

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica

František Machala

Über die Fortsetzung einer Anordnung der affinen Klingenbergischen Ebene in einer Anordnung der projektiven Klingenbergischen Ebene. I.

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 22 (1983), No. 1, 19--36

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/120133>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1983

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Ladislav Sedláček, CSc.*

**ÜBER DIE FORTSETZUNG EINER ANORDNUNG
DER AFFINEN KLINGENBERGSCHEN EBENE
IN EINER ANORDNUNG DER PROJEKTIVEN
KLINGENBERGSCHEN EBENE**

FRANTIŠEK MACHALA

I

(Eingelangt am 18. Feber 1982)

Die vorliegende Arbeit knüpft an die Artikel [2] und [3] an und benutzt die dort eingeführten Begriffe, Bezeichnungen und Verabredungen.

Es seien π eine PK-Ebene ([3], Def. 6) und α eine angeordnete in π einbettete AK-Ebene ([3], Def. 1.3, Satz 2 und Bem. 4). Auf jeder Geraden g von α ist eine Zwischenrelation erklärt und durch diese sind auf g zwei inverse Anordnungen hervorgerufen. Als (A3) und (A4) bezeichnen wir die folgenden Behauptungen:

(A3) Es seien a, b zwei Geraden und $A, B \in a; A', B' \in b$ uneigentliche Punkte. S sei ein solcher uneigentlicher Punkt mit $\bar{S} \notin \bar{a}, \bar{b}$, daß S, A, A' bzw. S, B, B' in einer (uneigentlichen) Geraden enthalten sind. Ferner sei Z ein Punkt und z eine Gerade mit $\bar{Z} \notin \bar{a}, \bar{b}, \bar{z}; z \parallel \bar{a}, z \parallel \bar{b}, \bar{S} \notin \bar{z}$ (Fig. 1). Wir setzen $R = z \cap SB, X = RZ \cap a, X' = RZ \cap b, A_1 = ZA \cap z, B_1 = ZB \cap z, A'_1 = ZA' \cap z, B'_1 = ZB' \cap z, Y_1 = ZS \cap z$. Dabei nehmen wir $\neg (XZX')$ an. Gilt $\neg (B_1Y_1B'_1)$ bzw. $(B_1Y_1B'_1)$, dann ist $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1$ bzw. $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow B'_1 \leq A'_1$ in der Anordnung von z .

(A4) Es seien S ein uneigentlicher Punkt, g eine uneigentliche Gerade und g' eine Gerade mit $\bar{S} \notin \bar{g}'$. A, B, C sind zu S ferne Punkte von g und A', B', C' derartige Punkte von g' , daß S, A, A' bzw. S, B, B' bzw. S, C, C' auf einer Geraden liegen (Fig. 2). Ferner sei Z ein Punkt und z eine Gerade mit $\bar{Z} \notin \bar{z}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{S} \notin \bar{z}$ und $z \parallel \bar{g}'$. Wir setzen $A_1 = ZA \cap z, B_1 = ZB \cap z, C_1 = ZC \cap z, A'_1 = ZA' \cap z, B'_1 = ZB' \cap z, C'_1 = ZC' \cap z, Y_1 = ZS \cap z$. Ist $(A_1C_1B_1)$, dann gilt

- (a) $(C_1 B_1 Y_1) \vee (C_1 A_1 Y_1) \Rightarrow (A'_1 C'_1 B'_1)$,
- (b) $(B_1 Y_1 C_1) \Rightarrow (B'_1 A'_1 C'_1)$,
- (c) $(A_1 Y_1 C_1) \Rightarrow (A'_1 B'_1 C'_1)$.

Definition 1. Durch einen Punkt P und Geraden g, g' von π ist eine Zentralprojektion (kurz Z-Projektion) $\varphi(S, g, g')$ bestimmt, wenn $S \notin \bar{g}'$ ist. Einem Punkt $A \in g$ mit $A \neq S$ entspricht ein Punkt $A' \in g'$ in $\varphi(S, g, g')$, falls S, A, A' in einer Geraden enthalten sind.

Bemerkung 1. Eine Z-Projektion $\varphi(S, g, g')$ soll nicht eine Abbildung sein. Ist $S \in \bar{g}$ und sind S, A mit $A \in g$ benachbart, so können zwei verschiedene Geraden durch S, A gehen, die g' in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dem Punkt A entsprechen dann in φ zwei verschiedene Punkte. Dem Punkt $X \in g$ mit $S \neq X$ entspricht in φ genau ein Punkt $X' = SX \cap g'$. In diesem Fall schreiben wir $\varphi(X) = X'$. Gilt $S \notin \bar{g}$, so ist $\varphi(S, g, g')$ eine bijektive Abbildung von g auf g' .

