Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

Ján Andres; Jarosław Mikołajski; Jindřich Palát

Über die Trichotomie von Lösungen einer nichtlinearen Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 27 (1988), No. 1, 211--224

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120194`

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM
1988 MATHEMATICA XXVII VOL. 91

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky
přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Doc.RNDr. Jindřich Palát, CSc.

ÜBER DIE TRICHOTOMIE VON LÖSUNGEN EINER NICHTLINEAREN VEKTORDIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

JAN ANDRES, JAROSLAW MIKOLAJSKI* UND JINDŘICH PALÁT

(Eingelangt am 2.März 1987)

1. Einführung

Vor kurzem erzielte T. Ding [1 - 3] betrachtenswerte Ergebnisse über die Beschränktheit und Unbeschränktheit von Lösungen der Differentialgleichung des Duffingschen Typs

$$x'' + g(x) = p(t),$$

wo p(t) eine überall stetige periodische Funtion und g(x) eine überall stetig differentierbare Funktion ist. Konkret bewies er in [3] für das oberlineare Glied g(x), d.h.

$$\lim_{|x| \to \infty} g(x)/x = \infty ,$$

* Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej, Piotrowo 3A, 60-965 Poznań, Polska.

die Stabilität im Sinne von Lagrange für die gegebene Gleichung (als Antwort auf das Littlewoodsche Problem). In diesem Zusammenhang erhebt sich die Frage, ob auch umgekehrt bei

$$\liminf_{|x|\to\infty} g(x)\operatorname{sgn} x > 0, \qquad \max_{t\in R^+} |p(t)| < \infty$$

wenigstens eine beschräkte Lösung der untersuchten Gleichung existiert. Diese Frage wurde bereits in [4] bejaht und dies für die nichtlineare Gleichung vom Jacobischen Typ

$$x'' + q(t)x = p(t,x),$$

wo q(t) überall stetige Funktionen sind, und vorausgesetzt es gebe solche positive Konstanten q,Q, dass

$$\limsup_{|x|\to\infty} \left|\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right| < q \leq -q(t) \leq Q.$$

Es bleibt noch zu bemerken, dass es uns in [4] keineswegs um das allgemeinste Ergebnis mit Rücksicht auf die rechte Seite p(t,x) ging, sondern wir bemühten uns, die asymptotisch dominante Rolle des Trägers q(t) aufrechtzuerhalten, und die rechte Seite wurde als die maximal mögliche Perturbation aufgefasst (daraus folgt auch die Charakteristik der Gleichung in [4]).

Wie weiter unten bewiesen wird, lässt sich die Methode aus [5], die zur Lösung der diesbezüglichen asymptotischen Randwertaufgabe in [4] angewendet wurde, auch mit Erfolg zur Lösung der allgemeineren (sogar vektoriellen) Differentialgleichung (1) verwerten, wo $X = (x_1,\dots,x_n)$, $F = (f_1,\dots,f_n)^T$, und dies unter den Voraussetzungen (2), (3).

Dieses Ergebnis stimmt teilweise mit der Behauptung in [6] für die Skalargleichung (1) überein, wo ausser anderem unter mehr beschränkenden Voraussetzungen (insbesondere Monotonie) die Existenz der beschränkenden Lösungen mit vorausgegeben Anfangswert bewiesen wurde. Überdies wurden manche

Ergebnisse der Lösungen der klassischen Kneserschen Aufgabe weiter verallgemeinert (neben [6] und die Verweise in [6], siehe hierzu eine etwas neuere Arbeit [7]).

Im Anschluss hieran werden einige jüngste Behauptungen in [8] eng angeknüpft. Hier wurde die Skalargleichung (1) als Spezialfall der (nichtkonservativen) Liénardschen Gleichung betrachtet, wobei die genügenden Lösbarkeitskriterien in bezug auf (1) trotz der Annäherungsverschiedenheit sich mit unseren in hohem Masse decken. Von den übrigen (nicht vielen) Ergebnissen, die sich auf die Lösung von verwandten asymptotischen Randwertaufgaben für (1) beziehen, seine noch die Beiträge [9 - 11] und [14] erwähnt.

