Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

Bedřich Půža

О краевых задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 23 (1984), No. 1, 75--92

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120152`

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM
1984 VOLUMEN 79 PAG. 75–92

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА

Б. ПУЖА

(Окончено и сдано 30-го апреля 1983 г.)

Ниже приводятся некоторые эффективные критерия существования и единственности задачи

$$x_i''(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{f}$$

$$\begin{aligned} x_i(t_{1i}) &= \varphi_{1i}(x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') \\ x_i'(t_{2i}) &= \varphi_{2i}(x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') \end{aligned} \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{φ}$$

где $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ обозначает производную, $-\infty < a < b < +\infty$, $\langle a, b\rangle$ – сегмент, R – множество вещественных чисел, R^n n – мерное евклидого пространство, $f_i : \langle a, b\rangle \times R^n \times R^n \to R$ $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют условиями Каратеодори, $t_{li} \in \langle a, b\rangle$ $(l = 1, 2,\ i = 1, \dots, n)$ и φ_{li} $(l = 1, 2;\ i = 1, \dots, n)$ – непрерывные функционалы.

Частным случаем краевых условий (φ) являются например условия:
2-ой (смешанной) задачи:

$$x_i(a) = c_{1i},\ x_i'(b) = c_{2i}\ (i = 1, \dots, n) \tag{φ_1}$$

или

$$x_i(b) = c_{1i},\ x_i'(a) = c_{2i}\ (i = 1, \dots, n)$$

где $c_{li} \in R$ $(l = 1, 2;\ i = 1, \dots, n)$,

периодической задачи:

$$x_i(a) = x_i(b),\ x_i'(a) = x_i'(b)\ (i = 1, \dots, n) \tag{φ_2}$$

или антипериодической:

$$x_i(a) = -x_i(b),\ x_i'(a) = -x_i'(b)\ (i = 1, \dots, n),$$

линейной задачи:

$$x_i(t_{1i}) = \lambda_{1i} x_i(t_{1i}^*) + c_{1i},\ x_i'(t_{2i}) = \lambda_{2i} x_i'(t_{2i}^*) + c_{2i} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{φ_3}$$

где $t_{li}, t_{li}^* \in \langle a, b\rangle$, $t_{li} \neq t_{li}^*$; $\lambda_{li}, c_{li} \in R$ $(l = 1, 2;\ i = 1, \dots, n)$,
с екстремом:

$$x_i^{(l-1)}(t_{li}) = \lambda_{li} \max \{\sigma_{li} x_i^{(l-1)}(t) : a \leqq t \leqq b\} + c_{li} \quad (l = 1, 2; {}_i = 1, \dots n) \quad (\varphi_4)$$

где $t_{li} \in \langle a, b \rangle$, $\sigma_{li} \in \{-1, 1\}$, λ_{li}, $c_{li} \in R$ $(l = 1, 2;\ i = 1, \dots, n)$,
интегральные:

$$x_i^{(l-1)}(t_{li}) = \int_a^b x_i(t)\, d\xi_{li}(t) + c_{li} \qquad (l = 1, 2; i = 1, \dots, n), \qquad (\varphi_5)$$

где $t_{li} \in \langle a, b \rangle$, $c_{li} \in R$ и $\xi_{li} : \langle a, b \rangle \to R$ $(l = 1, 2: i = 1, \dots, n)$ функции ограниченной вариации и соответствующие интегралы понимаются в смысле Лебега-Стиельтеса.

В стетье принято следующее обозначение:

$x = (x_i)_{i=1}^n$ – произвольная точка в R^n, $||x|| = \sum_{j=1}^n |x_j|$,

$R_+^n = \{(x_i)_{i=1}^n \in R^n \colon x_j \geqq 0, j = 1, \dots, n\}$,

δ_{ij} – символ Кронецкера,

$$l(q, q_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } 1 \leqq q = q_0 \text{ или } q_0 = +\infty \\ \left(\dfrac{q_0}{q} - 1\right)^{-1/q_0} \left(\dfrac{q_0}{q\pi} \sin \dfrac{q\pi}{q_0}\right)^{1/q} & \text{при } 1 \leqq q < q_0 < +\infty, \end{cases}$$

$l(q_0) = l(1, q_0)$,

$S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$ – $n \times n$-матрица с элементами s_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$,

$\varrho(S)$ – спектральный радиус матрицы S,

E – единичная и 0 – нулевая матрица,

S^{-1} – матрица обратная S,

$C_n \langle a, b \rangle$ – пространство непрерывных на $\langle a, b \rangle$ n-мерных вектор функций с нормой

$$\| x \|_{C_n} = \max \{ \sum_{i=1}^n | x_i(t) | ; a \leqq t \leqq b\},$$

$C_n^1 \langle a, b \rangle$ – пространство непрерывных на $\langle a, b \rangle$ в месте со своей первой производной n-мерных вектор функций с нормой

$$\| x \|_{C_n^1} = \max \{ \sum_{i=1}^n [| x_i(t) | + | x_i' \ (t) |] ; a \leqq t \leqq b\},$$

$C_n^+ \langle a, b \rangle = \{(x_i)_{i=1}^n \in C_n \langle a, b \rangle \colon x_j(f) \geqq 0$ при $a \leqq t \leqq b, j = 1, \dots, n\}$,

$L^p \langle a, b \rangle$ – пространство суммируемых со степенью $p \geqq 1$ на отрезке $\langle a, b \rangle$ функций с нормой

$$\| x \|_{L^p} = \begin{cases} \operatorname{vrai} \max \{| x(t) | ; a \leqq t \leqq b\} & \text{при } p = +\infty \\ [\int_a^b | x(t) |^p dt]^{1/p} & \text{при } 1 \leqq p < +\infty. \end{cases}$$

Если $x, y \in R^n$, то $x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $\forall$ – квантор общности, $p \forall t$ – почти для всех t. Пусть D некоторое множество функций $x : \langle \mathrm{a}, b \rangle \to R^n$.

Функционал $\varphi : D \to R$ называется *неубывающим*, если

$$x(t) \leqq y(t) \quad \text{для} \quad t \in \langle a, b \rangle \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)$$

и называется *сублинейным* (выпуклим), если

$$\varphi(x + y) \leqq \varphi(x) + \varphi(y), \ \varphi(\xi x) \leqq \xi \varphi(x) \quad \text{для } \xi \in R_+ .$$

Скажем, что функция $f : \langle a, b \rangle \times R^{2n} \to R$ удовлетворяет локальным *условиям Каратеодоры*, если $f(., x, y)$ измерима на $\langle a, b \rangle$ при любых $x, y \in R^n$, $f(t, ., .)$ непрерывна в R^{2n} при $p \,\forall\, t \in \langle a, b \rangle$ и $\sup\{|f(., x, y)| : \sum_{i=1}^{n} [|x_i| + |y_i|] \leqq \leqq \varrho\} \in L \langle a, b \rangle$ при любом $\varrho \in (0, +\infty)$.

Под *решением системы* (f) понимается абсолютно непрерывная на сегменте $\langle a, b \rangle$ с ее производной n-мерная вектор функция почти всюду удовлетворяющая системе (f), под *решением краевой задачи* (f, φ) – решение системы (f) удовлетворяющее условиям (φ).

