

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica

František Machala

Zur Existenz eines Ordnungsverhältnisses auf der affinen Ebene

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 24 (1985), No. 1, 15--29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/120159>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1985

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci
 Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Ladislav Sedláček, CSc.*

ZUR EXISTENZ EINES ORDNUNGSVERHÄLTNISSSES
 AUF DER AFFINEN EBENE

FRANTIŠEK MACHALA

Vorgelegt am 30. April 1984

In der vorliegenden Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Ordnungsverhältnisses auf der affinen Ebene gefunden.

Vorgegeben sei eine affine Ebene $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ (siehe etwa [3]). Eine durch verschiedene Punkte $P, Q \in \mathcal{P}$ bestimmte Gerade $p \in \mathcal{L}$ bezeichnen wir mit $p = PQ$ und mit $P = p \cap q$ bezeichnen wir den Schnittpunkt P der Geraden p, q mit $p \parallel q$. Das Symbol $L(A, a)$ bedeutet eine Parallele zur Geraden a durch einen Punkt A . Es sei ein Koordinatensystem von \mathcal{A} , d. h. ein Tripel (x, y, E) mit $x, y \in \mathcal{L}$, $E \in \mathcal{P}$ und $x \parallel y$, $E \notin x, y$, gegeben. Wir setzen $O = x \cap y$, $e = OE$, $R = e \setminus \{O\}$ und definieren auf der Menge R eine binäre Operation \cdot nach [3], [4]. Dann ist $\mathcal{R} = (R, \cdot)$ eine Loop mit Einselement E .

Wir nehmen an, daß auf jeder Menge $p \setminus \{P\}$ mit $P \in \mathcal{P}$, $p \in \mathcal{L}$ und $P \in p$ eine

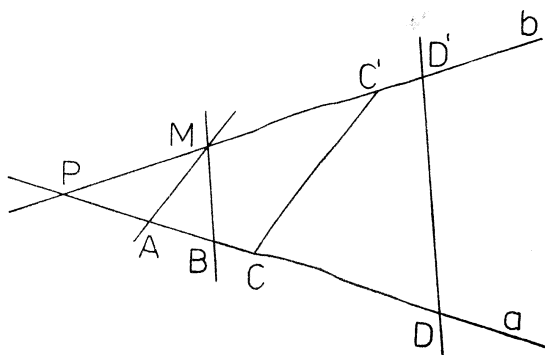


Fig. 1

Äquivalenzrelation $\varrho(p, P)$ gegeben ist. Eine Klasse von $\varrho(p, P)$, die einen Punkt X enthält, bezeichnen wir mit $\varrho_X(p, P)$. Wir betrachten die folgenden Behauptungen (P1)–(P5):

(P1) $\varrho(e, O)$ ist eine Kongruenz auf der Loop \mathcal{B} .

(P2) Es seien $P \in \mathcal{P}$, $p \in \mathcal{L}$ mit $P \in p$ gegeben und sei φ eine Parallelprojektion der Geraden p auf eine Gerade a . Aus $U \in \varrho_X(p, P)$ folgt $\varphi(U) \in \varrho_{\varphi(X)}(a, \varphi(P))$.

(P3) Es seien a, b zwei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt P und seien $A, B, C, D \in a$, $M, C', D' \in b$ von P verschiedene Punkte mit $AM \parallel CC'$, $BM \parallel DD'$ und $A \in \varrho_B(a, P)$, $C \in \varrho_D(a, P)$ (Fig. 1). Dann gilt $C' \in \varrho_{D'}(b, P)$.

(P4) Es seien a, b, c drei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt P und seien $A, A' \in a$, $B, X, Y \in b$, $C, C' \in c$ von P verschiedene Punkte mit $AC \parallel A'C'$, $AB \parallel A'X$ und $BC \parallel C'Y$ (Fig. 2). Dann gilt $X \in \varrho_Y(b, P)$.

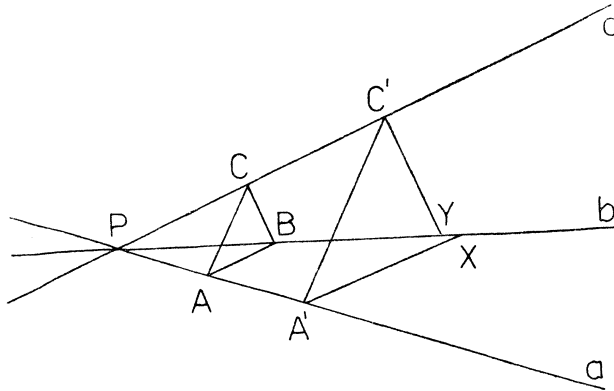


Fig. 2

(P5) Es seien a, b, m drei verschiedene Geraden, wobei a, m bzw. b, m einen Punkt P bzw. O gemeinsam haben (Fig. 3). Ferner seien $M, N, \bar{M}, \bar{N} \in m$, $M_1, M_2, N_1, N_2 \in a$, $M'_1, M'_2, N'_1, N'_2, X \in b$ von P, O verschiedene Punkte mit $MM_1 \parallel NN_1$, $MM_2 \parallel NN_2$, $m \parallel MM'_1 \parallel M_2M'_2 \parallel N_1N'_1 \parallel N_2N'_2$, $\bar{M}M'_1 \parallel \bar{N}N'_1$, $\bar{M}M'_2 \parallel \bar{N}N'_2$. Dann gilt $X \in \varrho_{N'_2}(b, O)$.

Satz 1. Es seien a, b, c drei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt P und seien $A, A' \in a$, $C, C' \in c$, $B, D, B', X, Y \in b$ von P verschiedene Punkte mit $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'X$, $AD \parallel A'Y$. Gelten (P2), (P4), dann ist $X \in \varrho_Y(b, P)$.

Beweis. Setzen wir $U = L(A', AC) \cap c$ und $X' = L(U, CD) \cap b$, dann gilt nach (P4) $U \in \varrho_C(c, P)$ und nach (P2) $X' \in \varrho_X(b, P)$ (Fig. 4). Zugleich aber folgt aus (P4) $X' \in \varrho_Y(b, P)$. Da $\varrho(b, P)$ eine Äquivalenzrelation ist, erhalten wir $\varrho_X(b, P) = \varrho_Y(b, P)$ und $X \in \varrho_Y(b, P)$.