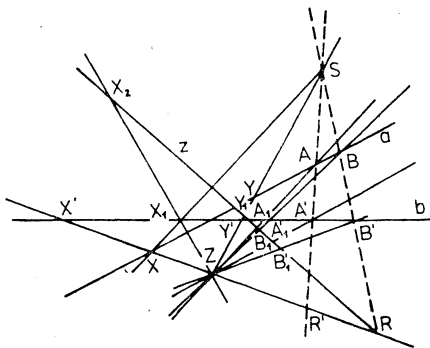


Fig. 1

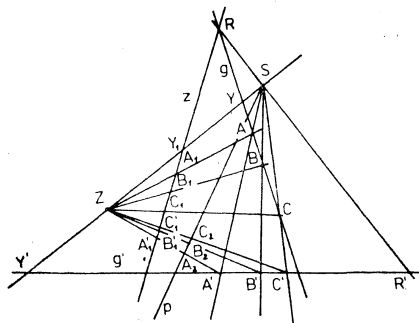


Fig. 2

Definition 2. Wir setzen voraus, daß auf jeder Geraden von π eine Trennrelation $|$ erklärt ist ([2], Def. 3). Eine Z-Projektion reproduziert $|$, wenn $AB | CD \Rightarrow A'B' | C'D'$ für derartige Punkte $A, B, C, D \in g$ und $A', B', C', D' \in g'$ gilt, welche folgenden Forderungen genügen:

1. A', B', C', D' entsprechen schrittweise den Punkten A, B, C, D in $\varphi(S, g, g')$.
2. Mindestens drei von A, B, C, D sind fern zu S .
3. Ist z. B. A benachbart zu S und sind S, A, A' in einer Geraden a enthalten, dann $\bar{a} \neq \bar{g}$.

Definition 3. Eine PK-Ebene π heißt geordnet, wenn es auf jeder Geraden von π mindestens vier voneinander ferne Punkte gibt und auf allen Geraden Trennrelationen erklärt sind, die mittels Z-Projektionen reproduziert werden. Eine angeordnete PK-Ebene heißt konvex, falls jede Menge $N(a, P)$ konvex ist ([3], Bem. 3, [2], Def. 4).

Theorem. Ist π eine konvex angeordnete PK-Ebene, dann jede in π eingebettete AK-Ebene ist konvex angeordnet und außerdem genügt sie unseren Forderungen (A3), (A4) und den Forderungen (A1), (A2) von [3].

Beweis. Es sei α eine durch eine Gerade u der konvex angeordneten PK-Ebene π bestimmte AK-Ebene. Für eine Gerade p von π mit $\bar{p} \neq \bar{u}$ gilt $p = p_\alpha \cup \mathcal{U}(p)$, wo p_α die Menge der eigentlichen und $\mathcal{U}(p)$ die Menge der uneigentlichen Punkte von p sind, wobei p_α zugleich eine Gerade von α bildet. Nach Definition 3 ist $\mathcal{U}(p)$

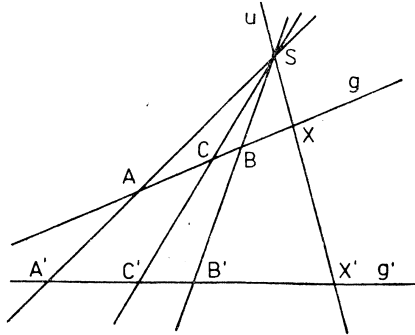


Fig. 3

eine konvexe Teilmenge von p . Nach [2], Satz 9 ist dann auch p_α konvex und gemäß [2], Satz 14 läßt sich eine Zwischenrelation auf p_α mit der auf p gegebenen Trennrelation $|$ folgendermaßen erklären: Für $A, B, C \in p_\alpha$ setzen wir $(ACB) : \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{U}(p), AB | CX$. Wir wollen zeigen, daß diese auf den Geraden von α definierte Zwischenrelationen durch die Parallelprojektionen reproduziert werden: Es sei $\varphi(\Pi(h), g, g')$ eine Parallelprojektion von α ([3], Def. 2). Sind X, X', S die Schnittpunkte von g, g', h mit u , dann aus $\bar{h} \parallel \bar{g}'$ folgt $\bar{X}' \neq \bar{S}$ und $\bar{S} \notin \bar{g}'$. Sind A, B, C Punkte von g_α mit (ACB) , dann unserer Definition nach gilt $AB | CX$ (Fig. 3). Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ ist $\psi(S, g, g')$ eine Z-Projektion in π und wegen $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \neq \bar{S}$ läßt sich $\psi(A) = \varphi(A) = SA \cap g' = A'$, $\psi(B) = \varphi(B) = SB \cap g' = B'$ und $\psi(C) = \varphi(C) = SC \cap g' = C'$ setzen. Da S, X, X' auf u liegen, so der Punkt X' entspricht dem Punkt X in ψ , wobei $\bar{g} \neq \bar{u}$ gilt. Hieraus erhält man nach Definitionen 2 und 3 $AB | CX \Rightarrow A'B' | C'X'$. Dies aber bedeutet $(ACB) \Rightarrow AB | CX \Rightarrow A'B' | C'X' \Rightarrow (A'C'B') \Rightarrow (\varphi(A) \varphi(C) \varphi(B))$.