Теорема 1. *Пусть для $p \,\forall\, t \in \langle a, b \rangle$ и $u, v \in R^n$ соблюдаются неравенства*

$$f_i(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \,.\, \operatorname{sign}[(t - t_{2i}) v_i] \leqq$$

$$\leqq -h_{1i}(t) \,|\, u_i \,|\, - h_{2i}(t) \,|\, v_i \,|\, + \sum_{j=1}^{n} h^{*}_{ij}(t) \,|\, u_j \,|\, + \sum_{j=1}^{n} h^{**}_{ij}(t) \,|\, v_j \,|\, + \omega_i(t, \| u \| + \| v \|)$$

$$(i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

и для $u, v \in C_n \langle a, b \rangle$ – неравенства

$$|\, \varphi_{li}(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \,| \leqq \sum_{j=1}^{n} \psi^{*}_{lij}(|\, u_j \,|) + \sum_{j=1}^{n} \psi^{**}_{lij}(|\, v_j \,|) + |\, C_{li} \,|$$

$$(l = 1, 2; \ i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где

а) $h_{li}, h^{*}_{ij}, h^{**}_{ij} \langle a, b \rangle \to R_+ (l = 1, 2; \ i, j = 1, \ldots, n)$,
$h_{li} \in L\langle a, b \rangle$, $h^{*}_{ij} \in L^{p_{ij}}\langle a, b \rangle$, $h^{*}_{ij} \in L^{p'_{ij}}\langle a, b \rangle$, $h^{*}_{ii}(t) - h_{1i}(t) \geqq 0$, $t \in \langle a, b \rangle$
$1/p_{ij} + 1/q_{ij} = 1$, $1/p'_{ij} + 1/q'_{ij} = 1$, $1 \leqq q'_{ij} \leqq q_0$, $1 \leqq q_{ij} \leqq q_0$ $(l = 1, 2;$ $i, j = 1, \ldots, n)$,

б) $\omega_i : \langle a, b \rangle \times R^{2n}_{+} \to R_+ (i = 1, \ldots, n)$ *– не убывают по второму аргументу,* $\omega_i(., r) \in L\langle a, b \rangle$ *для любого* $r \in (0, +\infty)$ *и*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \int_a^b \omega_i(t, r) \, \mathrm{d}t = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

в) $\psi^{*}_{lij}, \psi^{**}_{lij} : C^{+}\langle a, b \rangle \to R^{+}$ $(l = 1, 2; \ i, j = 1, \ldots, n)$ –
неубывающие непрерывные сублинейные функционалы,
$c_{li} \in R(l = 1, 2, \ i = 1, \ldots, n)$,

г) $\varrho(M_i) < 1$, $i = 1, 2, 3, 4$ *где* $M_1 = \Psi^{*}_{1}(\alpha_1(t))$,
$M_2 = \Psi^{*}_{2}(\alpha_1(t))[E - M_1]^{-1} \,.\, \Psi^{**}_{1}(\alpha_2(t)) + \Psi^{**}_{2}(\alpha_2(t))$,

$$M_3 = D(\| \alpha_1(t) \|_{L^{q_0}}) S_{21} + (b-a)^{1/q_0} D(\beta_1 \| h_1(t) \|_{L^{p_0}}),$$
$$M_4 = [D(\|\alpha_2(t)\|_{L^{q_0}}) S_{11} + D(\beta_2) L^*] \,.\, [E - M_3]^{-1} \,.$$
$$[D(\|\alpha_1(t)\|_{L^{q_0}}) S_{22} + (b-a) l(q_0) E] + D(\|\alpha_2(t)\|_{L^{q_0}}) S_{12} + D(\beta_2) L^{**},$$
$$S_{1l} = [E - M_2]^{-1} \,.\, [\Psi_2^*(\alpha_1(t))(E - M_1)^{-1} T_{l1} + T_{l2}] \quad (l = 1, 2),$$
$$S_{2l} = [E - M_1]^{-1} \,.\, [\Psi_1^{**}(\alpha_2(t)) S_{1l} + T_{l1}] \quad (l = 1, 2)$$
$$T_{1k} = D(\beta_1) \Psi_k^*(1) D(\|h_1(t)\|_{L^{p_0}}) + D(\beta_2) \Psi_k^{**}(1) L_0^* \quad (k = 1, 2),$$
$$T_{2k} = (b-a)^{1/p_0} D(\beta_1) \Psi_k^*(1) + D(\beta_2) \Psi_k^{**}(1) L_0^{**} \quad (k = 1, 2),$$
$$\alpha_{li}(t) = \exp\Big[-\int_{t_{li}}^{t} h_{li}(s) \operatorname{sign}(s - t_{li})\, ds\Big],\ t \in \langle a, b \rangle\ (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$
$$\beta_{li} = \max \Big\{\exp\Big[-\int_{\tau}^{t} h_{li}(s) \operatorname{sign}(s - \tau)\, ds\Big];\ (t - \tau)(t - t_{li}) \geqq 0,\ (\tau - t_{li}) \times$$
$$\times (t - t_{li}) \geqq 0,\ a \leqq \tau, t \leqq b\Big\},$$
$$D(\| \alpha_l(t) \|_{L^{q_0}}) = (\delta_{ij} \| \alpha_{li}(t) \|_{L^{q_0}})_{i,j=1}^n,\ D(\beta_l) = (\delta_{ij} \beta_{li})_{i,j=1}^n,\ (l = 1, 2),$$
$$L_0^* = (\| h_{ij}^*(t) \|_{L^{p_0}})_{i,j=1}^n,\ L_0^{**} = (\| h_{ij}^{**}(t) \|_{L^{p_0}})_{i,j=1}^n,$$
$$L^* = ((b-a)^{1/q_{ij}} l(q_{ij}, q_0) \| h_{ij}^*(t) \|_{L p_{ij}})_{i,j=1}^n,$$
$$L^{**} = ((b-a)^{1/q'_{ij}} l(q'_{ij}, q_0) \| h_i^{**}(t) \|_{L^{p'_{ij}}})_{i,j=1}^n,$$
$$\Psi_l^*(1) = (\psi_{lij}^*(1))_{i,j=1}^n,\ \Psi_l^{**}(1) = \psi_{lij}^{**}(1))_{i,j=1}^n,\ (l = 1, 2),$$
$$\Psi_l^*(\alpha_1(t)) = (\psi_{lij}^*(\alpha_{1i}(t))_{i,j=1}^n,\ \Psi_l^{**}(\alpha_2(t)) = (\psi_{lij}^{**}(\alpha_{2i}(t))_{i,j=1}^n,\ (l = 1, 2).$$

Тогда задача (f, φ) *разрешима.*

Замечание 1.: Матрицы M_i $(i = 1, \ldots, 4)$ предположения г) Теоремы 1. можно заменить матрицами:

$$M'_1 = \Psi_2^{**}(\alpha_2(t)),\ M'_2 = \Psi_1^{**}(\alpha_2(t)) \,.\, [E - M'_1]^{-1} \,.\, \Psi_2^*(\alpha_1(t)) + \Psi_1^*(\alpha_1(t)),$$
$$M'_3 = M_3,\ M'_4 = M_4 \quad \text{и при этом}$$
$$S_{1l} = [E - M'_1]^{-1} \{\Psi_2^*(\alpha_1(t)) \,.\, S_{2l} + T_{l2}\} \quad (l = 1, 2),$$
$$S_{2l} = [E - M'_2]^{-1} \{\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))[E - M'_1]^{-1} T_{l2} + T_{l1}\} \quad (l = 1, 2).$$

Теорема 2.: *Пусть для* $p\ \forall\ t \in \langle a, b \rangle$ и $u_l, v_l \in R^n$ $(l = 1, 2)$ *соблюдаются неравенства*

$$[f_i(t, u_{11}, \ldots, u_{1n}, v_{1n}, \ldots, v_{1n}) - f_i(t, u_{21}, \ldots, u_{2n}, v_{21}, \ldots, v_{2n})] \operatorname{sign}[(t - t_{2i})(v_1 - v_{2i})] \leqq$$
$$-h_{1i}(t)|u_{1i} - u_{2i}| - h_{2i}(t)|v_{1i} - v_{2i}|$$
$$+ \sum_{j=1}^n h_{ij}^*(t) \,|\, u_{1j} - u_{2j} \,| + \sum_{j=1}^n h_{ij}^{**}(t) \,|\, v_{1j} - v_{2j} \,|,\ (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

и для $u_l, v_l \in C_n \langle a, b \rangle$ $(l = 1, 2)$ — *неравенства*

$$|\varphi_{li}(u_{11}, \ldots, u_{1n}, v_{11} \ldots, v_{1n}) - \varphi_{li}(u_{21}, \ldots, u_{2n}, v_{21}, \ldots, v_{2n})| \leqq$$
$$\leqq \sum_{j=1}^n \psi_{lij}^2(|\, u_{1j} - u_{2j} \,|) + \sum_{j=1}^n \psi_{lij}^{**}(|\, v_{1j} - v_{2j} \,|), \qquad (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

где функции h_{li}, h^*_{ij}, h^{**}_{ij} ($l = 1, 2$; $i, j = 1, \ldots, n$) удовлетворяют предположениям а), функционалы ψ^*_{lij}, ψ^{**}_{lij} ($l = 1, 2$; $i, j = 1, \ldots, n$) предположениям в) и совместно предположению г) Теоремы 1. Тогда задача (f, φ) имеет неболее одного решения.