Satz 2. Es seien a, b zwei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt P und seien $P_1, P_3, Q_1, Q_3 \in a, P_2, P_4, Q_2, Q_4, X \in b$ von P verschiedene Punkte mit $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2, P_2P_3 \parallel Q_2Q_3, P_3P_4 \parallel Q_3Q_4, P_1P_4 \parallel Q_1X$. Gelten (P2), (P3), (P4), dann ist $Q_4 \in \mathcal{Q}_X(b, P)$.

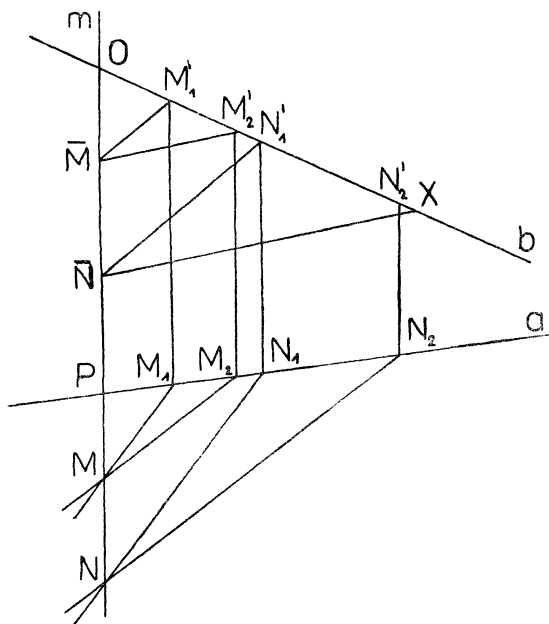


Fig. 3

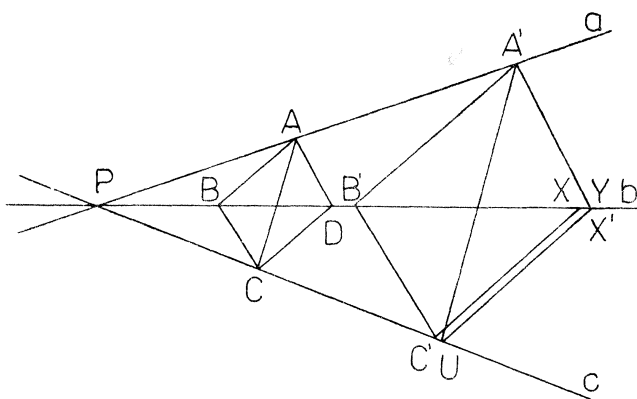


Fig. 4

Beweis. 1. Es sei $P_2P_3 \parallel P_1P_4$ (Fig. 5). Bezeichnen wir den Schnittpunkt von P_2P_3, P_1P_4 mit S und setzen wir schrittweise $T = PS \cap Q_2Q_3, Q'_1 = L(T, P_1P_4) \cap a, Q'_4 = L(T, P_1P_4) \cap b$, dann erhalten wir nach (P4) $Q'_4 \in \varrho_{Q_4}(b, P)$ und $Q'_1 \in \varrho_{Q_1}(a, P)$. Gemäß (P2) ist $Q'_4 \in \varrho_X(b, P)$ und folglich $Q_4 \in \varrho_X(b, P)$.

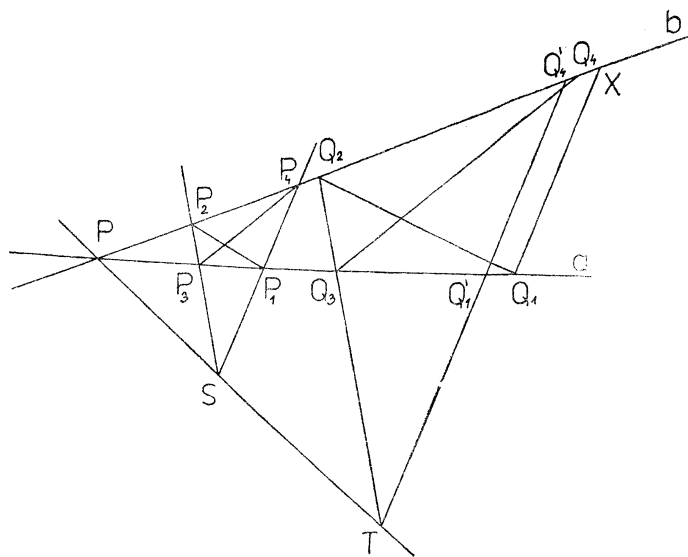


Fig. 5

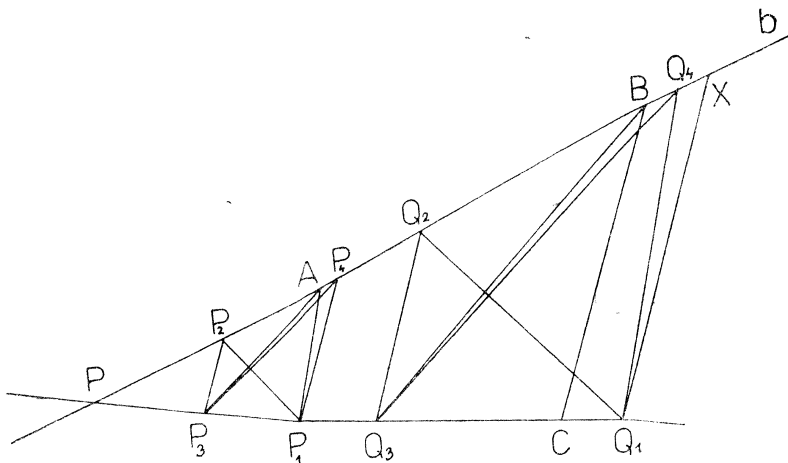


Fig. 6

2. Es sei $P_2P_3 \parallel P_1P_4$ (Fig. 6). Ist $Q_4 = X$, dann offensichtlich gilt $Q_4 \in \varrho_X(b, P)$. Wir nehmen also $Q_4 \neq X$ an und setzen $A = L(P_1, Q_1Q_4) \cap b$. Wegen $Q_1Q_4 \parallel Q_2Q_3$ und $Q_3Q_2 \parallel P_3P_2$, $Q_1Q_2 \parallel P_1P_2$, $Q_3Q_4 \parallel P_3P_4$, $Q_1Q_4 \parallel P_1A$ erhalten wir nach dem Fall 1 $P_4 \in \varrho_A(b, P)$. Setzen wir $B = L(Q_3, P_3A) \cap b$, dann wegen $P_2P_3 \parallel Q_2Q_3$, $P_2P_1 \parallel Q_2Q_1$, $P_1A \parallel Q_1Q_4$, $P_3A \parallel Q_3B$ und $P_2P_3 \parallel P_1A$ gilt nach dem Fall 1 $Q_4 \in \varrho_B(b, P)$. Wird schließlich $C = L(B, P_1P_4) \cap a$ gesetzt, dann wegen $P_4 \in \varrho_A(b, P)$, $Q_4 \in \varrho_B(b, P)$, $P_1A \parallel Q_1Q_4$, $BC \parallel P_1P_4$ erhält man nach (P3) $Q_1 \in \varrho_C(a, P)$. Aus (P2) folgt daraus $X \in \varrho_B(b, P)$ und $Q_4 \in \varrho_X(b, P)$.

