $x_1 = T'(r,m,c)$ und $x_2 = T'(r,n,d)$.

a) Es sei $m \not\sim_\varphi 0$ und $n \sim_\varphi 0$. Setzt man $T(m,m',0) = 1$, $T(c,m',c') = 0$, dann gilt $T(x_1,m',c') = r$ und $T(x,m',c') = s$. Aus $m \not\sim_\varphi 0$, $n \not\sim_\varphi 0$ und $m < n$ folgt $m < 0$ und $m' < 0$ nach [OM] und $(6)_2$. Wegen $m' \not\sim_\varphi 0$ gilt $m' < n$ erneut nach [OM]. Damit ergibt sich $m' \not\sim_\varphi 0$, $n \not\sim_\varphi 0$, $m' < n$ und $T'(s,n,d) = x$, $T'(r,n,d) = x_2$, $T(x,m',c') = s$, $T(x_1,m',c') = r$. Aus [OM3]′ a) folgt daraus $x_1 < x_2$, was $T'(r,m,c) < T'(r,n,d)$ bedeutet.

b) Im Falle $m \sim_\varphi 0$, $n \not\sim_\varphi 0$ gehen wir ähnlich zu a) vor.

c) Es sei $m \not\sim_\varphi 0$ und $n \not\sim_\varphi 0$. Setzt man $T(m,m',0) = T(n,n',0) = 1$ und $T(c,m',c') = T(d,n',d') = 0$, dann gilt $s = T(x,m',c') = T(x,n',d')$ und $r = T(x_1,m',c') = T(x_2,n',d')$. Nach $s < r$ ist $T(x_1,0,s) < T(x_1,m',c')$.

Es sei $m' < 0$ und gleichzeitig $x < x_1$. Wegen $s = T(x,m',c') = T(x,0,s)$ erhält man nach [OM3] $T(x_1,m',c') < T(x_1,0,s)$, was ein Widerspruch ist. Da $x \neq x_1$ gilt, soll daher $x_1 < x$ gelten. Ganz ähnlich $0 < m'$ impliziert $x < x_1$.

Nach (B3) aus [2], [5] gibt es genau ein $v \in M$ mit $r = T(x_1, n', v) = T(x_1, m', c)$. Wegen $T(m, m', 0) = T(n, n', 0) = 1$ ergibt sich nach $(8)_2$ für m', n' drei Möglichkeiten $0 < n' < m'$, $m' < 0 < n'$ und $n' < m' < 0$.

1. Es sei $0 < n' < m'$. Wegen $0 < m'$ gilt nach Vorangehendem $x < x_1$ und wegen $n' < m'$ folgt aus $T(x_1, n', v) = T(x_1, m', c)$ nach [OM3] $T(x, m', c') < T(x, n', v)$, also $T(x, n', d') < T(x, n', v)$. Nach $(1)_2$ ist deshalb $d' < v$.

2. Es sei $m' < 0 < n'$. Wegen $m' < 0$ ist $x_1 < x$ und wegen $m' < n'$ erhält man durch Anwendung von [OM3] $d' < v$ analog zu 1.

3. Gilt $n' < m' < 0$, dann ist $x_1 < x$ und wegen $n' < m'$ folgt aus [OM3] $v < d'$.

Es sei $n' < 0$. Dann gilt $v < d'$ und nach [OM2] ist $T(x_2, n', v) < T(x_2, n', d')$, also $T(x_2, n', v) < T(x_2, 0, r)$. Da zugleich $T(x_1, n', v) = T(x_1, 0, r)$ gilt, ergibt sich nach $(2)_2$ $x_1 < x_2$ und $T'(r, m, c) < T'(r, n, d)$. Ist $n' > 0$, dann gilt $d' < v$ und $T(x_2, 0, r) < T(x_2, n', v)$. Aus $(2)_2$ erhält man wieder $x_1 < x_2$ und $T'(r, m, c) < T'(r, n, d)$.

Bemerkung. Die Behauptungen (OM2)' b) und (OM3)' c) sind im Teil 2 des vorigen Beweises nur durch die Behauptungen [OM1], [OM2], [OM3] und ihren Folgerungen beweisen. Da (OM1), (OM2), (OM3) äquivalent zu [OM1], [OM2] und [OM3] sind, sind die Behauptungen (OM2)' b) und (OM3)' c) auf (OM1), (OM2) und (OM3) abhängig. In den Forderungen (OM2)', (OM3)' der Definition 3 können wir deshalb die Fälle $m \not\varphi 0$ bzw. $m \not\varphi 0$, $n \not\varphi 0$ weglassen.