Для доказательства теорем приведем следствие одной теоремы доказанной в [11] (см. Т. 1.2.) для разрешимости и сингулярной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с функциональными краевыми условиями типа (φ). Близкий результат также находится в [9].

Лемма 1.: *Пусть для $p\,\forall\, t \in \langle a, b\rangle$ и $u, v \in R^n$ соблюдаются неравенства* (1) *и для $u, v \in C_n\langle a, b\rangle$ — неравенства* (2), *где функции h_{li}, h^*_{ij}, h^{**}_{ij}, ω_i — удовлетворяют в месте с функционалами ψ^*_{lij}, ψ^{**}_{lij} ($l = 1, 2$; $i, j = 1, \ldots, n$) предположениям а), б) и в) Теоремы 1. Пусть выше всего существует положительная постоянная r_0 такая, что*

$$\|x\|_{C^1_n} \leqq r_0 \tag{5}$$

какова бы ни была абсолютно непрерывная на $\langle a, b\rangle$ в месте с ее первой производной n-мерная вектор функция $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} x''_i(t)\operatorname{sign}[(t - t_{2i})\, x'_i(t)] &\leqq -h_{1i}(t)|x_i(t)| - h_{2i}(t)|x'_i(t)| + \\ &+ \sum_{j=1}^n h^*_{ij}(t)\,|x_j(t)| + \sum_{j=1}^n h^{**}_{ij}(t)\,|x'_j(t)| + \\ &+ \omega_i(t, \sum_{j=1}^n [|x_j(t)| + |x'_j(t)|])\ p\,\forall\, t \in \langle a, b\rangle \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} |x_i^{(l-1)}(t_{li})| \leqq \sum_{j=1}^n \psi^*_{lij}(|x_j(t)|) + \sum_{j=1}^n \psi^{**}_{lij}(|x'_j(t)|) + |c_{li}| \\ (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n). \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда задача (f, φ) разрешима.

Доказательство: Обозначим

$$y_i = \begin{cases} x_i \\ x'_{i-n} \end{cases} \quad \text{и} \quad t_i = \begin{cases} t_{1i} & \text{при } i = 1, \ldots, n \\ t_{2i-n} & \text{при } i = n + 1, \ldots, 2n, \end{cases}$$

$$F_i(y_1, \ldots, y_{2n}) = \begin{cases} y_{i+n} & \text{для } i = 1, \ldots, n \\ f_{i-n}(t, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n}) & \text{для } i = n + 1, \ldots, 2n, \end{cases}$$

$$\Phi_i(y_1, \ldots, y_{2n}) = \begin{cases} \varphi_{1i}(y_1, \ldots, y_{2n}) & \text{для } i = 1, \ldots, n \\ \varphi_{2i-n}(y_1, \ldots, y_{2n}) & \text{для } i = n + 1, \ldots, 2n, \end{cases}$$

$$G_i(t, |y_1|, \ldots |y_{2n}|) = \begin{cases} -h_{1i}(t)\,|y_i| + h_{1i}(t)\,|y_i| + |y_{i+n}| & \text{для } i = 1, \ldots, n \\ -h_{2i-n}(t)\,|y_i| + \sum_{j=1}^n h^*_{i-nj}(t)\,|y_j| + \\ \quad + \sum_{j=1}^n h^{**}_{i-nj}(t)\,|y_{j+n}| + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{2n} |y_j|) & \text{для } i = n + 1, \ldots, 2n \end{cases}$$

$$\Psi_i(|y_1|, \dots, |y_{2n}|) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \psi_{1ij}^*(|y_j|) + \sum_{j=1}^{n} \psi_{1ij}^{**}(|y_{j+n}|) + c_{1i} & \text{для } i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} \psi_{2ij}^*(|y_j|) + \sum_{j=1}^{n} \psi_{2ij}^{**}(|y_{j+n}|) + c_{2i} & \text{для } i = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Тогда очевидно что задачи (f, φ) (F, Φ), где

$$y_i' = F_i(t, y_1, \dots, y_{2n}) \quad (i = 1, \dots, 2n), \tag{F}$$

$$y_i(t_i) = \Phi_i(y_1, \dots, y_{2n}) \quad (i = 1, \dots, 2n), \tag{Φ}$$

эквиваленты, правые части неравенств (1), (2) принимают вид G_i, Ψ_i $(i = 1, \dots, 2n)$, свойства функций h_{2i}, h_{ij}^*, h_{ij}^{**}, ω_i и функционалов ψ_{lij}^*, ψ_{lij}^{**} $(l = 1, 2; i, j = 1, \dots, n)$ гарантируют соответсвующие предположениям Теоремы 1.2. [11] свойства функций G_i и функционалов ψ_i $(i = 1, \dots, 2n)$ и неравенства (1), (2), (5)–(7) принимают вид

$$F_i(t, y_1, \dots, y_{2n}) \operatorname{sign}[(t - t_i) y_i] \leqq G_i(t, |y_1|, \dots, |y_{2n}|) \quad (i = 1, \dots, 2n),$$

$$|\Phi_i(y_1, \dots, y_{2n})| \leqq \Psi_i(|y_1|, \dots, |y_{2n}|) \quad (i = 1, \dots, 2n),$$

$$\max\{\sum_{j=1}^{2n} |y_j(t)|; a \leqq t \leqq b\} \leqq r_0,$$

$$y_i' \operatorname{sign}[(t - t_i) y_i] \leqq G_i(t, |y_1|, \dots, |y_{2n}|) \quad (i = 1, \dots, 2n),$$

$$|y_i(t_i)| \leqq \psi_i(|y_1|, \dots, |y_{2n}|) \quad (i = 1, \dots, 2n).$$

Предпологая теперь существование постоянной r_0 в смысле предположений доказываемой леммы, из Т. 1.2. [11] следует разрешимость задачи (F, Φ) и отсюда также задачи (f, φ).

Лемма доказана.

Напомним также для доказательства теорем принятым методом И. Т. Кигурадзе (см. [8]) необходимое неравенство В. И. Левина (см. также [8], Лемма 4. 7.) в нам удобной форме:

Лемма 2.: *Пусть* $x \in L^s\langle\alpha, \beta\rangle$, где $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, $1 \leqq s \leqq \infty$ *и* $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$. *Тогда*

$$\| | \int_{t_0}^{t} | x(\tau) | \, d\tau | \|_{L^s\langle\alpha,\beta\rangle} \leqq (\beta - \alpha) \, l(s) \, \| x(t) \|_{L^s\langle\alpha,\beta\rangle}. \text{[1]} \tag{8}$$

Доказательство Теоремы 1.: Согласно Лемме 1. достаточно показать существование положительной постоянной r_0 такой, чтобы

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} [| x_i(t) | + | x_i'(t) |]; a \leqq t \leqq b\} \leqq r_0$$

[1]) Для $s = 2$ получается неравенство Виртингера, см. [6].

какова бы ни была абсолютно непрерывная с ее первой производной на сегменте $\langle a, b\rangle$ n-мерная вектор функция $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяющая неравенствам (6), (7).