Definition. Es sei \mathcal{T} die Menge aller geordneten Tripel kollinear Punkte O, A, B mit $O \neq A, B$. Unter einem Ordnungsverhältnis (aus \mathcal{A} in bezug auf \mathcal{G}) verstehen wir eine Abbildung τ von \mathcal{T} in ein Gruppoid \mathcal{G} , für welche folgende Bedingungen (T1) und (T2) gelten:

(T1) Für je vier kollineare Punkte O, A, B, C mit $O \neq A, B, C$ gilt $\tau(O, A, B) \tau(O, B, C) = \tau(O, A, C)$.

(T2) Gehen drei kollineare Punkte O, A, B mit $O \neq A, B$ durch eine Parallelprojektion in Punkte O', A', B' über, so gilt $\tau(O, A, B) = \tau(O', A', B')$.

Bemerkung. Es sei τ ein Ordnungsverhältnis. Dann ist nach [4], Satz 2 ($\tau(\mathcal{T})$), eine Gruppe und $\tau(O, X, X) = 1$ gilt für ein beliebiges Paar O, X mit $O \neq X$, woraus $\tau(O, A, B) \tau(O, B, A) = \tau(O, A, A) = 1$ folgt.

Theorem. Ein Ordnungsverhältnis $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$ auf \mathcal{A} induziert auf jeder Menge $p \setminus \{P\}$ mit $P \in p$ eine Äquivalenzrelation $\varrho(p, P)$ durch die Vorschrift $X \sim Y : \Leftrightarrow \Leftrightarrow \tau(P, X, Y) = 1$, $X, Y \in p \setminus \{P\}$, wobei alle $\varrho(p, P)$ die Behauptungen (P1)–(P5) erfüllen. Ist umgekehrt auf jeder Menge $p \setminus \{P\}$ mit $P \in p$ eine Äquivalenzrelation $\varrho(p, P)$ erklärt und erfüllen alle $\varrho(p, P)$ die Behauptungen (P1)–(P5), dann gibt es ein Ordnungsverhältnis τ auf \mathcal{A} mit $\tau(P, X, Y) = 1 \Leftrightarrow X \sim Y$.

Beweis. I. Es sei $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Ordnungsverhältnis auf \mathcal{A} . Definieren wir auf jeder Menge $p \setminus \{P\}$ mit $P \in p$ eine binäre Relation $\varrho(p, P)$ durch $X \sim Y : \Leftrightarrow \Leftrightarrow \tau(P, X, Y) = 1$, dann $\varrho(p, P)$ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Wir wollen noch beweisen, daß alle $\varrho(p, P)$ die Behauptungen (P1)–(P5) erfüllen. Die erste Behauptung (P1) wird in [4], Satz 3 bewiesen.

Ad (P2). Ist φ eine Parallelprojektion von der Geraden p auf a , dann wegen (T2) gilt $U \in \varrho_X(p, P) \Rightarrow \tau(P, U, X) = 1 \Rightarrow \tau(\varphi(P), \varphi(U), \varphi(X)) = 1 \Rightarrow \varphi(U) \in \varrho_{\varphi(X)}(a, \varphi(P))$.

Ad (P3). Es seien die Voraussetzungen von (P3) erfüllt. Wegen $A \in \varrho_B(a, P)$, $C \in \varrho_D(a, P)$ ist $\tau(P, A, B) = \tau(P, C, D) = 1$, nach Bemerkung erhält man daraus $\tau(P, B, A) = \tau(P, D, C) = 1$ und gemäß (T1) ergibt sich $\tau(P, A, C) = \tau(P, B, A) \cdot \tau(P, A, C) = \tau(P, B, C) = \tau(P, B, D) \tau(P, D, C) = \tau(P, B, D)$. Nach (T2) gilt $\tau(P, A, C) = \tau(P, M, C')$ und $\tau(P, B, D) = \tau(P, M, D')$, also $\tau(P, M, C') = \tau(P, M, D')$. Daraus folgt $1 = \tau(P, C', M) \tau(P, M, C') = \tau(P, C', M) \tau(P, M, D') = \tau(P, C', D')$, was $C' \in \varrho_{D'}(b, P)$ bedeutet.

Ad (P4). Es seien die Voraussetzungen von (P4) erfüllt. Nach (T2) erhält man $\tau(P, A, A') = \tau(P, B, X) = \tau(P, C, C') = \tau(P, B, Y)$, woraus $1 = \tau(P, X, B)$.
 $\tau(P, B, X) = \tau(P, X, B) \tau(P, B, Y) = \tau(P, X, Y)$ und $X \in \varrho_Y(b, P)$ folgt.

Ad (P5). Sind die Voraussetzungen von (P5) erfüllt, dann gilt $\tau(P, M, N) = \tau(P, M_1, N_1) = \tau(P, M_2, N_2) = \tau(O, M'_1, N'_1) = \tau(O, M'_2, N'_2) = \tau(O, \bar{M}, \bar{N}) = \tau(O, M'_1, X)$. Wegen $\tau(O, M'_2, N'_2) = \tau(O, M'_2, X)$ erhält man $1 = \tau(O, N'_2, M'_2) \tau(O, M'_2, N'_2) = \tau(O, N'_2, M'_2) \tau(O, M'_2, X) = \tau(O, N'_2, X)$, also $X \in \varrho_{N'_2}(b, O)$.