Da auf jeder Geraden von π vier voneinander ferne Punkte existieren, gibt es auf jeder Geraden von α drei voneinander ferne Punkte. Nach [3], Def. 3 ist also α angeordnet. Wir zeigen, daß α konvex angeordnet ist ([4], Def. 8): Es seien A, B, C Punkte von p_α mit $B \in N(p, A)$ und (ACB) . Für einen beliebigen Punkt $X \in \mathcal{U}(p)$ gilt dann $AB | CX$. Da π konvex ist, ist $N(p, A)$ konvex und nach [2], Def. 4, Satz 8 folgt daraus $C \in N(p, A)$. Die Menge $N(p, A)$ ist also auch in α konvex und α ist konvex geordnet.

Nun beweisen wir, daß α den Forderungen (A1) bis (A4) genügt:

Ad (A1) Es seien g, h zwei verschiedene Geraden von α , die einen uneigentlichen Punkt S gemeinsam haben. Wählen wir einen Punkt $X \in h$, dann ist $X \notin g$ und $X \in H_g^+ \vee X \in H_g^-$ ([3], Satz 1). Es sei z. B. $X \in H_g^+$. Wir wollen zeigen, daß auch $Y \in H_g^+$ für einen beliebigen Punkt von h gilt. Es sei also $Y \in h$. Führen wir eine Gerade x mit $\bar{x} \neq \bar{h}$ durch X , dann ist $\bar{x} \parallel \bar{g}$ und wir können $A = x \cap g$ setzen. Nach [4], Satz 2 gibt es einen Punkt $M \in x$ mit $\bar{M} \neq \bar{X}$ und (AXM) . Ist s eine uneigentliche Gerade durch S und setzt man $P = x \cap s$, dann gilt $AM \parallel XP$ (Fig. 4).

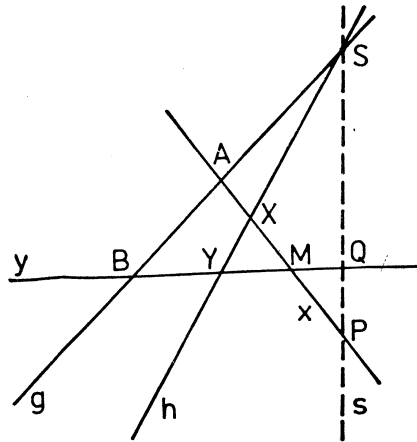


Fig. 4

Wegen $\bar{M} \neq \bar{X}$ und $\bar{x} \neq \bar{h}$ erhält man $\bar{M} \neq \bar{Y}$ und $\bar{y} \neq \bar{h}$, $\bar{y} \parallel \bar{g}$ für $y = MY$. Somit läßt sich $B = y \cap g$ und $Q = y \cap s$ setzen. Aus $\bar{y} \neq \bar{h}$ folgt zugleich $S \notin \bar{x}$ und $\varphi(S, x, y)$ ist eine Z-Projektion. Wegen $S \neq \bar{A}, \bar{X}, \bar{M}, \bar{P}$ gilt $\varphi(A) = B$, $\varphi(M) = M$, $\varphi(X) = Y$ und $\varphi(P) = Q$. Aus $AM \parallel XP$ folgt daher $BM \parallel YQ$ und (BYM) . Wird $M \in H_g^-$ angenommen, dann [3], (H3) impliziert $X \in H_g^+ \wedge M \in H_g^- \Rightarrow (XAM)$. Nach [1], (Z3) ergibt sich dann $(XAM) \wedge (AXM) \Rightarrow A = X$, was ein Widerspruch zu $g \neq h$ ist. Wegen $M \notin g$ gilt also $M \in H_g^+$. Aus $Y \in H_g^-$ folgt (YBM) und gemäß (BYM) ergibt sich $Y = B$, was wieder ein Widerspruch zu $g \neq h$ ist. Somit ist $Y \in H_g^+$ und folglich $h \subset H_g^+$.

Ad (A2) Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen von (A2), [3] erfüllt sind.