Примем следующее векторное и матричное обозначение

$$x(t) = (x_i(t))_{i=1}^n, \; x(t_1) = (x_i(t_{1i}))_{i=1}^n, \; x'(t_2) = (x_i'(t_{2i}))_{i=1}^n,$$
$$\omega(t, r) = (\omega_i(t, r))_{i=1}^n, \; c_l = (c_{li})_{i=1}^n \; (l = 1, 2),$$
$$h_l(t) = (h_{li}(t))_{i=1}^n, \; D(x) = (\delta_{ij} x_j)_{i,j=1}^n,$$
$$H^*(t) = (h_{ij}^*(t))_{i,j=1}^n, \; H^{**}(t) = (h_{ij}^{**}(t))_{i,j=1}^n$$

и соответствующие правила алгебры векторов и матриц. Одновременно обозначения обсолютной величины, производной, интеграла, нормы (в пространстве суммируемых функций) и exp вектора или матрицы понимаются по компонентам. Например:

$$x'(t) = (x_i'(t))_{i=1}^n, \; |x'(t)| = (|x_i'(t)|)_{i=1}^n, \; \|H^*(t)\|_{L^{q_0}} = (\|h_{ij}^*(t)\|_{L^{q_0}})_{i,j=1}^n,$$
$$\exp\Big[-\int_{t_l}^t h_l(\tau)\operatorname{sign}(\tau - t_l)\,\mathrm{d}\tau\Big] = \Big(\exp - \int_{t_{li}}^t h_{li}(\tau)\operatorname{sign}(\tau - t_{li})\,\mathrm{d}\tau\Big)_{i=1}^n, \ldots$$

Пусть ниже, для определенности, предпологается, что $q_0 < +\infty$ (случай $q_0 = +\infty$ рассмотривается аналогично).

Из неравенств (6) получим

$$|x'(t)| \leqq$$
$$\leqq D(\alpha_2(t))\,|x'(t_2)| + D(\beta_2)\,\Big|\int_{t_2}^t [H^*(\tau)\,|x(\tau)| + H^{**}(\tau)\,|x'(\tau)| + \omega(\tau, r(\tau))]\,\mathrm{d}\tau$$

и, следовательно,

$$|x'(t)| \leqq D(\alpha_2(t))\,|x'(t_2)| + D(\beta_2)\,\Big|\int_{t_2}^t [H^*(\tau)\,|x(\tau)| + H^{**}(\tau)\,|x'(\tau)|]\,\mathrm{d}\tau + $$
$$+ D(\beta_2)\,\|\omega(t, r(t))\|_{L^1}, \tag{9}$$

где

$$r(t) = \sum_{j=1}^n [|x_j(t)| + |x_j'(t)|], \qquad t \in \langle a, b\rangle,$$

и из неравенств

$$x'(t)\,.\operatorname{sign}[(t - t_1)x(t)] \leqq |x'(t)| = D(-h_1(t))|x(t)| + D(h_1(t))|x(t)| + |x'(t)|,$$

где $h_{1i} : \langle a, b\rangle \to R^+$, $h_{1i} \in L\langle a, b\rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ получим

$$|x(t)| \leqq D(\alpha_1(t))|x(t_1)| + D(\beta_1)\Big|\int_{t_1}^t [D(h_1(\tau))|x(\tau)| + |x'(\tau)|]\,\mathrm{d}\tau\Big|. \tag{10}$$

Так как в силу неравенства Гелдера

$$\Big|\int_{t_2}^t H^*(\tau)\,|x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\Big| \leqq \|H^*(t)\|_{L^{p_0}} \cdot \|x(t)\|_{L^{q_0}},$$

$$|\int_{t_2}^{t} H^{**}(\tau)\,|x'(\tau)|\,d\tau| \leqq \| H^{**}(t)\|_{L^{p_0}} \| x'(t)\|_{L^{q_0}},$$
$$|\int_{t_1}^{t} D(h_1(\tau))\,|x(\tau)|\,d\tau| \leqq D(\| h_1(t)\|_{L^{p_0}}) \| x(t)\|_{L^{q_0}}$$

и $\beta_{il} \leqq 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$; $l = 1, 2$, из (9), (10) получим

$$|x'(t)| \leqq D(\alpha_2(t))|x'(t_2)| + D(\beta_2)\big[||H^*(t)||_{L^{p_0}} . ||x(t)||_{L^{q_0}} + \\ + ||H^{**}(t)||_{L^{p_0}} ||x'(t)||_{L^{q_0}}\big] + ||\omega(t, r(t))||_{L^1} \tag{11}$$
$$|x(t)| \leqq D(\alpha_1(t))|x(t_1)| + D(\beta_1)\big[D(||h_1(t)||_{L^{p_0}})||x(t)||_{L^{q_0}} + (b-a)^{1/p_0}||x'(t)||_{L^{q_0}}\big]. \tag{12}$$

Пологая неравенства (11), (12) в (7) получим

$$|x^{(l-1)}(t_l)| \leqq \Psi_l^*(\alpha_1(t))|x(t_1)| + \Psi_l^{**}(\alpha_2(t))|x'(t_2)| + T_{1l}||x(t)||_{L^{q_0}} + \\ + T_{2l}\,||x'(t)||_{L^{q_0}} + |c_l| \quad (l = 1, 2), \tag{13}$$

где

$$T_{1l} = D(\beta_1)\Psi_l^*(1)D(||h_1(t)||_{L^{p_0}}) + D(\beta_2)\Psi_l^{**}(1)||H^*(t)||_{L^{p_0}} \quad (l = 1, 2),$$
$$T_{2l} = (b-a)^{1/p_0}D(\beta_1)\Psi_l^*(1) + D(\beta_2)\Psi_l^{**}(1)||H^{**}(t)||_{L^{p_0}} \quad (l = 1, 2).$$

A) Если теперь

$$\varrho(\Psi_1^*(\alpha_1(t))) < 1, \quad \varrho(\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}\Psi_1^{**}(\alpha_2(t)) + \Psi_2^{**}(\alpha_2(t))) < 1,$$
$$S_{A1} = \big[E - \Psi_1^*(\alpha_1(t))\big]^{-1}, \quad S_{A2} = \big[E - (\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}\Psi_1^{**}(\alpha_2(t)) + \\ + \Psi_2^*(\alpha_2(t)))\big]^{-1},$$

то решением линейных неравенств (13) постепенно получается

$$|x(t_1)| \leqq S_{A1}\big[\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))|x'(t_2)| + T_{11}||x(t)||_{L^{q_0}} + T_{21}||x'(t)||_{L^{q_0}} + |C_1|\big],$$
$$|x'(t_2)| \leqq \big[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}\Psi_1^{**}(\alpha_2(t)) + \Psi_2^{**}(\alpha_2(t))\big]|x'(t_2)| + \\ + \big[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}T_{11} + T_{12}\big]||x(t)||_{L^{q_0}} + \big[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}T_{21} + T_{22}\big]||x'(t)||_{L^{q_0}} + \\ + \Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}|c_1| + |c_2|$$

и, следовательно,

$$|x'(t_2)| \leqq S_{11}||x(t)||_{L^{q_0}} + S_{12}||x'(t)||_{L^{q_0}} + S_{13}, \tag{14}$$
$$|x(t_1)| \leqq S_{21}||x(t)||_{L^{q_0}} + S_{22}||x'(t)||_{L^{q_0}} + S_{23}, \tag{15}$$

где

$$S_{11} = S_{A2}\big[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}T_{11} + T_{12}\big], \quad S_{12} = S_{A2}\big[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}T_{21} + \mathrm{T}_{22}\big],$$
$$S_{21} = S_{A1}\big[\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{11} + T_{11}\big], \quad S_{22} = S_{A1}\big[\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{12} + T_{21}\big],$$
$$S_{13} = S_{A2}\big[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{A1}|c_1| + |c_2|\big], \quad S_{23} = S_{A1}\big[\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{13} + |c_1|\big].$$

B) Если

$$\varrho(\Psi_2^{**}(\alpha_2(t)) < 1, \quad \varrho(\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}\Psi_2^*(\alpha_1(t)) + \Psi_1^*(\alpha_1(t))) < 1,$$

$$S_{B1} = [E - \Psi_2^{**}(\alpha_2(t))]^{-1}, \quad S_{B2} = [E - (\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}\Psi_2^*(\alpha_1(t)) + \\ + \Psi_1^*(\alpha_1(t)))]^{-1},$$

то из (13) постепенно получим

$$|x'(t_2)| \leqq S_{B1}[\Psi_2^*(\alpha_1(t))|x(t_1)| + T_{12}||x(t)||_{L^{q_0}} + T_{22}||x'(t)||_{L^{q_0}} + |c_2|],$$
$$|x(t_1)| \leqq [\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}\Psi_2^*(\alpha_1(t)) + \Psi_1^*(\alpha_1(t))]|x(t_1)| + \\ + [\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}T_{12} + T_{11}]||x(t)||_{L^{q_0}} + [\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}T_{22} + T_{21}]||x'(t)||_{L^{q_0}} + \\ + \Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}|c_2| + |c_1|$$

