František Machala

Biternärringe und affine lokale Ternärringe

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 27 (1988), No. 1, 25--37

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120201`

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM
1988 MATHEMATICA XXVII VOL. 91

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Doc.RNDr. Jiří Rachůnek, CSc.

BITERNÄRRINGE UND AFFINE LOKALE TERNÄRRINGE

FRANTIŠEK MACHALA

(Vorgelegt am 30.April 1987)

P.Y.Bacon in [1] und der Verfasser in [2], [3] definierten algebraische Strukturen, die affine Klingenbergsche Ebenen beschrieben. Die vorliegende Note behandelt die Äquivalenz dieser Strukturen.

Im ersten Teil wird zuerst die Definition eines Biternärringes aus [1] zitiert und durch Definitionen 1´ - 5´ eine neue Struktur - ein unvollständiger Biternärring - eingeführt. In Sätzen 1 und 2 wird gezeigt, daß Biternärringe und unvollständige Biternärringe äquivalent sind. Dadurch ist auch die Frage der Abhängigkeit von Axiomen eines Biternärringes erklärt.

Im zweiten Teil wird die Definition eines affinen lokalen Ternärringes aus [3] zitiert und es wird bewiesen, daß (normierte) affine lokale Ternärringe, unvollständige Biternärringe und dadurch auch Biternärringe äquivalente Strukturen sind.

Definition 1. Es seien M eine Menge mit zwei verschiedenen bedeutsamen Elementen 0,1 und $T: M^3 \to M$, $T': M^3 \to M$ zwei Ternäroperationen. Das Tripel (M,T,T') heißt ein Biternär.

Definition 2. Es seien (M,T,T'), (Q,S,S') Biternäre mit bedeutsamen Elementen $0,1$ und $0',1'$. Eine Abbildung $\varphi: M \to Q$ heißt ein biternärer Homomorphismus, falls $\varphi T(x,m,d) = S(\varphi x, \varphi m, \varphi d)$, $\varphi T'(x,m,d) = S'(\varphi x, \varphi m, \varphi d)$ $\forall\, x,m,d \in M$ und $\varphi 0 = 0'$, $\varphi 1 = 1'$.

Definition 3. Es seien (M,T,T') ein Biternär und $\sim\varphi$ eine Äquivalenzrelation auf M. (M,T,T') is zu $\sim\varphi$ normal, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(B1) $T(0,m,d) = T(a,0,d) = d \quad \forall\, a,m,d \in M$,

(B2) $T(1,a,0) = T(a,1,0) = a \quad \forall\, a \in M$,

(B3) Sind a,b,m aus M, dann gibt es genau ein Element $z \in M$ mit $T(a,m,z) = b$.

(B4) Sind m,d,m',d' aus M mit $m \not\sim\varphi\, m'$, dann gibt es genau ein Element $x \in M$ derart, daß $T(x,m,d) = T(x,m',d')$.

(B5) Sind a,a',b,b' aus M mit $a \not\sim\varphi\, a'$, dann gibt es genau ein Paar $(m,d) \in M \times M$ derart, daß $T(a,m,d) = b$, $T(a',m,d) = b'$.

(B6) Sind m,d,u,v aus M mit $u \sim\varphi\, 0$, dann gibt es genau ein Paar $(x,y) \in M \times M$ derart, daß $y = T(x,m,d)$, $x = T'(y,u,v)$.

(B7) Für alle Elemente $m,u \in M$ gilt $T(u,m,0) = 1 \Longleftrightarrow T'(m,u,0) = 1$. Aus $T(u,m,0) = 1$, $T(a,m,e) = b$, $T'(b,u,v) = a$ folgt $T(x,m,e) = y \Longleftrightarrow T'(y,u,v) = x$ für alle Elemente $x,y \in M$.

(B8) Es gelten die Behauptungen (B1)′ - (B7)′, die wir durch Austauschung der Ternäroperationen T und T′ in (B1) - (B7) erhalten.

Definition 4. Ein Biternär (Q,F,F') heißt ein Biternärkörper, falls er zur identischen Äquivalenzrelation normal ist.

Definition 5. Es seien (M,T,T') ein Biternär, φ ein biternärer Homomorphismus von (M,T,T') auf einen Biternärkörper (Q,F,F') und $\sim\varphi$ die durch φ induzierte Äquivalenzrelation auf M, d.h. $a \sim\varphi\, b \Longleftrightarrow \varphi a = \varphi b$. (M,T,T') heißt ein Biternärring, falls er zu $\sim\varphi$ normal ist.