II. Wir nehmen an, daß auf jeder Menge $p \setminus \{P\}$ mit $P \in p$ eine Äquivalenzrelation $\varrho(p, P)$ erklärt ist, wobei alle $\varrho(p, P)$ die Behauptungen (P1)–(P5) erfüllen. Ferner setzen wir $\varrho := \varrho(e, O)$. Nach (P1) ist ϱ eine Kongruention auf der Loop \mathcal{O} und auf der Faktormenge R/ϱ läßt sich deshalb eine binäre Operation \cdot durch die Vorschrift $\varrho_X \varrho_Y = \varrho_{X \cdot Y} \forall X, Y \in e \setminus \{O\}$ definieren. Das Paar $\mathcal{G} = (R/\varrho, \cdot)$ ist dann ein Gruppoid mit Einselement $1 = \varrho_E$.

Zu jedem Tripel (P, M, N) aus \mathcal{F} erklären wir einen Punkt $X \in e$ folgendermaßen: Wir setzen $m = PM$.

(K1). Es sei $P = O$.

a) Ist $m \neq e$, dann setzen wir $X = L(N, EM) \square e$.

b) Ist $m = e$, dann führen wir durch O eine Gerade m' mit $m' \neq e$, auf m' wählen wir einen Punkt M_1 mit $M_1 \neq O$ und setzen $N_1 = L(N, MM_1) \square m'$, $X = L(N_1, M_1 E) \square e$ (Fig. 7).

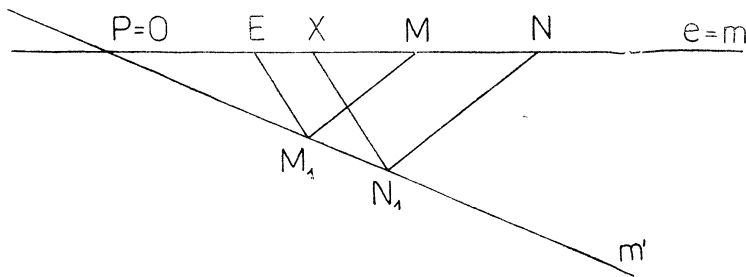


Fig. 7

(K2). Es sei $P \neq O$.

a) Wir nehmen $O \notin m$ an. Durch O führen wir eine Gerade m' mit $m' \neq e$, OP und setzen $M_1 = L(M, OP) \square m'$, $N_1 = L(N, OP) \square m'$, $X = L(N_1, M_1 E) \square e$ (Fig. 8).

b) Wir nehmen $O \in m$ an. Durch P führen wir eine Gerade p mit $p \neq m$, auf p wählen wir einen Punkt M_1 mit $M_1 \neq P$ und setzen $N_1 = L(N, NM_1) \square p$ (Fig. 9). Durch O führen wir eine andere Gerade m' mit $m' \neq e, m$ und setzen $M'_1 = L(M_1, m) \square m'$, $N'_1 = L(N_1, m) \square m'$, $X = L(N'_1, EM'_1) \square e$.

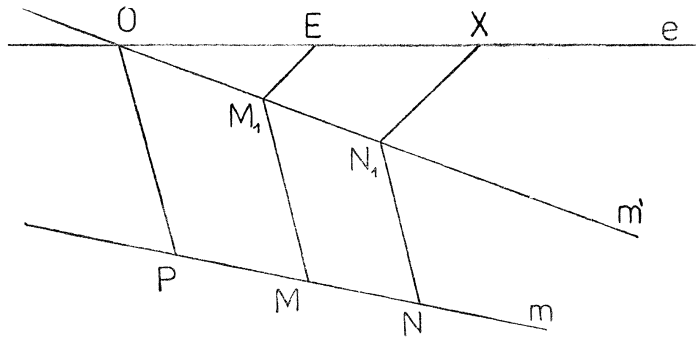


Fig. 8

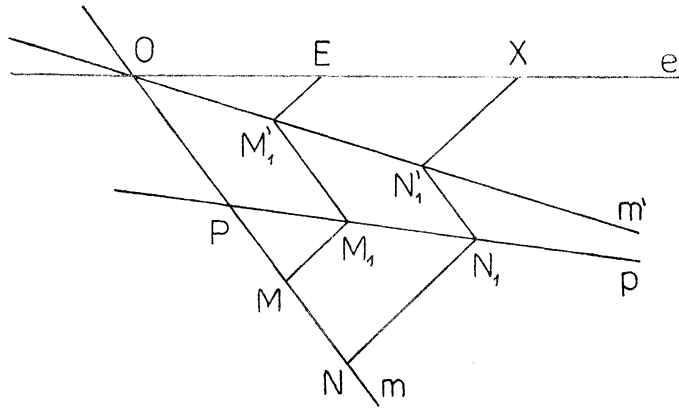


Fig. 9

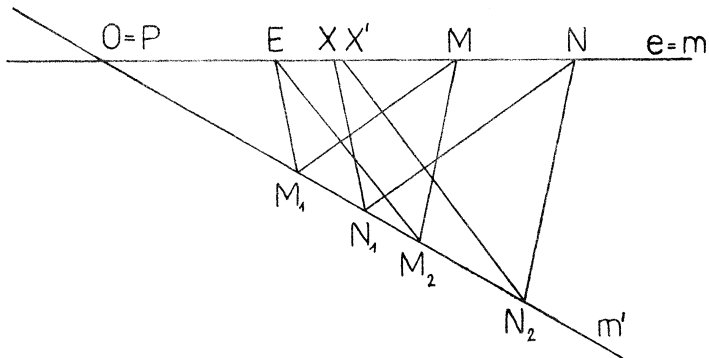


Fig. 10

Wir beweisen, daß durch die Vorschriften (K1) und (K2) eine Abbildung von \mathcal{F} in R/ϱ definiert ist, d. h. daß jedem Tripel (P, M, N) aus \mathcal{F} genau ein Element $\varrho_X \in R/\varrho$ zuordnet ist. Wir sollen also beweisen, daß die Bestimmung von ϱ_X von der Wahl der einzelnen Geraden und Punkte in (K1) und (K2) unabhängig ist.

Ad (K1) a) Der Punkt X ist eindeutig bestimmt.

b) Wir nehmen an, daß die Gerade m' und der Punkt $M_1 \in m'$ zur Bestimmung von X nach Figure 7 verwandt sind.

(i) Wir wählen einen Punkt $M_2 \in m'$ mit $M_2 \neq O$ und setzen $N_2 = L(N, NM_1) \square m'$, $X' = L(N_2, M_2E) \square e$ (Fig. 10). Nach unseren Voraussetzungen gilt $NM_1 \parallel NN_1$, $MM_2 \parallel NN_2$, $M_1E \parallel N_1X$, $M_2E \parallel N_2X'$ und aus dem Satz 2 folgt $\varrho_X = \varrho_{X'}$.