и опять перейдем к неравенствам (14), (15), где теперь

$$S_{11} = S_{B1}[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{21} + T_{12}], \quad S_{12} = S_{B1}[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{22} + T_{22}],$$
$$S_{21} = S_{B2}[\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}T_{12} + T_{11}], \quad S_{22} = S_{B2}[\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}T_{22} + T_{21}],$$
$$S_{13} = S_{B1}[\Psi_2^*(\alpha_1(t))S_{23} + |c_2|], \quad S_{23} = S_{B2}[\Psi_1^{**}(\alpha_2(t))S_{B1}|c_2| + |c_1|].$$

Из неравенств (9), (10) и неравенств

$$\| \, | \int_{t_2}^{t} H^*(\tau) \, | \, x(\tau) \, | \, d\tau \, | \, \|_{L^{q_0}} \leqq L^* \, \| \, x(t) \, \|_{L^{q_0}},$$
$$\| \, | \int_{t_2}^{t} H^{**}(\tau) \, | \, x'(\tau) \, | \, d\tau \, | \, \|_{L^{q_0}} \leqq L^{**} \, \| \, x'(t) \, \|_{L^{q_0}},$$
$$\| \, | \int_{t_1}^{t} D(h_1(\tau)) \, | \, x(\tau) \, | \, d\tau \, | \, \|_{L^{q_0}} \leqq (b-a)^{1/q_0} D(\| \, h_1(t) \, \|_{L^{p_0}}) \, \| \, x(t) \, \|_{L^{q_0}},$$
$$\| \, | \int_{t_1}^{t} | \, x'(\tau) \, | \, d\tau \, | \, \|_{L^{q_0}} \leqq (b-a) \, l(g_0) \, \| \, x'(t) \, \|_{L^{q_0}},$$

полученных с помощью неравенства Гелдера и Левина (8), вытекает, что

$$||x((t)||_{L^{q_0}} \leqq D(||\alpha_2(t)||_{L^{q_0}})|x'(t_2)| + D(\beta_2)[L^*||x(t)||_{L^{q_0}} + L^{**}||x((t)||_{L^{q_0}}] + \\ + (b-a)^{1/q_0}||\omega(t, r(t))||_{L^1},$$
$$||x(t)||_{L^{q_0}} \leqq D(||\alpha_1(t)||_{L^{q_0}})|x(t_1)| + (b-a)^{1/q_0}D(\beta_1)D(||h_1(t)||_{L^{p_0}})||x(t)||_{L^{q_0}} + \\ + (b-a)l(q_0)||x'(t)||_{L^{q_0}}.$$

Пологая в эти неравенства оценки (14), (15) получим

$$||x'(t)||_{L^{q_0}} \leqq [D(||\alpha_2(t)||_{L^{q_0}})S_{11} + D(\beta_2)L^*]||x)t)|| + \\ + [D(||\alpha_2(t)||_{L^{q_0}})S_{12} + D(\beta_2)L^{**}]||x'(t)|| + \\ + D(||\alpha_2(t)||_{L^{q_0}})S_{13} + (b-a)^{1/q_0}||\omega(t, r(t))||_{L^1}, \tag{16}$$

$$||x(t)||_{L^{q_0}} \leqq [D(||\alpha_1(t)||_{L^{q_0}})S_{21} + (b-a)^{1/q_0}D(\beta_1)D(||h_1(t)||_{L^{q_0}})]||x(t)||_{L^{q_0}} + \\ + [D(||\alpha_1(t)||_{L^{q_0}})S_{22} + (b-a)l(q_0)E]||x'(t)||_{L^{q_0}} + \\ + D(||\alpha_1(t)||_{L^{q_0}})S_{23}. \tag{17}$$

Так как

$$\varrho(D(||\alpha_1(t)||_{L^{q_0}})S_{21} + (b-a)^{1/q_0}D(\beta_1||h_1||_{L^{q_0}})) < 1,$$

$$\varrho([D(\|\alpha_2(t)\|_{L^{q_0}})S_{11} + D(\beta_2)L^*]S_3[D(\|\alpha_1(t)\|_{L^{q_0}})S_{22} + (b-a)l(q_0)E] +$$
$$+ [D(\|\alpha_2(t)\|_{L^{q_0}})S_{12} + D(\beta_2)L^{**}]) < 1,$$
$$S_3 = [E - (D(\|\alpha_1(t)\|_{L^{q_0}})S_{21} + (b-a)^{1/q_0}D(\beta_1\|h_1\|_{L^{p_0}}))]^{-1},$$

решая последние неравенства, можем заключить, что

$$\|x'(t)\|_{L^{q_0}} \leqq k_{11}\|\omega(t, r(t))\|_{L^1} + k_{12}, \tag{18}$$
$$\|x(t)\|_{L^{q_0}} \leqq k_{21}\|\omega(t, r(t))\|_{L^1} + k_{22}, \tag{19}$$

где k_{ij} $(i, j = 1, 2)$ достаточно большие постоянные существование и свойства которых вытекают из свойств матриц входящих в неравенства (16) и (17), т. е. k_{ij} $(i, j = 1, 2)$ не зависит от $x(t)$ и $x'(t)$ и $k_{i2} = 0$ $(i = 1, 2)$ если $\sum_{j=1}^{n} [|c_{1j}| + |c_{2j}|] = 0$.

В силу неравенств (11), (12), (14), (15) и (18), (19) есть также

$$r(t) = \sum_{j=1}^{n} [|x_j(t)| + |x_j'(t)|] \leqq k_0^* \| \omega^*(t, r(t)) \|_{L^1} + k_0^*, \qquad t \in \langle a, b\rangle, \tag{20}$$

где

$$\omega^*(t, r(t)) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(t, r(t))$$

и k_0^*, k_0^{**} — постоянные независящие от ни $x(t)$ ни $x'(t)$.

Обозначим

$$r_0 = \max\{r(t) \colon a \leqq t \leqq b\}$$

и напомним, что согласно предположению б) Теоремы 1., функция $\omega^*(t, r)$: $:\langle a, b\rangle \times R^+ \to R^+$ не убывает по второму аргументу и что для любой постоянной $k_0 > 0$ существует достаточно большое $r^* > 1/k_0$ такое, что

$$\|\omega^*(t, r)\|_{L^1} < k_0 \,.\, r \quad \text{для} \quad \forall r \geqq r^*. \tag{21}$$

Пусть

$$k_0 = \frac{r_0 - k_0^{**}}{r_0 k_0^*},$$

тогда $k_0 > 0$ и если допустим, что существует $r^{**} > r^*$ такое, что $r^{**} < r_0$, то из неравенств (20), (21) получим

$$r^{**} \leqq k_0^* \| \omega^*(t, r^{**}) \|_{L^1} + k_0^{**} < k_0^* \,.\, k_0 \,.\, r^{**} + k_0^{**} =$$
$$= \frac{r^{**}}{r_0}[r_0 - k_0^{**}] = r^{**} - \frac{k_0^{**}}{r_0} < r^{**}.$$

Полученное противоречие доказывает существование конечного r_0 удовлетворяющего предложениями Леммы 1. Теорема доказана.

Замечание 2.: Надо подчеркнуть что в виду типа данных краевых условий (допускающих разные условия в разных копмонентах) в первой фазе вычисления оценок нельзя непосредственно принять векторное и материчное обозначение. К приведенным в доказательстве неравенствам надо перейти от решения неравенств по компонентам.

Доказательство Теоремы 2.: Допустим обратное, т. е., пусть существуют два решения x_1, x_2 задачи (f, φ), $x_1(t) \neq x_2(t)$ на $\langle a, b \rangle$.