Definition 1´. Es seien M eine Menge mit zwei verschiedenen bedeutsamen Elementen $0,1$, $T\colon M^3 \to M$ eine Ternäroperation und $T_N\colon (M \times N \times M) \to M$ eine partielle Ternäroperation über M mit $N \subset M$. Das Tripel (M,T,T_N) heißt ein unvollständiger Biternär.

Definition 2´. Es seien (M,T,T_N), (Q,S,S_R) unvollständige Biternäre und $\varphi\colon M \to Q$ eine Abbildung mit $\varphi N = R$ und $\varphi T(x,m,d) = S(\varphi x, \varphi m, \varphi d)$ für alle $x,m,d \in M$, $\varphi T_N(a,b,c) = S_R(\varphi a, \varphi b, \varphi c)$ für alle $a,c \in M$, $b \in N$. Die Abbildung φ heißt ein Homomorphismus von (M,T,T_N) in (Q,S,S_R).

Definition 3´. Es seien (M,T,T_N) ein unvollständiger Biternär und $\sim\varphi$ eine Äquivalenzrelation auf M. (M,T,T_N) ist zu $\sim\varphi$ normal, falls $N = \{x \in M \mid x \sim\varphi\, 0\}$ und außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind:

(B1) - (B6)

$(B1)_1$ $T_N(a,0,d) = T_N(0,m,d) = d \quad \forall\, a,d \in M \quad \forall\, m \in N,$

$(B2)_1$ $T_N(1,a,0) = a \quad \forall\, a \in N,$

$(B3)_1$ Zu beliebigen Elementen $a,b \in M$, $m \in N$ gibt es genau ein $z \in M$ mit $T_N(a,m,z) = b$.

$(B4)_1$ Zu beliebigen Elementen $a,a',b,b' \in M$ mit $a \not\sim\varphi\, a'$, $b \sim\varphi\, b'$ gibt es genau ein Paar $(m,d) \in N \times M$ derart, daß $T_N(a,m,d) = b$, $T_N(a',m,d) = b'$.

Definition 4´. Ein unvollständiger Biternär (Q,F,F_R) heißt ein unvollständiger Biternärkörper, wenn er zur identischen Äquivalenzrelation der Menge Q normal ist.

Bemerkung. Wenn (Q,F,F_R) ein unvollständiger Biternärkörper ist, dann gilt nach Definition 3´ $R = \{0'\}$.

Definition 5´. Es seien (M,T,T_N) ein unvollständiger Biternär und $(Q,F,F_{\{0'\}})$ ein unvollständiger Biternärkörper. Dann (M,T,T_N) heißt ein unvollständiger Biternärring, falls ein Epimorphismus $\varphi\colon (M,T,T_N) \to (Q,F,F_{\{0'\}})$ existiert, so daß (M,T,T_N) zur Äquivalenzrelation $\sim\varphi$ mit $a \sim\varphi\, b \Leftrightarrow \varphi a = \varphi b$ normal ist.

Lemma 1. Es seien (M,T,T_N) ein unvollständiger Biternärring und $\varphi: (M,T,T_N) \to (Q,F,F_{\{0'\}})$ ein Epimorphismus aus Definition 5´. Sind 0,1 bzw. 0´,1´ bedeutsame Elemente von M bzw. Q, dann $\varphi 0 = 0'$, $\varphi 1 = 1'$. Aus $T(a,b,0) = 1$ folgt $a \not\sim_\varphi 0$ und $b \not\sim_\varphi 0$.

Beweis. Für die Elemente 0´,1´ sind die Bedingungen (B1) und (B2) in $(Q,F,F_{\{0'\}})$ erfüllt. Nehmen wir an, daß es ein anderes (B1) und (B2) erfüllendes Paar $(\bar{0},\bar{1})$ in Q gibt. Dann gilt $T(1',\bar{0},0') = \bar{0}$ und $T(1',\bar{0},0') = 0'$, also $0' = \bar{0}$. Nach (B2) ergibt sich $T(1',\bar{1},0') = \bar{1}$, $T(1',\bar{1},\bar{0}) = 1'$ und wegen $0' = \bar{0}$ auch $\bar{1} = 1'$. Es seien c´,d´ Elemente aus Q. Dann gibt es $c,d \in M$ mit $\varphi c = c'$, $\varphi d = d'$ und nach Definition von φ erhält man $F(\varphi 0,c',d') = F(\varphi 0, \varphi c, \varphi d) = \varphi T(0,c,d) = \varphi d = d'$. Gleichzeitig gilt $F(\varphi 1,c',\varphi 0) = \varphi T(1,c,0) = \varphi c = c'$ und $F(c',\varphi 1, \varphi 0) = c'$, woraus schon $\varphi 0 = 0'$ und $\varphi 1 = 1'$ folgt. Nehmen wir an, daß $T(a,b,0) = 1$ und zugleich $a \sim_\varphi 0$, also $\varphi a = 0'$ gilt. Aus diesen Annahmen folgt $\varphi T(a,b,0) = F(0', \varphi b, 0') = \varphi 1 = 1'$, was ein Widerspruch zu (B1) ist. Deswegen gilt $a \sim_\varphi 0$. Ganz ähnlich läßt sich auch $b \not\sim_\varphi 0$ beweisen.