I. Es sei die Gerade p eigentlich. Wir setzen $Q = g \cap p$ (Fig. 5). Nach [2], (C2) gilt $SQ \parallel MS' \vee SM \parallel QS' \vee SS' \parallel MQ$ in der Trennrelation \parallel von p . Aus $S = S'$ und $S \neq \bar{M}$, \bar{Q} folgt $SS' \not\parallel MQ$, weil π konvex angeordnet ist. Mithin ist $SQ \parallel MS' \vee SM \parallel QS'$. Wegen $\bar{g} \neq \bar{g}'$ gilt $\bar{A}'', \bar{B}'' \notin \bar{g}$ und $\varphi_1(A'', p, g)$, $\varphi_2(B'', p, g)$ sind daher Z-Projektionen. Außerdem nach $\bar{A}'', \bar{B}'' \notin \bar{p}$ sind φ_1, φ_2 bijektive Abbildungen mit $\varphi_1(S) = A$, $\varphi_1(Q) = Q$, $\varphi_1(M) = R$, $\varphi_1(S') = A'$ und $\varphi_2(S) =$

$= B$, $\varphi_2(Q) = Q$, $\varphi_2(M) = R$, $\varphi_2(S') = B'$. Ferner nehmen wir an, daß auf g eine Anordnung \leq mit $A \leq A'$ durch zugehörige Zwischenrelation erklärt ist.

1. Es sei $SQ \mid MS'$. Unter Anwendung von φ_1 und φ_2 erhält man hieraus $AQ \mid RA'$ und $BQ \mid RB'$, also $(AA'Q)$ und $(BB'Q)$.

a) Es sei $\neg(A''MB'')$. Nach [1], (Z2) gilt dann $(A''B''M) \vee (B''A''M)$. Zunächst sei $(A''B''M)$, also $A''M \mid B''R$. Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}, \bar{g}'$ ist die Z-Projektion $\varphi(S, g', g)$ eine bijektive Abbildung mit $\varphi(A'') = A$, $\varphi(M) = Q$, $\varphi(B'') = B$ und $\varphi(R) = R$, woher man $A''M \mid B''R \Rightarrow AQ \mid BR \Rightarrow (ABQ)$ erhält. Aus $(AA'Q)$, (ABQ) und $(BB'Q)$ ergibt sich schrittweise $A \leq A' \Rightarrow A \leq Q \Rightarrow B \leq Q \Rightarrow B \leq B'$. Gilt $(B''A''M)$, dann ist $B''M \mid A''R$ und mittels φ ergibt sich $BQ \mid AR$, also (BAQ) .

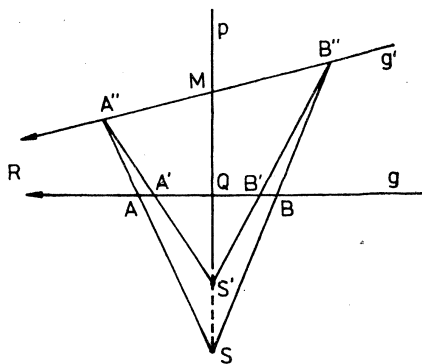


Fig. 5

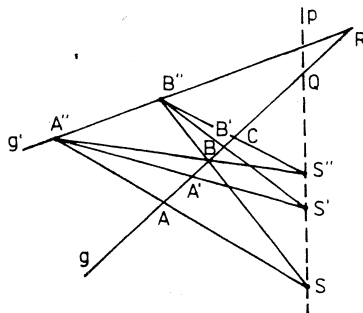


Fig. 6

Wegen $(AA'Q)$, (BAQ) und $(BB'Q)$ erhält man erneut $A \leq A' \Rightarrow A \leq Q \Rightarrow B \leq Q \Rightarrow B \leq B'$.

b) Gilt $(A''MB'')$, dann ist $A''B'' \mid MR$ und mittels $\varphi(S, g', g)$ ergibt sich $AB \mid QR$, also (AQB) . Entsprechend zu a) erhält man dann $A \leq A' \Rightarrow A \leq Q \Rightarrow Q \leq B \Rightarrow B' \leq B$.

2. Es sei $SM \mid QS'$. Unter Anwendung von $\varphi_1(A'', p, g)$, $\varphi_2(B'', p, g)$ ergibt sich dann $AR \mid QA'$, $BR \mid QB'$, also $(A'AQ)$, $(B'BQ)$.

a) Wir setzen $\neg(A''MB'')$, also $(A''B''M) \vee (B''A''M)$ voraus. Aus $(A''B''M)$ folgt analog zu 1a) (ABQ) . Wegen $(A'AQ)$, (ABQ) und $(B'BQ)$ erhält man $A \leq A' \Rightarrow Q \leq A \Rightarrow Q \leq B \Rightarrow B \leq B'$. Gilt $(B''A''M)$, dann ist (BAQ) und $A \leq A' \Rightarrow Q \leq A \Rightarrow Q \leq B \Rightarrow B \leq B'$.

b) Es sei $(A''MB'')$, also (AQB) . Aus $(A'AQ)$, (AQB) und $(B'BQ)$ folgt dann $A \leq A' \Rightarrow Q \leq A \Rightarrow B \leq Q \Rightarrow B' \leq B$.