Тогда из неравенств (3), (4) для $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, получим неравенства (6), (7), где $\omega_i(t, \varrho) \equiv 0$, $c_{li} = 0$ $(l = 1, 2; i = 1, \dots, n)$. Следовательно, из неравенств (18), (19) получим, что

$$||x'(t)||_{L^{q_0}} = 0, \quad ||x(t)||_{L^{q_0}} = 0$$

и из неравенств (12) и (15) заключим, что $x(t) \equiv 0$. Приведенное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Замечание 3.: Для применения Теорем 1. и 2. к решению вопросов много численных задач часто достаточно использоваться более грубой формой в Теоремах приведенных условий. Для этого напомним два удобных правила (см. напр. [5]):

а) если A, B — две $n \times n$-матрицы, $0 \leqq A \leqq B$ то $\varrho(A) \leqq \varrho(B)$,

б) если A $n \times n$-неотрицательная матрица и k неотрицательная постоянная, то

$$\varrho(kA) = k \,.\, \varrho(A),$$

допускаю щие упрощение форм в предположениях Теорем 1., 2. приведенных матриц.

4. Для некоторых ограничений краевых условий (2) метод доказательства Теорем 1., 2. позволяет получить более тенкий результат, чем прямое следствие этих теорем. Это возможно тогда, когда в доказательстве можно выпустить хотя бы некоторые оценки краевых условий, например, если

$$\psi^*_{lij}(|u_j|) = r^*_{lij} \| u_j \|_{L^{k_{ij}}}; \qquad \psi^{**}_{lij}(|v_j|) = r^{**}_{lij} \| v_j \|_{L^{k'_{ij}}},$$

где r^*_{lij}, r^{**}_{lij}, $r \in R^+$, $\quad 1 \leqq k_{ij} \leqq q_0$, $\quad 1 \leqq k'_{ij} \leqq q_0$ $(l = 1, 2; i, j = 1, \dots, n)$.

Следствие 1.: *Пусть для* p $\forall t \in \langle a, b \rangle$ *и* $u, v \in R^n$ *соблюдаются неравенства* (1) *и*

$$\sup\{|\varphi_{li}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)| : u_j, v_j \in C\langle a, b \rangle, j = 1, \dots, n\} < +\infty$$
$$(l = 1, 2; i = 1, \dots, n).$$

Тогда для разрешимости задачи (f, φ) *достаточно, чтобы соблюдались предложения а) и б) Теоремы* 1. *и*

$$\varrho(D(\beta_2)[(b - a)l(q_0)L^* + L^{**}]) < 1,$$

где $D(\beta_2)$, L^*, L^{**} *— определены в предположении г) Теоремы* 1.

Доказательство: Из предположений следствия вытекает существование постоянных $c_{li} \in R$ таких, что соблюдаются неравенства (2) для

$\psi^*_{lij} = 0$, $\psi^{**}_{lij} = 0$ $(l = 1, 2;\ i, j = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\Psi^*_l(1) = \Psi^{**}_l(1) = \Psi^*_l(\alpha_k) = \Psi^{**}_l(\alpha_k) = T_{kl} = S_{kl} = M_l = M_3 = 0 \quad (k, l = 1, 2)$$

и

$$M_4 = (b - a)l(q_0)D(\beta_2)L^* + D(\beta_2)L^{**}.$$

Предположения Теоремы 1. очевидно выполняются.

Следствие 2.: *Пусть для* $p\ \forall\ t \in \langle a, b\rangle$ *и* $u, v \in R^n\{u_l, v_l \in R^n (l = 1, 2)\}$ *соблюдаются неравенства* (1) $\{(3)\}$ *и предположения а) и б) Теоремы* 1. *Если*

$$\alpha_{ll}|\lambda_{li}| < 1, \quad [\gamma_{1i} + (b - a)^{1/q_0}\beta_{1i}]\,||h_{1i}(t)||_{L^{p_0}} < 1 \quad (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$
$$\varrho(D(\gamma_2)[L^*_0 D(\mu) + L^{**}_0] + D(\beta_2)[L^* D(\mu) + L^{**}]) < 1,$$

где

$$\alpha_{li} = \exp\Big[-\int_{t_{li}}^{t_{li}} h_{li}(s)\,\mathrm{sign}\,(s - t_{li})\,\mathrm{d}s\Big] \qquad (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$

$$\gamma_{li} = [\beta_{li}|\lambda_{li}|\ ||\alpha_{li}(t)||_{L^{q_0}}]\,.\,[1 - |\lambda_{li}|\alpha_{li}]^{-1} \quad (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$
$$\mu_i = [(b - a)^{1/p_0}\gamma_{1i} + (b - a)l(q_0)]\,.\,[1 - (\gamma_{1i} + (b - a)^{1/q_0}\beta_{1i}||h_{1i}(t)||_{L^{p_0}})]^{-1}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$
$$D(\gamma_2) = (\delta_{ij}\gamma_{2i})^n_{i,j=1},\ D(\beta_2) = (\delta_{ij}\beta_{2i})^n_{i,j=1},\ D(\mu) = (\delta_{ij}\mu_i)^n_{i,j=1},$$

$\alpha_{li}(t)$, β_{li} $(l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n)$, $L^*_0, L^{**}_0, L^*, L^{**}$ *– определены в предположениях г) Теоремы* 1,

то задача (f, φ_3) *имеет хотя бы одно* $\{$*не более одного*$\}$ *решение.*

Доказательство: Если краевые условия даны в форме (φ_3), то

$$\psi^*_{1ij}(u) = |\lambda_{1i}u_i(t^*_{1i})|, \quad \psi^*_{2ij}(u) = 0 = \psi^{**}_{1ij}(v) \quad \text{и} \quad \psi^{**}_{2ij}(v) = |\lambda_{2i}v_i(t^*_{2i})|$$
$$(i, j = 1, \ldots, n).$$

Потому постепенно получим

$$\Psi^*_1(1) = D(|\lambda_1|),\ \Psi^*_2(1) = 0 = \Psi^{**}_1(1),\ \Psi^{**}_2(1) = D(|\lambda_2|),$$
$$\Psi^*_1(\alpha_1(t)) = D(|\lambda_1|\alpha_1(t^*_1)),\ \Psi^*_2(\alpha_1(t)) = 0 = \Psi^{**}_1(\alpha_2(t)),\ \Psi^{**}_2(\alpha_2(t)) = D(|\lambda_2|\alpha_2(t^*_2)|),$$
$$M_l = D(|\lambda_l|\alpha_l(t^*_l)))\ (l = 1, 2),$$
$$M_3 = D(\{\beta_1|\lambda_1|\ ||\alpha_1(t)||_{L^{q_0}} - [1 - |\lambda_1|\alpha_1(t^*_1)]^{-1} + (b - a)^{1/q_0}\beta_1\}.||h_1(t)||_{L^{p_0}}) \text{ и}$$
$$M_4 = D(\gamma_2)[L^*_0 D(\mu) + L^{**}_0] + D(\beta_2)[L^* D(\mu) + L^{**}].$$

Следствие вытекает из Теорем 1. и 2.

Замечание 5.: В Следствиях 1. и 2. приведенные условия гарантирующие существование решений соответствующих краевых задач получаются те же самые как из предположений г) Теоремы 1., так из предположений проведенных в Замечании 1.

Из предыдушего следствия непосредственно вытекает критерий существования и единственности решения периодической или антипериодической задач.