(ii) Durch den Punkt O führen wir eine Gerade m'' mit $m'' \neq m$ und setzen $M_2 = MM_1 \square m''$, $N_2 = NN_1 \square m''$, $X' = L(N_2, M_2E) \square e$ (Fig. 11). Nach (P4) erhalten wir $\varrho_X = \varrho_{X'}$.

(iii) Wir wählen eine Gerade m'' mit $O \in m''$, $m'' \neq m$ und einen Punkt $M_2 \in m''$ mit $M_2 \neq O$ (Fig. 12). Dann setzen wir $N_2 = L(N, M_2M) \square m''$, $X' = L(N_2, EM_2) \square e$

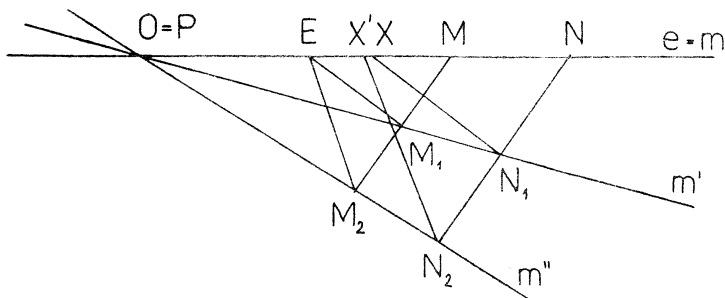


Fig. 11

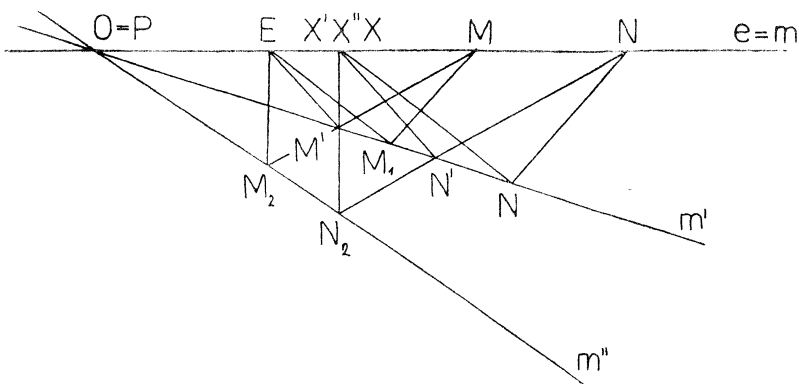


Fig. 12

und $M' = MM_2 \cap m'$, $N' = NN_2 \cap m'$, $X'' = L(N', M'E) \cap e$. Nach (i) ist $\varrho_X = \varrho_{X''}$ und nach (ii) gilt $\varrho_{X''} = \varrho_{X'}$, woraus $\varrho_X = \varrho_{X'}$ folgt. Die Erklärung des Elementes $\varrho_X \in R/\varrho$ ist also von der Wahl der Geraden m' und des Punktes M_1 unabhängig.

Ad (K2). a) Wir nehmen an, daß der Punkt X mittels der Geraden m' bestimmt ist (Fig. 8). Wir wählen eine Gerade m'' mit $m'' \neq e$, $O \in m''$ und setzen $M_2 = L(M, OP) \cap m''$, $N_2 = L(N, OP) \cap m''$, $X' = L(N_2, M_2E) \cap e$ (Fig. 13). Nach (P4) gilt dann $\varrho_X = \varrho_{X'}$.

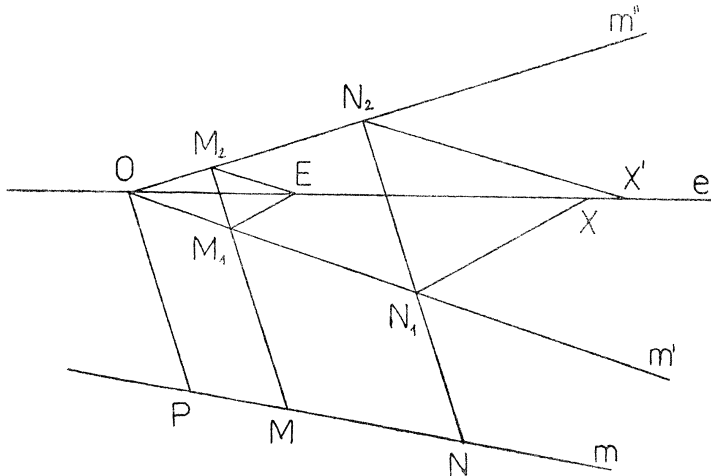


Fig. 13

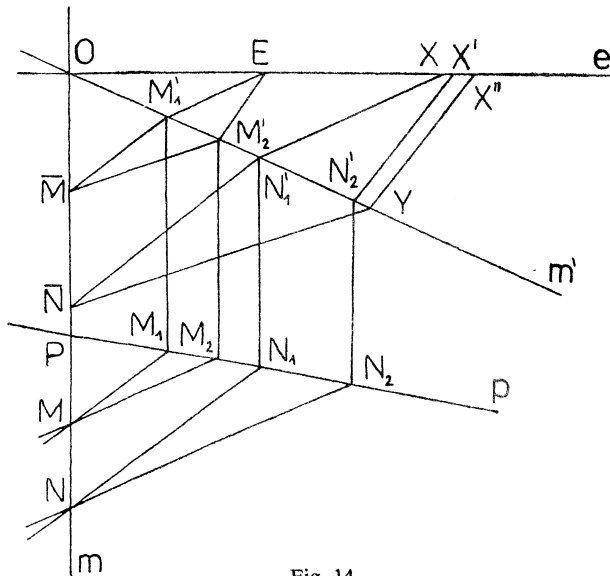


Fig. 14

b) Der Punkt X sei mittels der Geraden p , des Punktes $M_1 \in p$ und der Geraden m' bestimmt (Fig. 9).

(i) Auf p wählen wir einen Punkt M_2 mit $M_2 \neq P$ und setzen $N_2 = L(N, MM_2) \cap p$, $M'_2 = L(M_2, m) \cap m'$, $N'_2 = L(N_2, m) \cap m'$, $X' = L(N'_2, M'_2E)$ (Fig. 14). Wir wollen $q_X = q_{X'}$ beweisen. Dazu wählen wir auf der Geraden m einen Punkt \bar{M} mit $\bar{M} \neq O$ und setzen $\bar{N} = L(N'_1, \bar{M}M'_1) \cap m$, $Y = L(\bar{N}, \bar{M}M'_2)$. Nach (P5) gilt dann $q_Y(m', O) = q_{N'_2}(m', O)$. Setzen wir weiter $X'' = L(Y, M'_2E) \cap e$, dann ist nach (P1) $q_{X''} = q_{X'}$, und nach Satz 1 gilt zugleich $q_X = q_{X''}$. Damit erhalten wir $q_X = q_{X'}$.