II. Es sei die Gerade p uneigentlich. Wir setzen $Q = g \cap p$, $S'' = A''B \cap p$ und $C = B''S'' \cap g$ (Fig. 6). Nach [2], (C2) gilt $SS'' \mid S'Q \vee SS' \mid S''Q \vee S'S'' \mid SQ$. Wegen $\bar{g} \parallel \bar{g}'$ und $\bar{g} \neq \bar{g}'$ ist $A'', B'' \notin \bar{g}$ und $\varphi_1(A'', p, g)$, $\varphi_2(B'', p, g)$ sind Z-Projektionen. Da $\bar{A}'', \bar{B}'' \notin \bar{p}$ gilt, sind φ_1, φ_2 sogar bijektive Abbildungen und mithin

läßt sich $\varphi_1(S) = A$, $\varphi_1(S') = A'$, $\varphi_1(S'') = B$, $\varphi_1(Q) = Q$, $\varphi_2(S) = B$, $\varphi_2(S') = B'$, $\varphi_2(S'') = C$, $\varphi_2(Q) = Q$ setzen. Wir nehmen an, daß auf g eine Anordnung \leq mit $A \leq A'$ erklärt ist.

a) Es sei $SS'' | S'Q$. Mit φ_1 , φ_2 erhält man hieraus $AB | A'Q$ und $BC | B'Q$, also $(AA'B)$ und $(BB'C)$. $(AA'B)$ und $A \leq A'$ impliziert $A \leq B$. Wegen $\bar{R} \neq \bar{S}$ ist auch $\bar{R} \neq S''$ und $\psi_1(S, g, g')$, $\psi_2(S'', g', g)$ sind Z-Projektionen. Nach [3], Def. 8 sind ψ_1 , ψ_2 zugleich PZ-Projektionen und wegen $\psi_2\psi_1(A) = B$, $\psi_2\psi_1(B) = C$ folgt dann aus [3], Satz 8 $A \leq B \Rightarrow B \leq C$. Gemäß $(BB'C)$ erhält man hieraus $B \leq B'$.

b) Es sei $SS' | S''Q$. Mit φ_1 , φ_2 ergibt sich $AA' | BQ$ und $BB' | CQ$, also (ABA') und (BCB') , woraus $A \leq A' \Rightarrow A \leq B$ folgt. Unter Anwendung von ψ_1 , ψ_2 erhält man entsprechend zu a) $A \leq B \Rightarrow B \leq C$ und wegen (BCB') folgt daraus $B \leq B'$.

c) Es sei $S'S'' | SQ$, also $A'B | AQ$, $B'B | BQ$ und $(A'AB)$, $(B'BC)$. Dann $A \leq A'$ und $(A'AB)$ impliziert $B \leq A$, woher sich mittels ψ_1 , ψ_2 $C \leq B$ ergibt. Nach $(B'BC)$ gilt dann $B \leq B'$.

Ad (A3) Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen von (A3) erfüllt sind (Fig. 1). Setzen wir $Y = SZ \cap a$ und $Y' = SZ \cap b$, dann wegen $\bar{S} \notin \bar{a}$, \bar{b} sind Y, Y' eigentlich. Ferner setzen wir $X_1 = SX \cap b$ und $X_2 = ZX_1 \cap z$. Da die Menge $\mathcal{U}(a)$ konvex in π ist, so $A, B \in \mathcal{U}(a)$ und $X, Y \in a_z$ impliziert $XY \dagger AB$, woraus nach [2], (C2) $XA | YB \vee XB | YA$ folgt.