Wie wir sehen werden, lässt sich über die Qualität der Lösungen der untersuchten Gleichung bei Erfüllung der Bedingungen (2), (3) noch viel mehr sagen.

2. Die Existenz der beschänkten Lösung

Betrachten wir also die Vektorgleichung

$$X'' = F(t,X), \qquad (1)$$

wo $F(t,X):R_0^+ \times R^n \longrightarrow R^n$ stetig differenzierbar und folgendermassen beschränkt

$$\|F(t,X)\| \leq F, \qquad (2)$$

für $\|X\| \leq R$ ist, wobei $P,R \in R^+$ und $\|X\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sup\limits_{t \in R_0^+} |x_i(t)|$.

Bemerkung 1. Aus Formalgründen schreiben wir bei jeder Komponente $f_i(t,X)$ der Vektorfunktion $F(t,X)$ ein Argument x_i als das erstfolgende nach t und die übrigen Argumente schreiben wir zusammenfassend z_i, wo $z_i = (\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots) \in R^{n-1}$.

Im weiteren wird die Vektorfunktion $F(t,X)$ angenommen, dass ihre Komponenten den Bedingungen

$$\liminf_{|x_i|\to\infty} f_i(t,x_i,z_i)\operatorname{sgn} x_i > 0, \quad i=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

in bezug auf $(t,z_i)\in R_0^+\times R^{n-1}$ gleichmässig entsprechen.

<u>Bemerkung 2</u>. Aus (3) ergibt sich die Existenz von solchem $R\in R^+$, dass für $|x_i|>R$

$$f_i(t,x_i,z_i)\operatorname{sgn} x_i > 0 \tag{4}$$

für jedes $i=1,2,\dots,n$ unabhängig von $(t,z_i)\in R^+\times R^{n-1}$ wird. Im weiteren wird R durchweg im Sinne von (4) aufgefasst.

<u>Bemerkung 3</u>. Die Gleichung (1) kann in ein System von zweien Vektorfunktionen

$$X' = Y,$$
$$Y' = F(t,X)$$

umgeschrieben werden, welche in die Komponenten zerlegt, das System von 2n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung determinieren, das unter unseren Voraussetzungen die Methode von [5] zu verwenden ermöglicht. Auf Grund dieser Methode und unter der Voraussetzung (3) wird die Existenz wenigstens einer beschränkten Lösung von (1) gesichert, falls hier alle die Randwertaufgaben

$$X(0) = X(T), \qquad X'(0) = X'(T) \tag{5}$$

erfüllenden Lösungen $X(t)$, wo $T\in(0,\infty)$, mitsamt ihren Ableitungen $X'(t)$ a priori gleichmässig beschränkt sind.

<u>Lemma 1</u>. Unter der Voraussetzung (2) ergibt sich aus derselben Beschränktheit aller Lösungen $X(t)$ der Gleichung (1) durch die Konstante R, d.h. $\|X(t)\|\le R$, dieselbe Beschränktheit aller ihren Ableitungen.

<u>Beweis.</u> Wir wenden die für die Funktionen $X\in C^2$ gültige Landausche Ungleichheit

$$\|x'\|^2 \leqq 4\|x\|\,\|x''\|$$

an. Löse $X(t)$ die Gleichung (1). Dann ergibt sich aus (3)

$$\|X'(t)\|^2 \leqq 4\|X(t)\|\,\|X''(t)\| = 4\|X(t)\|\,\|F(t,X(t))\| \leqq 4RF,$$

was die Behauptung von Lemma 1 beweist.

Lemma 2. Es gelte (3). Dann ist jede Lösung der Randwetaufgabe (1), (5), die die Bedingung $\|X(0)\| \leqq R$ erfüllt, im Intervall $\langle 0,T\rangle$ beschränkt durch dieselbe Konstante, die nicht von T abhängt.