Lemma 2. Es sei (M,T,T_N) ein unvollständiger Biternärring. Zu je drei Elementen $a,c,d \in M$ mit $a \not\sim_\varphi 0$ gibt es genau ein $b \in M$ mit $T(b,a,c) = d$ bzw. $T(a,b,c) = d$.

Beweis. Nach (B4) gibt es zu $a,c,0,d \in M$ genau ein $b \in M$ mit $T(b,a,c) = T(b,0,d) = d$. Nach (B5) gibt es zu $a,0,d,c \in M$ ein Paar (b,m) mit $T(a,b,m) = d$, $T(0,b,m) = c$. Wegen $T(0,b,m) = c$ ist nach (B3) $m = c$, woraus $T(a,b,c) = d$ folgt.

Satz 1. Ist (M,T,T') ein zu $\sim_\varphi$ normaler Biternärring und setzen wir $N = \{x \in M \mid x \sim_\varphi 0\}$, dann bildet (M,T,T_N) einen unvollständigen Biternärring.

Beweis. (M,T,T_N) bildet einen unvollständigen Biternär. In (M,T,T_N) sind die Forderungen (B1) - (B6), $(B1)_1$ - $(B3)_1$ offensichtlich erfüllt. Wir beweisen noch, daß in (M,T,T_N)

auch $(B4)_1$ gilt: Es seien $a, a', b, b' \in M$ mit $a \not\sim_\varphi a'$, $b \sim_\varphi b'$. Nach $(B5)'$ gibt es genau ein Paar $(m,d) \in M \times M$ mit $T'(a,m,d) = b$, $T'(a',m,d) = b'$. Wegen $b \sim_\varphi b'$ ergibt sich daraus $F'(\varphi a, \varphi m, \varphi d) = F'(\varphi a', \varphi m, \varphi d) = \varphi b$, also $F'(\varphi a, \varphi m, \varphi d) = F'(\varphi a, 0', \varphi b)$, $F'(\varphi a', \varphi m, \varphi d) = F'(\varphi a', 0', \varphi b)$. Die Voraussetzung $\varphi m \neq 0'$ widerspricht $(B4)'$, woraus sich $\varphi m = 0'$ und $m \in N$ ergibt. Nach Definition von T_N erhält man also $b = T'(a,m,d) = T_N(a,m,d)$ und $b' = T'(a',m,d) = T_N(a',m,d)$.

(Q,F,F') sei zu (M,T,T') gehöriger unvollständiger Biternärkörper. Bestimmen wir eine partielle Ternäroperation $F_{\{0'\}} : (Q \times \{0'\} \times Q) \rightarrow Q$ durch die Vorschrift $F_{\{0'\}}(a', 0', b') := F'(a', 0', b')$ $\forall\, a', b' \in Q$, dann ist $(Q,F,F_{\{0'\}})$ ein unvollständiger Biternärkörper und die Restriktion von φ auf (M,T,T_N) ist ein Epimorphismus von (M,T,T_N) auf $(Q,F,F_{\{0'\}})$. Daraus folgt, daß (M,T,T_N) ein unvollständiger Biternärring ist.

<u>Satz 2</u>. Aus jedem unvollständigen Biternärring (M,T,T_N) läßt sich durch geeignete Erweiterung von T_N einen Biternärring erzeugen.

<u>Beweis.</u> Es seien (M,T,T_N) ein unvollständiger Biternärring, $(Q,F,F_{\{0'\}})$ ein unvollständiger Biternärkörper und $\varphi : (M,T,T_N) \rightarrow (Q,F,F_{\{0'\}})$ ein Epimorphismus. Wir definieren eine neue Ternäroperation $T' : M^3 \rightarrow M$, wie folgt: Es sei $(a,b,c) \in M^3$. Gilt $b \in N$, dann setzen wir $T'(a,b,c) := T_N(a,b,c)$. Nehmen wir $b \notin N$, d.h. $b \not\sim_\varphi 0$ an. Nach Lemma 2 gibt es genau ein $b' \in M$ mit $T(b,b',0) = 1$ und nach Lemma 1 ist dabei $b' \not\sim_\varphi 0$. Wegen (B3) gibt es genau ein $c' \in M$ mit $T(c,b',c') = 0$ und wegen (B4) gibt es genau ein $d \in M$ mit $a = T(d,b',c')$. Wir setzen $T'(a,b,c) = d$.