1. Es sei $XA | YB$. Da wegen $\bar{Z} \notin \bar{a}$, \bar{z} die Z-Projektion $\varphi_1(Z, a, z)$ eine bijektive Abbildung ist, gilt $\varphi_1(X) = R$, $\varphi_1(A) = A_1$, $\varphi_1(Y) = Y_1$, $\varphi_1(B) = B_1$ und folglich $XA | YB \Rightarrow RA_1 | Y_1B_1$, also $(Y_1A_1B_1)$. Unter Anwendung von $\varphi_2(S, a, b)$ ergibt sich analog $XA | YB \Rightarrow X_1A' | Y'B'$, woher man mittels $\varphi_3(Z, b, z)$ $X_2A'_1 | Y_1B'_1$ erhält. Unserer Voraussetzung $\neg (XZX')$ nach ist $XX' \dagger ZR$. Wegen $\bar{S} \neq \bar{R}$, $\bar{S} \notin \bar{b}$ und $\bar{Z} \notin \bar{b}$, \bar{z} ergibt sich dann unter Anwendung der Z-Projektionen $\psi_1(S, ZR, b)$, $\psi_2(Z, b, z)$ schrittweise $XX' \dagger ZR \Rightarrow X_1X' \dagger Y'B'$ und $X_1X' \dagger Y'B' \Rightarrow X_2R \dagger Y_1B'_1$. Aus $\bar{S} \notin \bar{b}$ folgt $\bar{Y}_1 \neq \bar{A}_1$. Gilt zugleich $A'_1 \neq B'_1$, dann ergibt sich nach [2], Satz 5 $Y_1B'_1 | X_2A'_1 \wedge Y_1B'_1 \dagger X_2R \Rightarrow Y_1B'_1 | A'_1R$, also $(Y_1A'_1B'_1)$. Nach [1], (Z5c) gilt $(Y_1A'_1B'_1)$ auch im umgekehrten Fall $A'_1 = B'_1$. Zunächst nehmen wir $\neg (B_1Y_1B'_1)$ an. Ist $A_1 \leq B_1$ in der Anordnung von z , dann wegen $(Y_1A_1B_1)$ gilt $Y_1 \leq B_1$. Aus $B'_1 \leq Y_1$ folgt hieraus $B'_1 \leq Y_1 \leq B_1$, was ein Widerspruch zu $\neg (B_1Y_1B'_1)$ ist. Mithin gilt $Y_1 < B'_1$ und $(Y_1A'_1B'_1)$ impliziert $A'_1 \leq B'_1$. Wird $(B_1Y_1B'_1)$ angenommen, so wegen $(Y_1A_1B_1)$ und $(Y_1A'_1B'_1)$ erhält man $A_1 \leq B_1 \Rightarrow Y_1 \leq B_1 \Rightarrow B'_1 \leq Y_1 \Rightarrow B'_1 \leq A'_1$.

2. Es sei $XB | YA$. Mit der Z-Projektion $\varphi_1(Z, a, z)$ ergibt sich $XB | YA \Rightarrow RB_1 | Y_1A_1$, also $(Y_1B_1A_1)$. Die Anwendung von $\varphi_2(S, a, b)$ und $\varphi_3(Z, b, z)$ führt zu $X_1B' | Y'A'$ und $X_2B'_1 | Y_1A'_1$. Setze $R' = SA \cap ZR$, dann $\neg (XZX')$ impliziert $XX' \dagger ZR'$ und mit $\psi_1(S, ZR, b)$, $\psi_2(Z, b, z)$ ergibt sich hieraus $XX' \dagger ZR' \Rightarrow X_1X' \dagger Y'A' \Rightarrow X_2R \dagger Y_1A'_1$. Wegen $\bar{S} \notin \bar{b}$ gilt $\bar{Y}_1 \neq \bar{B}_1$. Ist zugleich $A'_1 \neq B'_1$, dann erhält man nach [2], Satz 5 $Y_1A'_1 | X_2B'_1 \wedge Y_1A'_1 \dagger X_2R \Rightarrow Y_1A'_1 | B'_1R \Rightarrow$

$\Rightarrow (Y_1 B_1' A_1')$. Dies gilt aber auch im Fall $A_1' = B_1'$. Es sei $\neg (B_1 Y_1 B_1')$. Wegen $(Y_1 B_1 A_1)$ ist $A_1 \leq B_1 \Rightarrow B_1 \leq Y_1$, woraus $B_1' < Y$ folgt, denn das Gegenteil $Y_1 \leq B_1'$ führt wegen $B_1 \leq Y_1 \leq B_1'$ zum Widerspruch. Nach $(Y_1 B_1' A_1')$ ergibt sich also $A_1' \leq B_1'$. Aus $(B_1 Y_1 B_1')$ folgt ähnlich $A_1 \leq B_1 \Rightarrow B_1 \leq Y_1 \Rightarrow Y_1 \leq B_1' \Rightarrow B_1' \leq A_1'$.