Следствие 3.: *Пусть для* $p\ \forall\, t \in \langle a, b\rangle$ *и* $u, v \in R^n \{u_l, v_l \in R^n\ (l = 1, 2)\}$ *соблюдаются неравенства*

$$\Delta_i f_i(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)\operatorname{sign} v_i \leqq$$
$$\leqq -h_{1i}(t)|u_i| - h_{2i}(t)|v_i| + \sum_{j=1}^n h_{ij}^*(t)|u_j| + \sum_{j=1}^n h_{ij}^{**}(t)|v_j| + \omega_i(t, \sum_{j=1}^n [|u_j| + |v_j|])$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$
$$\{\Delta_i[f_i(t, u_{11}, \ldots, u_{1n}, v_{11}, \ldots, v_{1n}) - f_i(t, u_{21}, \ldots, u_{2n}, v_{21}, \ldots, v_{2n})]\operatorname{sign}(v_{1i} - v_{2i}) \leqq$$
$$\leqq -h_{1i}(t)|u_{1i} - u_{2i}| - h_{2i}(t)|v_{1i} - v_{2i}| + \sum_{j=1}^n h_{ij}^*(t)|u_{1j} - u_{2j}| + \sum_{j=1}^n h_{ij}^{**}(t)|v_{1j} - v_{2j}|$$
$$(i = 1, \ldots, n)\}$$

где $\Delta_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, *функции* h_{2i}, h_{ij}^*, h_{ij}^{**} *и* ω_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют предложениям а) и б) Теоремы* 1. *и*

$$\alpha_{li} = \exp[-\|h_{li}(t)\|_{L^1}] < 1 \quad (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$
$$[\gamma_{1i} + (b - a)^{1/q_0}]\|h_{1i}(t)\|_{L^{p_0}} < 1 \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\varrho(D(\gamma_2)[L_0^* D(\mu) + L_0^{**}] + D(\beta_2)[L^* D(\mu) + L^{**}]) < 1,$$

где

$$\gamma_{li} = [\beta_{li}\|\alpha_{li}(t)\|_{L^{q_0}}] \cdot [1 - \alpha_{li}]^{-1} \quad (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$
$$\mu_i = [\gamma_{1i}(b - a)^{1/p_0} + (b - a)l(q_0)][1 - (\gamma_{1i} + (b - a)^{1/q_0})\|h_{1i}(t)\|_{L^{p_0}}]^{-1}$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$
$$D(\gamma_2) = (\delta_{ij}\gamma_{2i})_{i,j=1}^n, \quad D(\beta_2) = (\delta_{ij}\beta_{2i})_{i,j=1}^n \quad и \quad \beta_{li}\ (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$

$L_0^*, L_0^{**}, L^*, L^{**}$ — *определены в предположении г) Теоремы* 1.
Тогда существует хотя вы одно решение {не более одного решения} системы (f) удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} x_i(a) &= \sigma_{1i}x_i(b) \\ x_i'(a) &= \sigma_{2i}x_i'(b) \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\sigma_{li} \in \{-1, 1\}$ $(l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n)$.

Следствие 4.: *Пусть для* $p\ \forall\, t \in \langle a, b\rangle$ *и* $u, v \in R^n\{u_l, v_l \in R^n\ (l = 1, 2)\}$ *соблюдаются неравенства* (1) {(3)} *и предположения а) и б) Теоремы* 1. *Если соблюдаются предположения Следствия* 2., *где*

$$\alpha_{li} = \max\,\{[\exp - \int_{t_{li}}^{t} h_{li}(s)\operatorname{sign}(s - t_{li})\,ds]\,;\ t \in \langle a, b\rangle\} \qquad (l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n),$$

то задача (f, φ_4) *имеет хотя бы одно {не более одного} решение.*

Доказательство: Совершенно аналогично доказательству Следствия 2.

Следствие 5.: *Пусть для p* $\forall\, t \in \langle a, b\rangle$ *и* $u, v \in R^n \{u_l, v_l \in R^n\ (l = 1, 2)\}$ *соблюдаются неравенства*

$$f_i(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)\operatorname{sign}[(t - t_{2i})v_i] \leqq$$
$$\leqq -h_{1i}(t)\,|u_i| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{*}(t)\,|u_j| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{**}(t)\,|v_j| + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} [|u_j| + |v_j|])$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$
$$\{[f_i(t, u_{11}, \ldots, u_{1n}, v_{11}, \ldots, v_{1n}) - f_i(t, u_{21}, \ldots, u_{2n}, v_{21}, \ldots, v_{2n})]\operatorname{sign}[(t - t_{2i}).$$
$$.\,(v_{1i} - v_{2i})] \leqq$$
$$\leqq -h_{1i}(t)\,|u_{1i} - u_{2i}| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{*}(t)\,|u_{1j} - u_{2j}| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{**}(t)\,|v_{1j} - v_{2j}|\ (i = 1, \ldots, n)\},$$

где функции правых стран неравенств удовлетворяют предположениям а) и б) Теоремы 1. *Если теперь*

$$\alpha_{1i} = \int_a^b \alpha_{1i}(t)\,\mathrm{d}\xi_{1i}(t) < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\|h_{1i}(t)\|_{L^{p_0}}\,.\,[\|\alpha_{1i}(t)\|_{L^{q_0}}\gamma_{2i} + (b - a)^{1/q_0}\beta_{1i}] < 1 \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\varrho(L^{*}D(\mu) + L^{**} + D(\mu_0)) < 1,$$

где

$$\alpha_{2i} = \int_a^b \alpha_{1i}(t)\,\mathrm{d}\xi_{2i}(t)\ (i = 1, \ldots, n),\ D(\mu) = (\delta_{ij}\mu_i)_{i,j=1}^{n},\ D(\mu_0) = (\delta_{ij}\mu_{0i})_{i,j=1}^{n},$$
$$\gamma_{1i} = \beta_{1i}\left(\frac{\alpha_{2i}}{1 - \alpha_{1i}}\int_a^b \mathrm{d}\xi_{1i}(t) + \int_a^b \mathrm{d}\xi_{2i}(t)\right),\ \gamma_{2i} = \frac{\beta_{1i}}{1 - \alpha_{1i}}\int_a^b \mathrm{d}\xi_{1i}(t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\mu_i = [1 - \|h_{1i}(t)\|_{L^{p_0}}(\|\alpha_{1i}(t)\|_{L^{q_0}}\,.\,\gamma_{2i} + (b - a)^{1/q_0}\beta_{1i})]^{-1} \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\mu_{0i} = \gamma_{1i}[(b - a)^{1/p_0}\,.\,(\beta_{1i}\mu_i\|\alpha_1(t)\|_{L^{q_0}}\gamma_{2i} + 1) + (b - a)l(q_0)\beta_{1i}] \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и обозначение $\alpha_{1i}(t)$, β_{1i}, L^{*}, L^{**} — *соответствует обозначению предположения г) Теоремы* 1., *то задача* (f, φ_5) *имеет хотя бы одно* {*не более одного*} *решение.*

Доказательство: Из предположений следствия вытекает, что

$$\psi_{lij}^{*}(u) = \int_a^b u_i(t)\,|\mathrm{d}\xi_{li}(t)|, \qquad \psi_{lij}^{**}(v) = 0 \qquad (l = 1, 2;\ i, j = 1, \ldots, n),$$
$$\Psi_l^{*}(1) = D(\int_a^b |\mathrm{d}\xi_l(t)|), \qquad \Psi_l^{**}(1) = 0 \qquad (l = 1, 2),$$
$$\Psi_l^{*}(\alpha_1(t)) = D(\int_a^b \alpha_1(t)\,|\mathrm{d}\xi_l(t)|), \qquad \Psi_l^{**}(\alpha_2(t)) = 0 \qquad (l = 1, 2),$$

и отсюда

$$M_1 = D(\int_a^b \alpha_1(t)\,|\mathrm{d}\xi_1(t)|), \qquad M_2 = 0,$$

$M_3 = D(||h_1(t)||_{L^{p_0}}[||\alpha_1(t)||_{L^{q_0}}\gamma_2 + (b-a)^{1/q_0}\beta_1])$ и

$M_4 = L^* D(\mu) + L^{**} + D(\mu_0)$.

Следствие вытекает из Теорем 1. и 2.

Из следствий 1., 2., 4. и 5. непосредственно получается критерий существования и единственности так называемой смешанной или 2-ой задачи для системы (f):

Следствие 6.: *Пусть для* $p\ \forall\ t \in \langle a, b\rangle$ *и* $u, v \in R^n\{u_l, v_l \in R^n\ (l = 1, 2)\}$ *соблюдаются неравенства* (1) $\{(3)\}$ *и предложения а) и б) Теоремы* 1. *Если*

$$\varrho(D(\beta_2)[(b-a)l(q_0)L^* + L^{**}]) < 1,$$

где $D(\beta_2)$, L^*, L^{**} — *определены в предположении г) Теоремы* 1., *то задача* (f, φ_1) *имеет хотя бы одно* $\{$*не более одного*$\}$ *решение.*

Следствие 7.: *Пусть* $p\ \forall\ t \in \langle a, b\rangle$ *и* $u, v \in R^n$

$$|f_i(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)| \leqq K \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда для существования $\{$*единственности*$\}$ *решения задачи* (f, φ) *достаточно, чтобы соблюдались неравенства* (2) $\{(4)\}$ *и*

$$\varrho(M_i') < 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$M_1' = \Psi_1^*(1), \qquad M_2' = \Psi_2^*(1)[E - M_1']^{-1}\,\Psi_1^{**}(1) + \Psi_2^{**}(1),$$

$$M_3' = (b-a)[E - M_2']^{-1} M_2',$$

и $\Psi_l^*(1)$, $\Psi_l^{**}(1)$ $(l = 1, 2)$ — *определены в предположении г) Теоремы* 1.