Beweis. a) Ist die Lösung der Randwertaufgabe (1), (5) konstant, $X(t) = X(0)$ für $t \in \langle 0,T\rangle$, dann gibt es nicht zu beweisen.
b) Lassen wir zu, dass $\|X(t_0)\| > R$ ist für $t_0 \in (0,T)$. Dann existiert wenigstens eine solche Komponente $x_i(t)$ der Lösung von (1), (5), dass

$$|x_i(t_0)| > R \tag{6}$$

gilt. Es sei zur Bestimmtheit $x_i(t_0) > R$ (der Fall $x_i(t_0) < -R$ würde analog betrachtet). Wegen $x_i(0) < R$ und $x_i(t_0) > R$ gibt es solche Punkte $0 < t_1 < t_0 \leqq t_2 < T$, dass $x_i(t_1) = R$, $x_i'(t_1) \geqq 0$ und $x_i(t) > R$ für $t \in (t_1,t_2\rangle$. Hieraus sieht man, dass der Graph der Funktion von einem Punkt (t_1,R) der Halbebene $x > R$ als eine nichtfallende Kurve ausgeht, die im Intervall $(t_1,t_2\rangle$ konvex ist, was daraus folgt, dass nach (4)

$$x_i''(t) = f_i(t,x_i(t),\ z_i(t)) > 0 \quad \text{für } t \in (t_1,t_2\rangle$$

gilt. Dann kann aber auch nicht im weiteren Verlauf der Graph der Funktion $x_i(t)$ im Intervall (t_2,T) unter den Punkt $(t_2,x_i(t_2))$ fallen, $x_i(t_2) > R$, denn es müsste wegen der Glättung der Funktion $x_i(t)$ ein Inflexionspunkt existieren, was in bezug auf (4) nicht eintreten kann. Dann könnte auch nicht $x_i(0) = x_i(T)$ gelten. Dieser Widerspruch zeigt, dass es für die Komponenten der Randwertaufgabe (1), (5) und $\|X(0)\| \leq R$ keinen Punkt $t_0 \in (0,T)$ derart gibt, damit wenigstens für eine Komponente $x_i(t)$ die Ungleichheit (6) gelte.

Satz 1. Es gelten die Voraussetzungen (2) und (3). Dann existiert wenigstens eine unbeschränkte Lösung der Gleichung (1).

Beweis. Nach Lemma 2 ist jede die Anfangsbedingung $\|X(0)\| \leq R$ erfüllende Lösung $X(t)$ der Randwertaufgabe (1), (5) durch gleiche von T unabhängige Konstante R beschränkt, d.h.

$$\|X(t)\| \leq R \qquad \text{für} \quad t \in \langle 0,T \rangle , \qquad T \in R^+.$$

Nun wollen wir zeigen, dass die Menge aller Lösungen der Randwertaufgabe (1), (5) durch Lemma 2 bestimmt ist, d.h. jede solche Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $\|X(0)\| \leq R$.

Tatsächlich. Betrachten wir eine beliebige die Anfangsbedingung $\|X(0)\| > R$ erfülllende Lösung von (1). Hieraus ergibt sich die Existenz von wenigstens einer Komponente $x_i(t)$ von dieser Lösung, für die die Ungleichheit $|x_i(0)| > R$ gilt. Zur Bestimmtheit beschränken wir uns wieder auf $x_i(0) > R$. Aus der Glättung der Funktion $x_i(t)$ folgt die Existenz einer solchen Zahl t_1, $0 < t_1 < T$, dass $x_i(t) > R$ für $t \in \langle 0, t_1)$. Aus (4) ergibt sich dann

$$x_i''(t) = f_i(t, x_i(t), z_i(t)) > 0 \qquad \text{für } t \in \langle 0, t_1).$$