Ad (A4) Es seien die Voraussetzungen von (A4) erfüllt. Setzen wir $R = z \cap g$, dann wegen $\bar{R} \neq \bar{S}$ gibt es einen uneigentlichen Punkt $R' = RS \cap g'$ (Fig. 2). Ist $Y = ZS \cap g$, $Y' = ZS \cap g'$, $Y_1 = ZS \cap z$ gesetzt, dann gilt $\bar{Y} = \bar{S}$ und wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ ist Y' eigentlich. Durch S führen wir derartige Gerade p mit $\bar{Z} \notin \bar{p}$, daß $\neg (A_1' Z A_2)$ für $A_2 = Z A' \cap p$ gilt. Wegen $\bar{A}' = \bar{B}' = \bar{C}'$ ist $\bar{Z A}' = \bar{Z B}' = \bar{Z C}'$ und nach [3], Beweis von Satz 12 gilt $\neg (B_1' Z B_2)$, $\neg (C_1' Z C_2)$ für die Punkte $B_2 = Z B' \cap p$, $C_2 = Z C' \cap p$.

a) Es sei $(C_1 B_1 Y_1) \vee (C_1 A_1 Y_1)$. Aus $A_1 = C_1$ folgt schrittweise $A = C$, $A' = C'$ und $A_1' = C_1'$, woher sich $(A_1' C_1' B_1')$ ergibt. Analog erhält man $(A_1' C_1' B_1')$ auch im Fall $B_1 = C_1$. Ferner nehmen wir also $A_1 \neq C_1$ und $B_1 \neq C_1$ an.

α) Es sei $(C_1 B_1 Y_1)$. Nach [1], (Z5) ist $(A_1 C_1 B_1) \wedge (C_1 B_1 Y_1) \Rightarrow (A_1 C_1 Y_1) \vee \vee C_1 = B_1$, also $(A_1 C_1 Y_1)$, denn $B_1 \neq C_1$ wird vorausgesetzt. Gemäß [1], (Z6) ergibt sich dann $(Y_1 B_1 C_1) \wedge (Y_1 C_1 A_1) \Rightarrow (Y_1 B_1 A_1)$. Gilt dabei $(A_1 Y_1 B_1)$, so nach [1], (Z3) ist $Y_1 = B_1$ und folglich $Y = B$, was ein Widerspruch zu $\bar{Y} = \bar{S}$ und $\bar{B} \neq \bar{S}$ ist. Somit erhält man $\neg (A_1 Y_1 B_1)$ und $(A_1 C_1 B_1) \Rightarrow A_1 B_1 \mid C_1 R$, $\neg (A_1 Y_1 B_1) \Rightarrow A_1 B_1 \nmid Y_1 R$. Wegen $C_1 \neq A_1, B_1$ ergibt sich dann nach [2], Satz 5 $A_1 B_1 \mid C_1 R \wedge A_1 B_1 \nmid Y_1 R \Rightarrow A_1 B_1 \mid C_1 Y_1$. Da die Z-Projektion $\varphi_1(Z, z, g)$ eine bijektive Abbildung ist, gilt $\varphi_1(A_1) = A$, $\varphi_1(B_1) = B$, $\varphi_1(C_1) = C$, $\varphi_1(Y_1) = Y$ und folglich $A_1 B_1 \mid C_1 Y_1 \Rightarrow AB \mid CY$. Da $\bar{S} \neq \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$; $\bar{S} = \bar{Y}$ gilt und S, Y, Y' auf der Geraden ZS mit $\bar{ZS} \neq \bar{g}$ liegen, so unter Anwendung der Z-Projektion $\varphi_2(S, g, g')$ erhält man $AB \mid CY \Rightarrow A'B' \mid C'Y'$, woher sich mit $\varphi_3(Z, g', p)$ $A'B' \mid C'Y' \Rightarrow A_2 B_2 \mid C_2 S$ und folglich $(A_2 C_2 B_2)$ ergibt. Wegen $\neg (A_1' Z A_2)$, $\neg (B_1' Z B_2)$, $\neg (C_1' Z C_2)$ und $\bar{Z} \neq \bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2$ gilt dann nach [3], Satz 4 $(A_2 C_2 B_2) \Rightarrow (A_1' C_1' B_1')$.

β) Es sei $(C_1 A_1 Y_1)$. Nach [1], (Z5) ist $(Y_1 A_1 C_1) \wedge (A_1 C_1 B_1) \Rightarrow (Y_1 C_1 B_1) \vee \vee A_1 = C_1$, was wegen $A_1, B_1 \neq C_1$ schrittweise $(Y C_1 B_1)$ und $\neg (C_1 B_1 Y_1)$ bedeutet. Aus $(C_1 A_1 Y_1)$ und $\neg (C_1 B_1 Y_1)$ folgt dann $C_1 Y_1 \mid A_1 R$ und $C_1 Y_1 \nmid B_1 R$. Gemäß $A_1 \neq C_1, Y_1$ erhält man daraus nach [2], Satz 5 $C_1 Y_1 \mid A_1 R \wedge C_1 Y_1 \nmid B_1 R \Rightarrow C_1 Y_1 \mid A_1 B_1$. Unter Anwendung von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ergibt sich schrittweise $A_1 B_1 \mid C_1 Y_1 \Rightarrow AB \mid CY \Rightarrow A'B' \mid C'Y' \Rightarrow A_2 B_2 \mid C_2 S \Rightarrow (A_2 C_2 B_2)$. Hieraus folgt nach [3], Satz 4 $(A_1' C_1' B_1')$.