Доказательство: Очевидно $h_{1i}(t) \equiv h_{2i}(t) \equiv h_{ij}^*(t) \equiv h_{ij}^{**}(t) \equiv 0$, $\omega_i(t, .) \equiv K$ на интервале $\langle a, b\rangle$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ и следовательно $\alpha_{li}(t) \equiv 1$, $\beta_{li} = 1$, $t \in \langle a, b\rangle$ $(l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n)$, $L_0^* = L_0^{**} = L^* = L^{**} = 0$. Тогда в обозначении Теоремы 1. будет

$$T_{1k} = S_{l1} = 0, \quad T_{2k} = (b-a)^{1/p_0}\Psi_k^*(1), \quad M_l = M_l'\ (k, l = 1, 2),$$

$$S_{12} = [E - M_2']^{-1}\{\Psi_2^*(1)[E - M_1']^{-1}T_{21} + T_{22}\},$$

$$S_{22} = [E - M_1]^{-1} \cdot [\Psi_2^{**}(1)S_{12} + T_{21}], \quad M_3 = 0, \quad M_4 = M_3'.$$

Замечание 6.: Пока это позволяют краевые условия задачи (f, φ), неравенства (1) и (2) возможно заменить одновременно более грубым неравенством

$$|f_i(t, u_{11}, \ldots, u_{1n}, v_{11}, \ldots, v_{1n}) - f_i(t, u_{21}, \ldots, u_{2n}, v_{21}, \ldots, v_{2n})| \leqq$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^*(t)\,|u_{1j} - u_{2j}| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{**}(t)\,|v_{1j} - v_{2j}|,$$

соблюдающимся для $p\ \forall\ t \in \langle a, b\rangle$ и $u_l, v_l \in R^n$ $(l = 1, 2)$.

Очевидно, это неравенство гарантирует справедливость неравенства (3) и потому, что $|a| \leqq |a - b| + |b|$ тоже и неравенства (1) при $h_{li}(t) \equiv 0$, $\omega_i(t, .) \equiv$ $\equiv f_i(t, 0, \ldots, 0)$ на $\langle a, b\rangle$ $(l = 1, 2; i = 1, \ldots, n)$.

7. В Следствиях 2., 3., 4., 6. и 7. приведенные критерия для $n = 1$ совпадают с утверждениями которые можно прямо вывести из критерий существования и единственности решений соответствующих задач для систем дифференциальных уравнений 1-го порядка доказанных в [12] и в случае задач (f, φ_1), (f, φ_2) также в [8]. Результаты этих работ получены тем же самым методом априорных оценок и решением каких-то дифференциальных неравенств.

8. Следствие 6. обобщает и улучшает результаты в [1] для задачи (f, φ_1) и если $h_{ij}^*(t) \equiv h_{ij}^*$, $h_{ij}^{**}(t) = h_{ij}^{**}$ – постоянные, $h_{li}(t) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$ и при какомто выборе q_{ij}, q'_{ij} и q_0 (напр. $q_{ij} = q'_{ij} = \frac{1}{2}q_0$, $i, j = 1, \ldots, n$). Метод работы [1] при этом опирается о вычисление функций Грина изученных 1-ой и 2-ой задач для системы (f) и ограничения правой стороны системы (f) имеют вид приведенный в Замечании 6. Тем самым, Следствие 6. прямо обобщает и результат полученный в [13] аналитически.

9. Теоремы 1. и 2. позволяют прямое решение некоторых задач полученных разными методами в [2], [3], [4], [7], [10] и [11]. Из Следствия 7. вытекает Т.1.1.3. из [3] о решении ленейной задачи для систем дифференциальных уравнений 2-го порядка полученного с помощью функций Грина, выше приведенные критерии также близки результатам § 3. Гл 9 [14] о краевых задачах для системы (f), изученных методом априорных оценок, из Следствия 6. можно вывести решение задач Ex.2.2.1. [3] и в случае одного дифференциального уравнения 2-го порядка также С.3.1. [2]. Из Следствия 7. частично получается Т.5.2. [4] и решения некоторых задач изученных в [4] топологическим методом. Близкие результаты для одного дифференциального уравнения 2-го порядка находятся в [15] или для дифференциального уравнения четного порядка также в [7] и [10].

REFERENCES

[1. Agarwal R. P., Vosmanský J.: *Two-point Boundary Value Problems for Second Order Systems.* Arch. Math. Brno (to appear).

[2] Bailey P. B., Shampine L. F., Waltman P. E.: *Nonlinear Two Point Boundary Value Problems.* Academic Press, New York and London, 1968.

[3] Bernfeld S. R., Lakshmikantham V.: *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems.* Academic Press, New York and London, 1974.

[4] Gaines R. E., Mahwin J.: *Ordinary Differential Equations with Nonlinear Boundary Conditions.* J. Differential Equations 26, 1977, No. 2, 200–222.

[5] Гантмахер Ф. Р.: *Теория матриц.* Москва, Гостехиздат, 1953

[6] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.: *Inequalities.* Cambridge University Press, 1934.

[7] Jackson L. K.: *Existence and Uniqueness of Solutions of Boundary Value Problems for Lipschitz, Equations.* J. Differential Equations 32, 1979, 76–90.

[8] Кигурадзе И. Т.: *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.* Тбилиси, изд. ТГУ, 1975

[9] Кигурадзе И. Т., Пужа Б.: *О некоторых краевых задачах для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.* Дифференциальные Уравнения, XII, № 12, 1976, 2139—2148
[10] Mehri, B., Emamirad H. A.: *On the Existence of a Periodic Solution of n th-Order Nonlinear Differential Equations.* J. Differential Equations 29, 1978, 297–303.
[11] Пужа Б.: *Об одной сингулярной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.* Arch. Math. Brno, XIII, 1977, 207—226
[12] Пужа Б.: *О разрешимости некоторых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* Scripta UJEP Brno, Vol. 10, 1980, № 8, 411—426
[13] Usmani R. A.: *A Uniqueness Theorem for a Boundary Value Problem.* Proceeding of the Am. Math. Soc., Vol. 77, 1979, No. 3, 329–335.
[14] Васильев Н. И., Клоков А. Ю.: *Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений,* Рига, 1978
[15] Baxley J. V.: *Nonlinear Second-Order Boundary Value Problems.* J. Differential Equations 45 1982, 389–407.

B. Půža
662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a
Чехословакия

Souhrn

O OKRAJOVÝCH ÚLOHÁCH PRO SYSTÉMY OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC DRUHÉHO ŘÁDU

BEDŘICH PŮŽA

Metodami podrobně rozpracovanými Prof. I. T. Kiguradze a jeho kolektivem jsou konstruovány efektivní postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení okrajových úloh s funkcionální okrajovou podmínkou pro systémy *n* diferenciálních rovnic 2. řádu. Zvláštními případy takových úloh jsou např. úlohy počáteční, periodická, smíšená, lineární, s extrémem... Získaná kriteria zpřesňují, zobecňují a doplňují třídu prozatím v literatuře publikovanách vásledků. Citace — 15 publikací.

Summary

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

BEDŘICH PŮŽA

Effective sufficient conditions of the existence and uniqueness of the solution of boundary value problems with functional boundary condition for systems of *n* differential equations of the second order are constructed by methods, detailed by prof. I. T. Kiguradze and his team. Special cases of such problems are e.q. initial, mixed, periodical, linear, with extrem... The obtained criteria precize, generalize and complete the class of results, published up to now. Citation — 15 publications.