Also, der Graph der Funktion $x_i(t)$ geht von dem Punkt $(0, x_i(0))$ aus. Er liegt über der Geraden $x_i = R$ als eine konvexe Kurve und solange über dieser Geraden liegt, ist er stets konvex. Träte diese Kurve in den Punkt $(T, x_i(T)) = (T, x_i(0))$ ein, $x_i(0) > R$, dann als eine konvexe Kurve, und $x_i(0) = x_i(T)$ würde nicht gelten, denn $x_i'(0) < 0$ und $x_i'(t) > 0$. Falls also $X(t)$ die Lösung der Randwertaufgabe (1), (5) ist, dann notwendig $\|X(0)\| \leq R$. Hiervon und mit Rücksicht auf die Bemerkung 3 folgt die Satzaussage.

Bemerkung 4. Die Gleichung (1) kann auch unbeschränkte durch die Anfangsbedingung $\|X(0)\| \leqq R$ bestimmte Lösungen haben (siehe dazu ein Beispiel am Ende dieses Beitrages).

3. Über die Existenz einer Klasse von unbeschränkten Lösungen

Satz 2. Es gelte (3) und $X(t)$ sei eine Lösung von (1) derart, dass

1) $\|X(t_0)\| > R$, $t_0 \in (0, \infty)$,

2) für jede Komponente $x_i(t)$ der Lösung $X(t)$, welche die Ungleichheit $|x_i(t)| > R$ erfült, gilt

$$x_i'(t_0)x_i(t_0) \geqq 0, \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{7}$$

Dann $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t)\| = \infty$.

Beweis. Wir beschränkten uns wieder auf den Fall $x_i(t_0) > R$. Aus der Glättung der Funktion $x_i(t)$ folgt die Existenz einer solchen Zahl $t_1 > t_0$, dass

$$x_i(t) > R \qquad \text{für} \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Das Intervall $\langle t_0, t_1)$ reduzieren wir soviel, damit sich aus den Ungleichheiten (4) und (7)

$$x_i(t) > R,\ x_i'(t) \geqq 0,\ x_i''(t) > 0,\ t \in \langle t_0, t_1) \tag{8}$$

ergäbe. Aus den Ungleichheiten (8) folgt, dass der Graph der Funktion $x_i(t)$ von dem Punkt $(t_0, x_i(t_0))$ als nichtfallende Kurve ausgeht, die im Intervall $\langle t_0, t_1)$ konvex ist, wobei $x_i(t_1) > x_i(t_0) > R$ und daher im weiteren Verlauf notwendig wächst, denn wegen der Glättung der Funktion $x_i(t)$ und wegen der Gültigheit der Bedingung (4) kann sie keine Inflexpunkte haben oder kann sie keine konstante Funktion sein.

4. Monotonie der Lösungen

Satz 3. Es gelte (2) für $\|X\| \leq R_1$, $R < R_1$, und (3). Sei $X(t)$ die beschränkte Lösung von (1) derart, dass

$$\|X(t)\| < R_1, \quad \|X(t_0)\| > R, \qquad t_0 \in \langle 0, \infty) \tag{9}$$

Dann tritt für jede Komponente $x_i(t)$ der Lösung $X(t)$ von (1) eine von den folgenden Möglichkeiten ein:

a) $x_i(t)$ ist beschränkt und liegt im Band (R, R_1) $((-R_1, R))$ und $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = \inf\limits_{t\in R^+}\{x_i(t)\}$ $(\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = \sup\limits_{t\in R^+}\{x_i(t)\})$,

b) $x_i(t)$ ist beschränkt und es gibt eine Konstante $T_i \in (t_0, \infty)$ derart, dass $R < x_i(t) < R_1$ $(-R_1 < x_i(t) < -R)$ und $x_i'(t)x_i(t) < 0$ für $t \in \langle 0, T_i)$, $-R < x_i(t) < R$ und $|x_i''(t)| \leq F$ für $t \in \langle T_i, \infty)$.