P. Y. Bacon definierte in [1] algebraishce Strukturen mit zwei Ternäroperationen, die affine Hjelmslev-Ebenen beschreiben. Nennen wir diese Strukturen Hjelmslev-Biternärringe. In [2] definierte P.Y.Bacon allgemeinere Biternärringe, die affine Klingenberg-Ebenen beschreiben. Der Verfasser führte in [4], [5] normierte affine lokale Ternärringe ein, die nach [5] zu Biternärringen äquivalent sind. Die Strukturen, welche in dieser Äquivalenz den Hjelmslev-Biternärringen entsprechen, nennen wir affine lokale Hjelmslev-Ternärringe.

In unserer Definition 3 und in [3], 4.1 werden pregeordnete Biternärringe und pregeordnete Hjelmslev-Biternärringe eingeführt. Beide Definitionen unterscheiden sich nur dadurch, da3 in Definition 3 der Axiom (OM6) gefordert wird (abgesehen von den formellen Bezeichnungen - in Definition 3 schreibt man $m \sim_{\varphi} n$, während in [3], 4.1 $m \sim_n n$). Die Behauptung (OM6) aber gilt in jedem pregeordneten Hjelmslev-Biternärring. Dies folgt unmittelbar aus [3], Lemma 7, Behauptung 6, wo man beweist, da3 $a < b < c$, $a \sim_{\varphi} 0$, $c \sim_{\varphi} 0 \Rightarrow b \sim_{\varphi} 0$ gilt.

Aus dem Sätzen 1 - 3 erhalten wir also folgendes Ergebnis: Fastgeordnete (normierte) affine lokale Hjelmslev-Ternärringe, quasigeordnete unvollständige Hjelmslev-Biternärringe und pregeordnete Hjelmslev-Biternärringe sind äquivalente Strukturen.

Zusammenfassung

In [3] wurden pregeordnete Biternärringe als eine algebraische Beschreibung der pregeordneten affinen Hjelmslev-Ebenen definiert und in [6] wurden fastgeordnete affine lokale Ternärringe eingeführt, die fastgeordnete affine Klingenberg-Ebenen modellieren. In der vorliegenden Note werden die Zusammenhänge zwischen beiden algebraischen Strukturen ausführlicher durch die Anwendung von Ergebnissen aus [5] studiert.

Souhrn

SKOROUSPOŘÁDANÉ AFINNÍ LOKÁLNÍ TERNÁRNÍ OKRUHY
A PREUSPOŘÁDANÉ BITERNÁRNÍ OKRUHY

Ve [3] jsou definovány preuspořádané biternární okruhy, popisující preuspořádané Hjelmslevovy roviny a v [6] skorouspořádané afinní lokální ternární okruhy, které modelují skorouspořádané Klingenbergovy roviny. V předložené poznámce jsou zkoumány podrobněji vztahy mezi oběma algebraickými strukturami. Je přitom využito výsledků z [5].

Резюме

ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫЕ АФФИННЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ КОЛЬЦА И ПРЕУПОРЯДОЧЕННЫЕ БИТЕРНАРНЫЕ КОЛЬЦА

В [3] определяются преупорядоченные битернарные кольца, описывающие преупорядоченные Ельмслевовы аффинные плоскости и в [6] полуупорядоченные аффинные локальные тернарные кольца, описывающие полуупорядоченные плоскости Клингенберга. В предложенном замечании изучаются более подробно соотношения между этими алгебраическими структурами, при использовании результатов из [5].

LITERATUR

[1] B a c o n, P.Y.: Coordinatized Hjelmslev planes, Ph.D. thesis, University of Florida, Gainesville, Florida, 1974.

[2] B a c o n, P.Y.: An Introduction to Klingenberg Planes. Volume 1, Publised by P.Y.Bacon, 1976.

[3] B a k e r, C.A. - L a n e, N.D. - L a x t o n, J.A.A. - L o r i m e r, J.W.: Ordered Affine Hjelmslev Planes. Archiv der Mathematik.

[4] M a ch a l a, F.: Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math.Slovaca, 27, 1977, No.2, 181-193.

[5] M a ch a l a, F.: Biternärringe und affine lokale Ternärringe. Acta Univ.Pal.

[6] M a ch a l a, F.: Angeordnete affine lokale Ternärringe und angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen. Czech.Math. Journal, 30 (105), 1980, 556-568.

[7] M a ch a l a, F.: Fastgeordnete und geordnete affine Klingenbergsche Ebenen. Čas.pro pěst.mat. 106, 1981, 138-155.

[8] M a ch a l a, F.: Fastgeordnete und geordnete lokale Ringe und ihre geometrische Anwendung. Čas.pro pěst.mat. 106, 1981, 269-278.

RNDr. František Machala, CSc.
přírodovědecká fakulta UP
Leninova 26
771 46 Olomouc, ČSSR

AUPO, Fac.rer.nat. 94, Mathematica XXVIII, (1989), 11-25.