(ii) Durch P führen wir eine Gerade p' mit $p' \neq m$ und setzen $M_2 = MM_1 \cap p'$, $N_2 = NN_1 \cap p'$, $M'_2 = L(M_2, m) \cap m'$, $N'_2 = L(N_2, m) \cap m'$, $X' = L(N'_2, M'_2E) \cap m'$ (Fig. 15). Ferner setzen wir $\bar{M} = M_1M'_1 \cap p'$, $\bar{N} = N_1N'_1 \cap p'$, $\bar{N}_1 = L(N, \bar{M}M) \cap p'$, $\bar{N}'_1 = L(\bar{N}_1, m) \cap m'$, $X'' = L(\bar{N}'_1, M'_1E) \cap e$. Verwenden wir die Behauptung

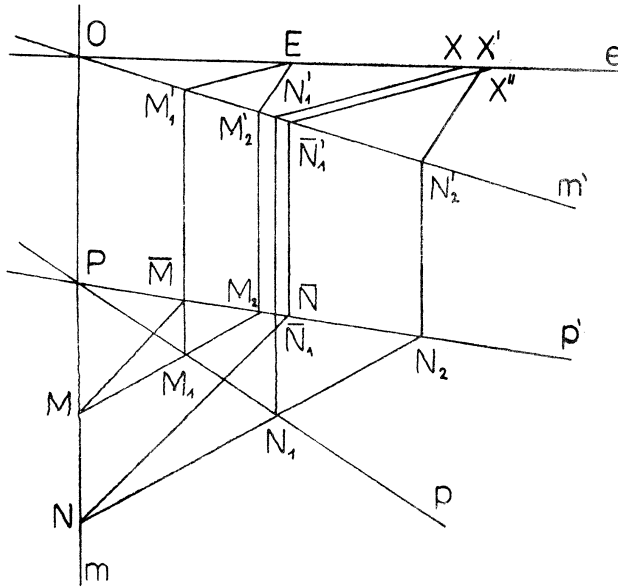


Fig. 15

(P4) auf die Punkte M, M_1, \bar{M} und $N, N_1, \bar{N}, \bar{N}_1$, dann erhalten wir $q_{\bar{N}}(p', P) = q_{\bar{N}_1}(p', P)$. Nach (P1) gilt $q_{N'_1}(m', O) = q_{\bar{N}'_1}(m', O)$ und $q_X = q_{X'}$. Betrachten wir weiter die Punkte $\bar{M}, M_2, \bar{N}_1, N_2$ und $M'_1, M'_2, \bar{N}'_1, N_2$, dann gilt nach (i) $q_{X''} = q_{X'}$, woraus $q_{X''} = q_X$ folgt.

(iii) Führen wir durch O eine Gerade m'' mit $m'' \neq e, m'$ und setzen wir $\bar{M}_1 =$

$= M_1 M'_2 \square m''$, $\bar{N}_1 = NN_1 \square m''$, $X' = L(\bar{N}_1, \bar{M}_1 E) \square e$, dann gilt nach (P4) $\varrho_X = \varrho_{X'}$ (Fig. 16).

(iv) Durch P führen wir eine Gerade p' mit $p' \neq m$, durch O führen wir eine

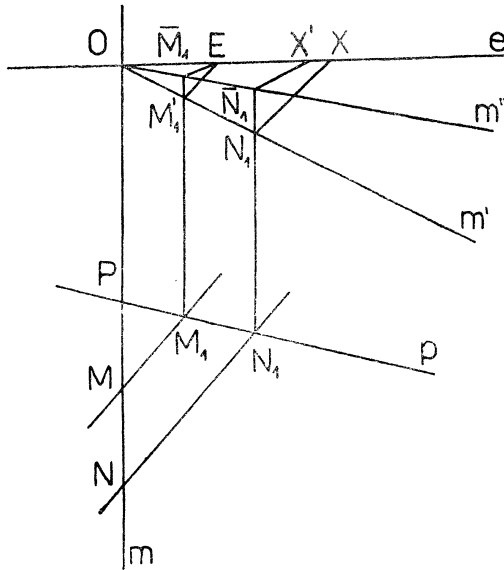


Fig. 16

Gerade m'' mit $m'' \neq e, m'$; auf p' wählen wir einen Punkt M_2 und setzen $N_2 = L(N, MM_2) \square p'$, $M'_2 = L(M_2, m) \square m''$, $N'_2 = L(N_2, m) \square m''$, $X' = L(N'_2, M'_2 E) \square e$ (Fig. 17). Wir wollen $\varrho_X = \varrho_{X'}$ beweisen. Setzen wir weiter $\bar{M}_2 = MM_2 \square p$, $\bar{N}_2 = NN_2 \square p$, $\bar{M}'_2 = L(\bar{M}_2, m) \square m'$, $\bar{N}'_2 = L(\bar{N}_2, m) \square m'$, $\bar{M} = L(\bar{M}_2, m) \square m''$, $\bar{N} = L(\bar{N}_2, m) \square m''$, $X'' = L(\bar{N}'_2, \bar{M}'_2 E) \square e$, $\bar{X} = L(\bar{N}, \bar{M} E) \square e$, dann gilt nach (i) $\varrho_X = \varrho_{X''}$, nach (ii) ist $\varrho_{X''} = \varrho_{\bar{X}}$ und (iii) impliziert $\varrho_{X''} = \varrho_{X'}$. Da ϱ eine Äquivalenzrelation ist, ergibt sich daraus $\varrho_X = \varrho_{X'}$.

Wir haben also bewiesen, daß durch die Vorschriften (K1) und (K2) eine Abbildung τ von \mathcal{T} in $\mathcal{G} = (R/\varrho, \cdot)$ definiert ist.

Im Falle (K1)b) gilt $\tau(P, M, N) = \varrho_X$, aber nach (K1) a) ist zugleich $\tau(P, M_1, N_1) = \varrho_X$ (Fig. 7). Somit gilt $\tau(P, M, N) = \tau(P, M_1, N_1)$. Ganz ähnlich erhalten wir $\tau(P, M, N) = \tau(P, M_1, N_1)$ auch im Falle (K2) a) (Fig. 8). Verwenden wir (K2) a) zu (K2) b), dann erhalten wir $\tau(P, M, N) = \tau(P, M_1, N_1) = \tau(O, M'_1, N'_1) = \tau(O, E, X)$ (Fig. 9).