Das Tripel (M,T,T') ist ein Biternär. Zunächst wollen wir zeigen, daß (M,T,T') zu $\sim_\varphi$ normal ist. Dies bedeutet, daß die Forderungen (B1) - (B7) und $(B1)'$ - $(B7)'$ aus Definition 3 erfüllt sind, wobei (B1) - (B6) in der Definition $3'$ bereits enthalten sind.

Zu (B1)'. Wegen $(B1)_1$ genügt es $T'(0,m,d) = d$ für $m \not\sim_\varphi 0$ zu beweisen. Bestimmen wir zu gegebenem Tripel $(0,m,d)$ Elemente m',d' mit $T(m,m',0) = 1$ und $T(d,m',d') = 0$, dann unmittelbar aus Definition von T' erhalten wir $T'(0,m,d) = d$.

Zu (B2)'. Wegen $(B2)_1$ gengt es $T'(1,a,0) = a$ für $a \not\sim_\varphi 0$ und $T'(a,1,0) = a$ für alle $a \in M$ zu beweisen.

a) Es sei $(1,a,0) \in M^3$ mit $a \not\sim_\varphi 0$. Setzen wir $T(a,a',0) = 1$, $T(0,a',c') = 0$, dann gilt $c' = 0$ und $T(a,a',c') = T(a,a',0) = 1$, woraus $T'(1,a,0) = a$ folgt.

b) Es sei $(a,1,0) \in M^3$. Setzen wir $T(1,m',0) = 1$, dann ist nach a) $m' = 1$. Aus $T(0,m',d') = 0$ folgt $d' = 0$, also $T(a,m',d') = T(a,1,0) = a$ und $T'(a,1,0) = a$.

Zu (B3)'. Wegen $(B3)_1$ befassen wir uns nur mit dem Fall $m \not\sim_\varphi 0$. Gegeben sei (a,m,b) mit $m \not\sim_\varphi 0$. Bestimmen wir $m' \in M$ mittels $T(m,m',0) = 1$, dann gibt es genau ein $z' \in M$ mit $T(b,m',z') = a$ und wegen $m' \not\sim_\varphi 0$ gibt es genau ein $z \in M$ mit $T(z,m',z') = 0$. Nach Definition von T' erhalten wir daraus $T'(a,m,z) = b$.

Zu (B4)'. Es seien $m,d,m',d' \in M$ mit $m \not\sim_\varphi m'$.

a) Nehmen wir $m \sim_\varphi 0$, also $m' \not\sim_\varphi 0$ an. Aus den Beziehungen $T(m',\overline{m},0) = 1$, $T(d',\overline{m},\overline{d}) = 0$ bestimmen wir die Elemente $\overline{m},\overline{d}$. Nach (B6) gibt es genau ein Paar $(x,r) \in M \times M$ mit $x = T(r,\overline{m},\overline{d})$ und $r = T'(x,m,d)$. Wegen $r = T'(x,m',d')$ gilt aber $T'(x,m,d) = T'(x,m',d')$.

b) Nehmen wir $m \not\sim_\varphi 0$ und $m' \not\sim_\varphi 0$ an. Zu $m,d \in M$ bzw. $m', d' \in M$ bestimmen wir die Elemente $\overline{m},\overline{d} \in M$ mit $T(m,\overline{m},0) = 1$, $T(d,\overline{m},\overline{d}) = 0$ bzw. $\tilde{m},\tilde{d}$ mit $T(m',\tilde{m},0) = 1$, $T(d',\tilde{m},\tilde{d}) = 0$. Aus $\overline{m} \sim_\varphi \tilde{m}$ erhalten wir $F(\varphi m, \varphi\overline{m},0') = F(\varphi m,0',1') = 1'$, $F(\varphi m',\varphi\overline{m},0') = F(\varphi m',0',1') = 1'$, was wegen $\varphi m \neq \varphi m'$ ein Widerspruch zu (B4) ist. Deswegen gilt $\overline{m} \not\sim_\varphi \tilde{m}$ und nach (B4) gibt es genau ein $r \in M$ mit $T(r,\overline{m},\overline{d}) = T(r,\tilde{m},\tilde{d}) = x$. Daraus unmittelbar folgt unser Ergebnis $T'(x,m,d) = T'(x,m',d')$.