Beweis. ZurBestimmtheit beschränken wir uns wieder auf die Beschränkt heit $x_i(t_0) > R$. Es folgt dann aus (5) dass $x_i''(t_0) > 0$. Es wird danach notwendig $x_i'(t_0) < 0$, denn wäre $x_i'(t_0) \geq 0$, dann müsste $x_i'(t_0)x_i(t_0) \geq 0$ und $x_i(t_0) > R$, was die Bedingungen (7) aus Satz 2 sind. Als Folfe dieses Satzes müsste

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \infty$$

gelten im Widerspruch zur Voraussetzung (9). Es gibt also $x_i(t_0) > R$ und $x_i'(t) < 0$, woraus sich ergibt, dass der Graph der Funktion $x_i(t)$ in den Punkt $(t_0, x_i(t_0))$ als eine fallende Kurve eintritt. Aus der Glättung der Funktion $x_i(t)$ folgt die Existenz des Punktes t_1, $0 < t_1 < t_0$, derart, dass $x_i(t) > R$ und $x_i'(t) < 0$ für $t \in \langle t_1, t_0)$.

Aus diesen Ungleichheiten ersieht man, dass der Graph der Funktion $x_i(t)$ für $t \in \langle 0, t_1)$ keine kleineren Werte als $x_i(t_1) > R$ annehmen kann, denn wegen der Glättung der Funktion $x_i(t)$ müsste im Intervall $\langle 0, t_1)$ einen Inflexionpunkt geben, was wegen (5) nicht möglich ist. Wegen (4) wird es auch nicht statthaft, dass die Funktion $x_i(t)$ konstant ware in irgendeinem Intervall, das im $\langle 0, \infty)$ liegt.

Zusammenfassend erkennt mann, dass der Graph der Funktion $x_i(t)$ vom Punkt $(0, x_i(0))$, $x_i(0) > R$, als eine fallende konvexe Kurve ausgeht, die den Punkt $(t_0, x_i(t_0))$, $x_i(t_0) > R$, durchgeht und im weiteren Verlauf die Gerade $x_i = R$ schneidet oder nicht.

Falls der Graph der Funktion $x_i(t)$ stets über der Gerade $x_i = R$ liegt, dann ist er konvex und notwendig

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = \inf_{t \in R^+} \{ x_i(t) \} .$$

Nehmen wir an, dass der Graph der Funktion $x_i(t)$, $x_i(t_0) > R$, die Gerade $x_i = R$ im Punkt $T_i \in R^+$ schneidet. Es gibt also

$$x_i(T_i) = R, \quad x_i(t) > R, \quad t \in \langle 0, T_i)$$

und aus (4) erhalten wir, dass $x_i''(t) > 0$ für $t \in \langle 0, T_i)$. Wie wir sehen tritt der Graph der Funktion $x_i(t)$ in den Punkt $(T_i, x_i(T_i))$ als eine nichtwachsende konvexe Kurve ein. Wir wollen zeigen, dass in diesem Fall dieser Graph nicht mehr von dem Streifen $\langle -R, R \rangle$ ausgeht.

Tatsächlich. Träte der Graph der Funktion $x_i(t)$ in die Halbebene $x_i > R$ $(x_i < -R)$ aus, dann würde ein Punkt $t_2 > T_i$ derart existieren, dass

$$x_i(t_2) > R \quad (x_0(t_2) < -R), \quad x_i'(t_2) \geq 0 \quad (x_i'(t_2) \leq 0)$$

und daraus

$$|x_i(t_2)| > R, \quad x_i'(t_2) x_i(t_2) \geq 0.$$

So wären die Bedingungen (7) des Satzes 2 erfüllt sein, was bedeuten würde, dass $x_i(t)$ eine unbeschränkte Funktion ist. Dies wäre im Widerspruch mit der Voraussetzung (9). Der Punkt t_2 kann nicht existieren und daher tritt der Graph der Funktion $x_i(t)$ vom Streifen $\langle -R,R \rangle$ aus. Es ergibt sich aus der Voraussetzung des Satzes, dass für jede Komponente $x_i(t)$ $|x_i(t)| \leq R_1$ ist. Hiervon wegen (3) erhalten wir

$$|x_i''(t)| = |f_i(t,X(t))| \leq \|F(t,X(t))\| \leq F,$$

was zu beweisen war.