Ferner beweisen wir, daß τ die Forderung (T2) erfüllt: Es seien $(P, M, N), (P', M', N') \in \mathcal{T}$ mit $P, M, N \in m, P', M', N' \in m', P, P' \in a, M, M' \in b, N, N' \in c$ und $a \parallel b \parallel c$. Zum Beweis der Gleichheit $\tau(P, M, N) = \tau(P', M', N')$ untersuchen wir die einzelnen Fälle.

Zuerst nehmen wir an, daß $m \parallel m'$ ist. Dann gibt es einen Schnittpunkt R von m und m' .

1. Wir setzen $O \notin m, m'$ voraus.

a) Es sei $R \notin e$. Wegen $O \neq R$ gibt es eine Gerade $p = OR$ mit $p \neq e, m, m'$ (Fig. 18). Setzen wir $M_1 = L(M, OP) \square p, N_1 = L(N, OP) \square p, M'_1 = L(M', OP') \square$

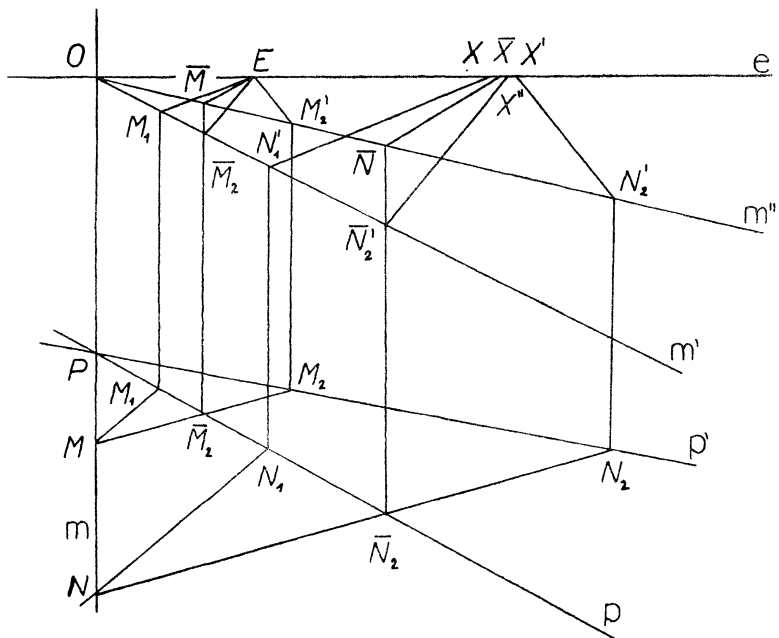


Fig. 17

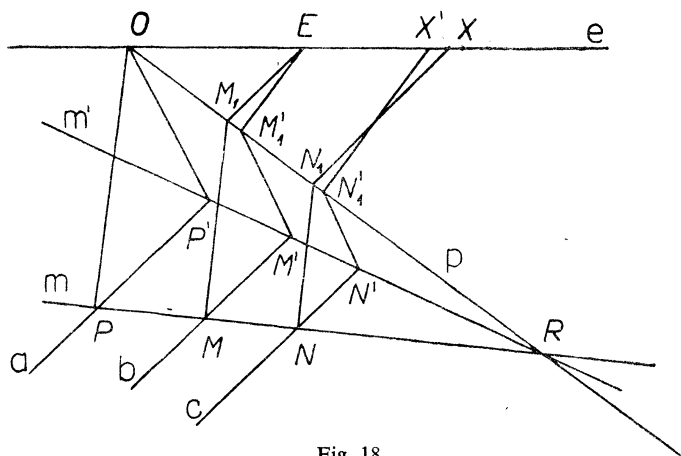


Fig. 18

$\square p$, $N'_1 = L(N', OP') \square p$, $X = L(N_1, M_1E) \square e$, $X' = L(N'_1, M'_1E) \square e$, dann gilt nach (K2) b) $\varrho_X = \tau(P, M, N)$ und $\varrho_{X'} = \tau(P', M', N')$. Gemäß (P4) ist $\varrho_{M_1}(p, O) = \varrho_{M'_1}(p, O)$, $\varrho_{N_1}(p, O) = \varrho_{N'_1}(p, O)$ und nach (P3) ergibt sich $\varrho_X = \varrho_{X'}$, also $\tau(P, M, N) = \tau(P', M', N')$.

b) Es sei $R \in e$. Wir wählen eine Gerade u mit $R \notin u$, $u \parallel a$, $u \parallel m$, $u \parallel m'$ und setzen $P'' = u \square a$, $M'' = u \square b$, $N'' = u \square c$. Da der Schnittpunkt von u , m bzw. u , m' auf e nicht enthalten ist, gilt nach dem Fall a) $\tau(P, M, N) = \tau(P'', M'', N'')$, $\tau(P', M', N') = \tau(P'', M'', N'')$ und folglich $\tau(P, M, N) = \tau(P', M', N')$.

2. Wir nehmen $O \in m$ und $O \notin m'$ an. Durch P führen wir eine Gerade u mit $u \neq m$, $u \parallel m'$, $u \parallel a$ und setzen $M'' = u \square b$, $N'' = u \square c$ (Fig. 19). Nach (K2)

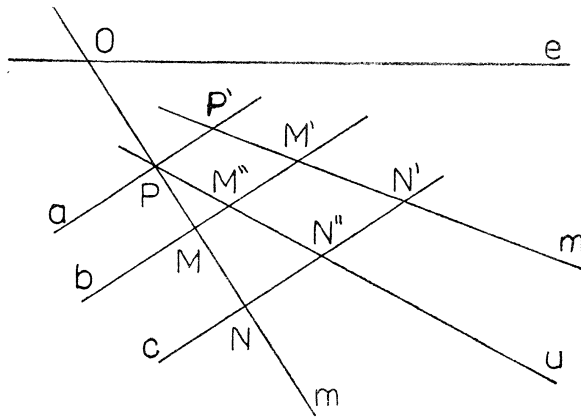


Fig. 19

b) ist $\tau(P, M, N) = \tau(P, M'', N'')$ und aus dem vorigen Fall 1 folgt $\tau(P, M'', N'') = \tau(P', M', N')$.