Zu $(B5)'$. Es seien $a, a', b, b' \in M$ mit $a \not\sim_\varphi a'$.

a) Gilt $b \sim_\varphi b'$, dann $(B5)'$ folgt aus $(B4)_1$.

b) Es sei $b \not\sim_\varphi b'$. Nach (B5) gibt es genau ein Paar (m', d') mit $T(b, m', d') = a$, $T(b', m', d') = a'$. Wegen $a \not\sim_\varphi a'$ ist $m' \not\sim_\varphi 0$ und durch $T(m, m', 0) = 1$, $T(d, m', d') = 0$ sind die Elemente m, d eindeutig bestimmt. Aus der Definition von T' ergibt sich also $T'(a, m, d) = b$, $T'(a', m, d) = b'$.

Zu $(B6)'$. Es seien $m, d, u, v \in M$ mit $u \sim_\varphi 0$.

a) Gilt $m \sim_\varphi 0$, dann folgt unsere Behauptung aus (B6).

b) Es sei $m \not\sim_\varphi 0$. Dann gibt es $m', d' \in M$ mit $T(m, m', 0) = 1$ und $T(d, m', d') = 0$, wo $m' \not\sim_\varphi 0$ und folglich $m' \not\sim_\varphi u$ ist. Nach (B4) gibt es genau ein $y \in M$ mit $T(y, m', d') =$ $= T(y, u, v) = x$, woraus $y = T'(x, m, d)$, $x = T(y, u, v)$ folgt.

Zu (B7).

a) Es sei $T(u, m, 0) = 1$. Da nach Lemma 1 $u \not\sim_\varphi 0$ und $m \not\sim_\varphi 0$ gilt, gibt es nach Lemma 2 genau ein $u' \in M$ mit $T(u, u', 0) = 1$ und aus der Gleichheit $T(u, m, 0) = T(u, u', 0)$ folgt $m = u'$. Nach (B3) gibt es genau ein $k' \in M$ mit $T(0, u', k') =$ $= 0$ und nach (B1) ist $k' = 0$. Deshalb erhalten wir $m =$ $= T(1, m, 0) = T(1, u', k')$ und folglich $T'(m, u, 0) = 1$.

b) Es sei $T'(m, u, 0) = 1$. Bestimmen wir $u', k' \in M$ durch $T(u, u', 0) = 1$ und $T(0, u', k') = 0$, so gilt $T(1, u', k') = m$. Aus der Gleichheit $T(0, u', k') = 0$ ergibt sich $k' = 0$, woraus $m = T(1, u', k') = T(1, u', 0) = u'$ folgt. Daher $T(u, u', 0) = 1$ impliziert $T(u, m, 0) = 1$.

c) Nehmen wir an, daß $T(u, m, 0) = 1$, $T(a, m, e) = b$ und $T'(b, u, v) = a$ gilt. Setzen wir $T(u, u', 0) = 1$, $T(v, u', v') =$ $= 0$, dann aus $T'(b, u, v) = a$ folgt $T(a, u', v') = b$. Wegen $T(u, m, 0) = 1 = T(u, u', 0)$ ist $m = u'$ und aus $b = T(a, m, e) =$ $= T(a, u', v') = T(a, m, v')$ erhält man $e = v'$. Daher gilt die Äquivalenz $T(x, m, e) = y \Longleftrightarrow T(x, u', v') = y \Longleftrightarrow T'(y, u, v) = x$.

Zu $(B7)'$ Es sei $T'(u, m, 0) = 1$, $T'(a, m, e) = b$ und $T(b, u, v) = a$. Aus $T'(u, m, 0) = 1$ folgt nach (B7) $T(m, u, 0) = 1$. Bestimmen wir $m', e' \in M$ durch die Beziehungen $T(m, m', 0) = 1$ und $T(e, m', e') = 0$, dann gilt $T(b, m', e') = a$. Wegen

$T(m,u,0) = T(m,m',0) = 1$ ist $u = m'$ und $a = T(b,u,v) = T(b,u,e')$ hat zur Folge $v = e'$. Daher erhalten wir $T'(x,m,e) = y \Longleftrightarrow T(y,m',e') = x \Longleftrightarrow T(y,u,v) = x$.