5. Beispiel

Betrachten wir die Gleichung

$$x'' = x + e^{-t}, \tag{10}$$

$(t,x) \in R_0^+ \times R^1$ und lösen wir die Randwertaufgabe

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \tag{11}$$

Die allgemeine Lösung von (10) ist der Form

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}$$

und die Lösung der Randwertaufgabe (10), (11) der Form

$$x(t) = (1-e^{-T})e^t/4(1-e^T) - Te^{-T}e^{-t}/2(1-e^{-T}) - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}. \tag{12}$$

Die rechte Seite der Gleichung (10) entspricht den Bedingungen (2) und (3), denn

$$|x + e^{-t}| \leq |x| + 1 \leq R + 1 = F \quad \text{für } |x| \leq R$$

und

$$(x + e^{-t})\operatorname{sgn} x > 0 \quad \text{für } |x| > 1.$$

Die Abhängigkeit der Anfangsbedingung x(0) vom Parameter T lässt sich folgendermassen ausdrücken

$$x(0) = (1 - e^{-T})e/4(1 - e^{T}) - Te^{-T}/2(1 - e^{-T}) - \frac{1}{4},$$

woraus sich ergibt, dass $x(0) \in \langle -\frac{1}{4}, 1)$ für $T \in (0, \infty)$. Also, die Randwertaufgabe (10), (11) hat die Lösung nur für die Anfangswerte $x(0) \in \langle -\frac{1}{4}, 1)$.

Übergehen wir in (12) zum für den Parameter T unbeschränkt wächsenden Grenzwert, erhalten wir die Funktion

$$\bar{x}(t) = \lim_{T \to \infty} x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}, \tag{13}$$

die die beschränkte Lösung von (10) darstellt.

Deduzieren wir die Form der Lösung von (10), die von den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = x_1$ abhängt, erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{4}(2x_0 + 2x_1 + 1)e^{t} + \frac{1}{2}(x_0 - x_1)e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

Hiernach sehen wir, dass bei der Wahl der Anfangsbedingungen

$$2x_0 + 2x_1 + 1 \neq 0,$$

wird sich um die unbeschränkte Lösung handeln und für

$$x_0 + x_1 = -\frac{1}{2}$$

wird sich um eine beschränkte Lösung

$$x(t) = x_0e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}$$

handeln, wo für $x_0 = -\frac{1}{4}$ die in (13) gefundene Lösung enthalten ist.

6. Schlussbemerkungen

Bemerkung 5. Es ist klar, dass unter den Voraussetzungen (2), (3) für die Lösung X(t) vom System (1) keine anderen Möglichkeiten, als die in den Sätzen 1 - 3 gegebenen, eintereten können (hiervon auch der Titel des Beitrages).

Bemerkung 6. In bezug auf die a priori gestellten Abschätzungen ist es nicht schwer nachzuweisen, dass die Bedingung (3) oder (4) sich durch etwas allgemeinere Ungleichheiten

$$f_i(t,R,z_i) > 0, \quad f_i(t,-R,z_i) < 0 \qquad (i = 1,\dots,n)$$

ersetzen lässt, die mit Rücksicht auf t und z_i gleichmässig gelten.

Bemerkung 7. Aus denselben Gründen lassen sich die erzielten Resultate auch für die Gleichung

$$X'' = F(t,X,X')$$

verallgemeinern und dies dadurch, dass die Bedingung (2) durch die Voraussetzungen

$$|f_i(t,X,x_i',z_i')| \leq P(x_i') \quad \text{für } \|X\| \leq R \qquad (i = 1,\dots,n)$$

mit den stetigen, die Nagumovsche Bedingung erfüllenden Funktionen P(y), ersetzt wird (siehe [13]).