3. Wir setzen $O \in m, m'$ voraus. Durch P führen wir eine Gerade u mit $u \neq m$, $u \parallel a$ und ihre Schnittpunkte mit b, c bezeichnen wir mit M'', N'' . Nach (K2) b) ist $\tau(P, M, N) = \tau(P, M'', N'')$ und aus dem vorigen Fall 2 folgt $\tau(P, M'', N'') = \tau(P, M', N')$.

Sind die Geraden m, m' parallel, dann führen wir eine Gerade u mit $u \parallel m$ und ihre Schnittpunkte mit a, b, c bezeichnen wir mit P'', M'', N'' . Nach dem Vorangehenden gilt $\tau(P, M, N) = \tau(P'', M'', N'') = \tau(P', M', N')$.

Ferner wollen wir beweisen, daß τ der Forderung (T1) genügt, d. h. daß $\tau(P, M, N) \tau(P, N, Q) = \tau(P, M, Q)$ für $(P, M, N), (P, N, Q) \in \mathcal{F}$ gilt. Wegen $(P, M, N), (P, N, Q) \in \mathcal{F}$ liegen P, M, N, Q auf einer Geraden m . Wir nehmen zunächst an, daß $P = O$ und $m \neq e$ gilt (Fig. 20). Setzen wir $X = L(N, ME) \square e$, $Y = L(Q, NE) \square e$, $Z = L(Q, ME) \square e$, dann ist $\tau(P, M, N) = \varrho_X$, $\tau(P, N, Q) = \varrho_Y$ und $\tau(P, M, Q) = \varrho_Z$. Wir haben die Verknüpfung \cdot im Gruppoid $\mathcal{G} = (R/\varrho, \cdot)$

durch $\varrho_X \varrho_Y = \varrho_{X \circ Y}$ definiert, wo \circ die Verknüpfung in der Loop \mathcal{A} ist. Der Punkt $X \circ Y$ läßt sich nach [4] mit $U = L(X, x) \square e'$, $V = L(Y, y) \square OU$, $X \circ Y = L(V, x) \square e$ bestimmen. Betrachten wir die Punkte U, E, N, X und $V, Y, Q, Z, X \circ Y$, dann gilt nach Satz 1 $\varrho_X \varrho_Y = \varrho_{X \circ Y} = \varrho_Z$, also $\tau(P, M, N) \tau(P, N, Q) = \tau(P, M, Q)$.

Die übrigen Fälle lassen sich mit Hilfe des vorigen speziellen Falles und mit (T2) beweisen. Dieses Verfahren zeigen wir z. B. für $P \neq O$ und $O \in m$. Nach der Figur 9

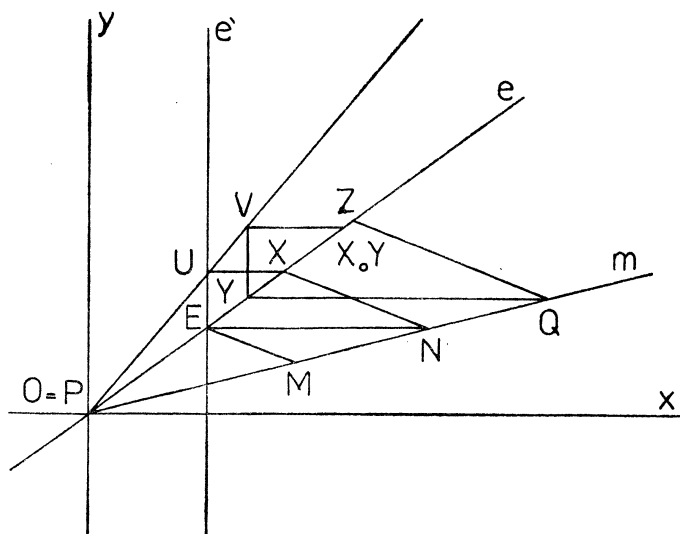


Fig. 20

erklären wir Punkte M_1, N_1, Q_1 auf der Geraden p und Punkte M'_1, N'_1, Q'_1 auf m' . Gemäß (T2) gilt $\tau(P, M, N) = \tau(P, M_1, N_1) = \tau(O, M'_1, N'_1)$ und $\tau(P, N, Q) = \tau(O, N'_1, Q'_1)$, $\tau(P, M, Q) = \tau(O, M'_1, Q'_1)$. Nach Vorangehendem ist dann $\tau(O, M'_1, N'_1) \tau(O, N'_1, Q'_1) = \tau(O, M'_1, Q'_1)$, also $\tau(P, M, N) \tau(P, N, Q) = \tau(P, M, Q)$.

Damit ist bewiesen, daß τ ein Ordnungsverhältnis auf \mathcal{A} ist.

Es sei $(P, M, N) \in \mathcal{F}$. Nach (K1), (K2) bestimmen wir den Punkt $X \in e$ mit $\tau(P, M, N) = \varrho_X$. Nach (P2) gilt dann $M \sim N (\varrho(PM, P)) \Leftrightarrow N \in \varrho_M(PM, P) \Leftrightarrow X \in \varrho_E \Leftrightarrow \tau(P, M, N) = \varrho_E = 1$ (dazu siehe die Figuren 7 bis 9).

LITERATUR

- [1] Junkers, W.: Eine Kennzeichnung der desarguesschen affinen Räume durch kennzeichnende Eigenschaften des affinen Teilverhältnisses. Arch. der Math. 21, 299–303 (1970).

- [2] Junkers, W.: *Über normale Inhaltsfunktionen auf affinen Ebenen*. Beiträge zur Geometrischen Algebra. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1977, S. 167–178.
- [3] Lingenberg, R.: *Grundlagen der Geometrie I*. Mannheim 1969.
- [4] Machala, F.: *Über Ordnungsverhältnisse auf affinen Ebenen*. Čas. pro pěst. matem. 108 (1983), 191–198.

Adresse des Autors:
RNDr. František Machala, CSc.
přírodovědecká fakulta UP
Leninova 26
Olomouc
771 46

K EXISTENCI DĚLÍČÍHO POMĚRU NA AFINNÍ ROVINĚ

Souhrn

V práci jsou stanoveny nutné a postačující podmínky pro existenci dělčího poměru na afinní rovině.

K СУЩЕСТВОВАНИЮ ПРОСТОГО ОТНОШЕНИЯ НА АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Резюме

В работе поставлены необходимые и достаточные условия для существования простого отношения на аффинной плоскости.