Den unvollständigen Biternärkörper $(Q,F,F_{\{0'\}})$ erweitern wir auf den Biternärkörper ähnlich wie im Falle von (M,T,T_N): Es sei $(m,n,p) \in Q^3$. Gilt $n = 0'$, dann setzen wir $F'(m,0',p) := F_{\{0'\}}(m,0',p)$. Im Falle $n \neq 0'$ bestimmen wir schrittweise n',p',q aus Q mit $F(n,n',0') = 1'$, $F(p,n',p') = 0'$, $F(q,n',p') = m$ und setzen $q = F'(m,n,p)$. Das Tripel (Q,F,F') ist ein Biternär und es läßt sich leicht überprüfen, daß (Q,F,F') einen Biternärkörper bildet. Es bleibt noch beweisen, daß φ ein Epimorphismus von (M,T,T') auf (Q,F,F') ist: Es sei $T'(a,b,c) = d$ mit $b \not\psi_\varphi 0$. Nach unseren Verabredungen gilt $T(b,b',0) = 1$, $T(c,b',c') = 0$, $T(d,b',c') = a$ und folglich $F(\varphi b, \varphi b', 0') = 1'$, $F(\varphi c, \varphi b', \varphi c') = 0'$, $F(\varphi d, \varphi b', \varphi c') = \varphi d = \varphi T'(a,b,c)$. Nach Lemma 1 gilt außerdem $\varphi 0 = 0'$ und $\varphi 1 = 1'$.

Bemerkung. (M,T,T') sei ein Biternärring. Bestimmen wir nach Satz 1 einen zu (M,T,T') gehörigen unvollständigen Biternärring (M,T,T_N) und nach Satz 2 einen Biternärring (M,T,T'') zu (M,T,T_N), dann sind (M,T,T') und (M,T,T'') isomorph.

II

Definition I. Es seien M eine Menge und $t: M^3 \to M$ eine Ternäroperation. Das Paar (M,t) heißt ein Ternärring, wenn folgende Bedingungen gelten:

(K1) Es gibt zwei verschiedene Elemente $0,1$ aus M, so daß $t(0,a,b) = t(a,0,b) = b$, $t(1,a,0) = t(a,1,0) = a$ für alle a,b aus M gilt.

(K2) Zu $a,b,c \in M$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $t(a,b,x) = c$.

Definition II. Ein Ternärring (M,t) heißt ein Ternärkörper, wenn folgendes gilt:

(K3) Zu $a,b,c,d \in M$ mit $a \neq c$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $t(x,a,b) = t(x,c,d)$.

(K4) Zu $a,b,c,d \in M$ mit $a \neq c$ gibt es genau ein Paar $(x,y) \in M \times M$ mit $b = t(a,x,y)$ und $d = t(c,x,y)$.

Definition III. (M_1,t_1), (M_2,t_2) seien Ternärringe. Eine Abbildung φ der Menge M_1 auf die Menge M_2 heißt ein Epimorphismus von (M_1,t_1) auf (M_2,t_2), wenn $\varphi t_1(a,b,c) = t_2(\varphi a, \varphi b, \varphi c)$ für alle $a,b,c \in M_1$ gilt. Ein Epimorphismus φ ist ein Isomorphismus, wenn φ eine bijektive Abbildung von M_1 auf M_2 ist.

Definition IV. Es seien (M,t) ein Ternärring und N eine Teilmenge von M. Wir setzen $a \oplus r = t(1,a,r)$ für alle $a \in M$ und $r \in N$. N ist ein Ideal des Ternärringes (M,t), wenn folgendes gilt:

(i) $0 \in N$.

(ii) Gilt $b = a \oplus r$, so gibt es ein $r' \in M$ mit $a = b \oplus r'$.

(iii) Zu $a,b,c \in M$ und $r_1,r_2,r_3 \in N$ gibt es ein $r' \in N$ mit $t(a \oplus r_1,\ b \oplus r_2,\ c \oplus r_3) = t(a,b,c) \oplus r'$.

(iv) Gilt $t(a,b,x') = t(a,b,x) \oplus r$, so gibt es ein $r' \in N$ mit $x' = x \oplus r'$.

Satz I. Es sei N ein Ideal des Ternärringes (M,t) mit $N \neq M$. Setzen wir $\overline{a} = \{a \oplus r \mid r \in N\}$ und $M/N = \{\overline{a} \mid a \in N\}$, so ist M/N eine Zerlegung der Menge M. Setzen wir weiter $t'(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \overline{t(a,b,c)}$ für alle $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in M/N$, so ist $t'\colon (M/N)^3 \to M/N$ eine Ternäroperation und $(M/N,t')$ bildet einen Ternärring. Eine Abbildung $\varphi\colon M \to M/N$ mit $\varphi a = \overline{a}$ ist ein Epimorphismus des Ternärringes (M,t) auf $(M/N,t')$.