LITERATUR

[1] D i n g, T.: Unbounded solutions of conservative oscillations under roughly periodic perturbations. Chin. Ann.Math. B5, 4, 1984, 687-694.

[2] D i n g, T.: Boundedness of solutions of Duffing's equation. J.Diff.Eqns 61, 2, 1986, 178-207.

[3] D i n g, T.: An answer to Littlewood's problem on boundedness for super-linear Duffing's equation. Preprint, 1986.

[4] A n d r e s, J. und P a l á t, J.: Über die Existenz einer begrenzten und periodischen Lösung der nichtlinearisierte Jacobischen Gleichung mit negativ Definitivem Träger. Acta UPO 88, Math.26, 1987 (im Druck).

[5] A n d r e s, J.: A useful proposition to nonlinear differential systems with a solution of the prescribed properties. Acta UPO 85, Math. 25, 1986, 157-164.

[6] B e b e r n e s, J.W. and J a c k s o n, L.K.: Infinite interval boundary value problems for $y'' = f(x,y)$. Duke Math.J. 34, 1, 1967, 39-48.

[7] K i g u r a d z e, I.T.: On the non-negative non-increasing solutions of non-linear second order differential equations. Ann.Math.Pura Appl. 4, 81, 1969, 162-192.

[8] A b d u v a i t o v, Ch.: Někotorye dostatočnye uslovija suščestvovanija periodičeskich i ograničennych rešenij nělinějnych differencialnych uravněnij vtorogo porjadka. Diff.Urav. 21, 12, 1985, 2027-2036.

[9] J a c k s o n, L.: Subfunctions and second order ordinary differential inequalities. Adv.Math. 2, 1968, 307-363.

[10] B e r n f e l d, S.R. and L a k s h m i k a n t h a m, V.: An introduction to nonlinear boundary value problems. Academic Press, Inc., New York - London 1974, 44-46.

[11] S ch r a d e r, K.: Second and third order boundary value problems. Proceed.Amer.Math.Soc. 32, 1972, 247-252.

[12] H i l l e, E.: On the Landau - Kallman - Rota inequality. J.Approx.Theory 6, 1972, 117-122.

[13] H a r t m a n, P.: Ordinary differential equations, Wiley, New York, 1964, 429.

[14] G r a n a s, A. - G u e n t h e r, R.B. - L e e, J.W. and O'R e g a n, D.: Boundary value problems on infinite intervals and semiconductor devices. J.Math.Anal.Appl. 116, 2, 1986, 335-348.

O TRICHOTOMII ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍ VEKTOROVÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

Souhrn

Metodou práce [5] je dokázána existence alespoň jednoho konstantou R (viz Poznámka 2) absolutně ohraničeného řešení vektorové rovnice (1) při současné existenci celé třídy určitě divergentních řešení. Dále je ukázáno, že rovnice (1) může

mít ještě pouze (případně nestejně) ohraničená řešení, která jsou od počátku monotonní na intervalech alespoň konečné délky.

ОБ ТРИХОТОМИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ВЕКТОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВТОРОГО ПОРЯДКА

Резюме

Методом работы [5] доказано существование хотя бы одного постоянной R (см. Замечание 2) абсолютно ограниченного решения векторного уравнения (1) при одновременном существовании целого класса определенного дивергентных решений. Далее показано, что уравнение (1) допускает еще только (по случаю неодинако) ограниченные решения, которые от начала монотонные на интервалах конечной длины.

Author s address:
RNDr. Jan Andres, CSc.
přírodovědecká fakulta
Univerzity Palackého
Gottwaldova 15
771 46 Olomouc
ČSSR /Czechoslovakia/

Acta UPO, Fac.rer.nat., Vol.91,Mathematica XXVII,1988,211-224.