Satz II. Ist φ ein Epimorphismus eines Ternärringes (M_1,t_1) auf einen Ternärring (M_2,t_2), dann ist $N = \{a \in M_1 \mid \varphi a = \varphi 0\}$ ein Ideal von (M_1,t_1) mit $N \neq M_1$ und die Ternärringe $(M_1/N,t')$, (M_2,t_2) sind isomorph.

<u>Definition V</u>. Es sei (M,t) ein Ternärring und N ein Ideal von (M,t). Im Satz I beschriebener Ternärring $(M/N,t')$ heißt ein durch das Ideal N bestimmter Restklassen-Ternärring.

<u>Definition VI</u>. Es sei N ein Ideal des Ternärringes (M,t) mit $N \neq M$ und $(M/N,t')$ ein durch dieses Ideal bestimmter Restklassen-Ternärring. Das Ideal N heißt vollständig, wenn für beliebige Elemente $a,b,c,d \in M$ mit $\overline{a} \neq \overline{c}$ folgendes gilt:

(K3)'

a) Es gibt genau ein $x \in M$ mit $t(x,a,b) = t(x,c,d)$.

b) Gilt $t'(\overline{x},\overline{a},\overline{b}) = t'(\overline{x},\overline{c},\overline{d})$ und gleichzeitig $t'(\overline{x}',\overline{a},\overline{b}) = t'(\overline{x}',\overline{c},\overline{d})$, dann $\overline{x} = \overline{x}'$.

(K4)'

a) Es gibt ein Paar $(x,y) \in M \times M$ mit $b = t(a,x,y)$, $d = t(c,x,y)$.

b) Gilt $\overline{b} = t'(\overline{a},\overline{x},\overline{y})$, $\overline{d} = t'(\overline{c},\overline{x},\overline{y})$ und gleichzeitig $\overline{b} = t'(\overline{a},\overline{x}',\overline{y}')$, $\overline{d} = t'(\overline{c},\overline{x}',\overline{y}')$, dann $\overline{x}' = \overline{x}$ und $\overline{y}' = \overline{y}$.

<u>Satz III</u>. Ist N ein vollständiges Ideal des Ternärringes (M,t), dann $(M/N,t')$ bildet einen Ternärkörper.

Für Beweise von Sätzen I - III siehe [2].

<u>Definition VII</u>. Ein Ternärring, der ein vollständiges Ideal enthält, heißt ein lokaler Ternärring.

<u>Definition VIII</u>. Es seien (M,t) ein lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal N und $(M/N,t')$ ein durch das Ideal N bestimmter Restklassen-Ternärring. Unter einem (normierten) affinen lokalen Ternärring versteht man das Tripel (M,t,t_1), wobei t_1 eine Abbildung der Menge $M \times N \times M$ in M mit folgenden Eigenschaften ist:

(0) Für alle $a,d \in M$ und $m \in N$ gilt $t_1(a,0,d) = t_1(0,m,d) = d$, $t_1(1,m,0) = m$.

(1) Für alle $a,c \in M$ und $b \in N$ gilt $t_1(a,b,c) \in \overline{c}$.

(2) Zu $a,d \in M$, $b \in N$ gibt es genau ein $c \in M$ mit $d = t_1(a,b,c)$.

(3) Zu $a,b,c,d \in M$ mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} \neq \bar{d}$ gibt es genau ein Paar $(x,y) \in N \times M$ mit $a = t_1(b,x,y)$ und $c = t_1(d,x,y)$.

(4) Zu $a,b,d \in M$ und $c \in N$ gibt es genau ein Paar $(x,y) \in M \times M$ mit $y = t(x,a,b)$ und $x = t_1(y,c,d)$.

Satz IV. Unvollständige Biternärringe und (normierte) affine lokale Ternärringe sind äquivalente Strukturen.

Beweis. 1. Es seien (M,T,T_N) ein unvollständiger Biternärring, $(Q,F,F_{\{0'\}})$ ein unvollständiger Biternärkörper und $\varphi: (M,T,T_N) \to (Q,F,F_{\{0'\}})$ ein Epimorphismus aus Definition 5'. Wegen (B1), (B2), (B3) ist (M,T) ein Ternärring und wegen (B1) - (B5) zusammen mit Definition 4' ist (Q,F) ein Ternärkörper. Die Menge N aus Definition 3' bildet nach Satz II ein Ideal in (M,T) und der Restklassen-Ternärring $(M/N,T')$ ist zu (Q,F) isomorph, d.h. $(M/N,T')$ ist ein Ternärkörper. Nach (B4) und (B5) gelten in (M,T) die Forderungen (K3)' a) und (K4)' a); während (K3)' b) und (K4)' b) daraus folgen, daß $(M/N,T')$ ein Ternärkörper ist. Dies bedeutet, daß (M,T) ein lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal N ist.

Nun beweisen wir, daß in (M,T,T_N) die Forderungen (0) - - (4) aus Definition VIII gelten. Die Forderung (0) folgt unmittelbar aus $(B1)_1$ und $(B2)_1$. Es seien $a,c \in M$ und $b \in N$. Dann gilt $\varphi T_N(a,b,c) = F_{\{0'\}}(\varphi a, \varphi b, \varphi c) = F_{\{0'\}}(\varphi a, 0', \varphi c) = \varphi c$, also $T_N(a,b,c) \in \bar{c}$ und damit ist die Gültigkeit von (1) bewiesen. Die Forderungen (2), (3), (4) folgen unmittelbar aus $(B3)_1$, $(B4)_1$ und (B6). Dadurch ist bewiesen, daß (M,T,T_N) ein (normierter) affiner lokaler Ternärring ist.

2. Es sei (M,t,t_1) ein (normierter) affiner lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal N. (M,t,t_1) ist zugleich ein unvollständiger Biternär mit $t_N := t_1$. Nach Satz III stellt $(M/N,t')$ einen Restklassen-Ternärkörper mit bedeutsamen Elementen 0,1 dar. Formell definieren wir eine neue partielle Operation $t_1' : (M/N \times \{\bar{0}\} \times M/N) \to M/N$ durch die Vorschrift $t_1'(\bar{a},\bar{0},\bar{c}) = t'(\bar{a},\bar{0},\bar{c}) = \bar{c}$. Nach Definitionen 3', 4' läßt sich leicht überprüfen, daß $(M/N,t',t_1')$ ein unvollständiger Biter-

närkörper ist. Nach Satz I ist $\varphi: M \to M/N$ mit $\varphi a = \bar{a}$ für alle $a \in M$ ein Epimorphismus des Ternärringes (M,t) auf $(M/N,t')$, wobei $\varphi m = \bar{0}$ für alle $m \in N$ gilt. Nach (1) aus Definition VIII ergibt sich $\varphi t_1(a,b,c) = \overline{t_1(a,b,c)} = \bar{c} = t_1'(\varphi a, \bar{0}, \varphi c) = t_1'(\varphi a, \varphi b, \varphi c)$ und φ ist daher ein Epimorphismus von (M,t,t_1) auf $(M/N,t',t_1')$. Bestimmen wir durch φ eine Äquivalenzrelation $\sim_\varphi$ auf M, dann ist (M,t,t_1) zu $\sim_\varphi$ normal, weil $N = \{x \in M \mid x \sim_\varphi 0\}$ ist und folgende Implikationen gelten: (K1), (K2) $\Rightarrow$ (B1), (B2), (B3); (K3)' a), (K4)' a) $\Rightarrow$ (B4), (B5); (4) $\Rightarrow$ (B6); (0) $\Rightarrow$ $(B1)_1$, $(B2)_1$; (2) $\Rightarrow$ $(B3)_1$, (3) $\Rightarrow$ $(B4)_1$. Somit ist also bewiesen, daß (M,t,t_1) ein unvollständiger Biternärring ist.

LITERATUR

[1] B a c o n, P.Y.: An Introduction to Klingenberg Planes. Volume 1, Published by P.Y.Bacon 1976.

[2] M a ch a l a, F.: Erweiterte lokale Ternärringe. Czech. Math.J. 27 (102), 1977, 560-572.

[3] M a ch a l a, F.: Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math.Slovaca 27, No.2, 1977, 181-193.

BITERNÁRNÍ OKRUHY A AFINNÍ LOKÁLNÍ TERNÁRNÍ OKRUHY

Sounrn

P.Y.Baconová v [1] a autor ve [2], [3] definovali algebraické struktury popisující Klingenbergovy afinní roviny. Předložená poznámka je věnována ekvivalenci těchto struktur a v souvislosti s tím také otázce závislosti axiomů v definici biternárního okruhu z [1].

БИТЕРНАРНЫЕ КОЛЬЦА И АФФИННЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА

Резюме

П.И. Бейкм в /1/ и автор во /2/, /3/ определили алгебраические структуры, описывающие аффинные плоскости Клингенберга. Предложенное замечание занимается эквивалентностью этих структур и в связи с этим решается здесь тоже вопрос зависимости аксиом в определении битернарного кольца из /1/.

Author's address:
RNDr. František Machala, CSc.
přírodovědecká fakulta
Univerzity Palackého
Leninova 26
771 46 Olomouc
ČSSR /Czechoslovakia/

Acta UPO, Fac.rer.nat., Vol.91, Mathematica XXVII, 1988, 25- 37.