b) Es sei $(B_1 Y_1 C_1)$. Aus $A_1 = C_1$ folgt $A_1' = C_1'$ und $(B_1' A_1' C_1')$. Ferner sei $A_1 \neq C_1$. $(A_1 C_1 B_1)$ impliziert dann $\neg (B_1 A_1 C_1)$ und wegen $(B_1 Y_1 C_1)$, $\neg (B_1 A_1 C_1)$ ist $B_1 C_1 \mid Y_1 R$, $B_1 C_1 \nmid A_1 R$, woraus sich wegen $Y_1 \neq B_1, C_1$ nach [2], Satz 5 $B_1 C_1 \mid A_1 Y_1$ ergibt. Mittels $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ erhält man dann $B_1 C_1 \mid A_1 Y_1 \Rightarrow BC \mid AY \Rightarrow B'C' \mid A'Y' \Rightarrow B_2 C_2 \mid A_2 S \Rightarrow (B_2 A_2 C_2)$ und folglich $(B_1' A_1' C_1')$.

c) Es sei $(A_1 Y_1 C_1)$. Aus $B_1 = C_1$ folgt $B_1' = C_1'$ und $(A_1' B_1' C_1')$. Ferner sei

$B_1 \neq C_1$. Dann ist $\neg(A_1 B_1 C_1)$ und $(A_1 Y_1 C_1) \Rightarrow A_1 C_1 | Y_1 R$, $\neg(A_1 B_1 C_1) \Rightarrow A_1 C_1 | B_1 R$, woraus sich nach [2], Satz 5 $A_1 C_1 | B_1 Y_1$ ergibt. Entsprechend zu vorigen Fällen gilt $A_1 C_1 | B_1 Y_1 \Rightarrow AC | BY \Rightarrow A'C' | B'Y' \Rightarrow A_2 C_2 | B_2 S \Rightarrow (A_2 B_2 C_2) \Rightarrow (A'_1 B'_1 C'_1)$.

Damit ist das Theorem bewiesen.

Im folgenden wird angenommen, daß eine PK-Ebene π gegeben ist. Durch eine Gerade u sei eine AK-Ebene α in π erklärt ([3], Def. 7, Satz 2), wobei die Verabredungen von [3], Bemerkung 4 respektiert werden. Ferner setzt man voraus, daß α angeordnet ist ([3], Def. 3) und die Forderungen (A1), (A2) erfüllt sind.

Ist p eine Gerade von π mit $\bar{p} \neq \bar{u}$, dann gilt $p = p_\alpha \cup \mathcal{U}(p)$, wo p_α bzw. $\mathcal{U}(p)$ die Menge der eigentlichen bzw. uneigentlichen Punkte von p bedeutet. Da α angeordnet ist, so ist eine Zwischenrelation auf p_α definiert und durch diese sind zwei inverse Anordnungen auf p_α erklärt. Durch die Zwischenrelationen auf p_α und mittels der Sätze von [3] definieren wir weiter die Zwischenrelationen auf $\mathcal{U}(p)$ und auf den uneigentlichen Geraden von π . Mit diesen Zwischenrelationen erklären wir dann eindeutig die Anordnungen auf den zugehörigen Mengen. Im Teil II dieses Artikels verwenden wir diese angeführten Begriffe zum Beweis des fundamentalen Theorems: Gelten in der angeordneten AK-Ebene α die Forderungen (A1) bis (A4), dann die PK-Ebene π läßt sich im Sinne der Definition 3 konvex anordnen.

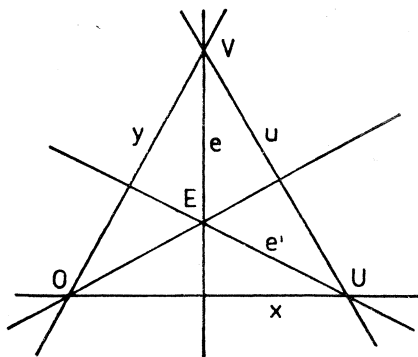


Fig. 7

Wir wählen vier Punkte O, E, U, V von π mit $U, V \in u$, so daß keine drei der Punkte O, E, U, V in einer Geraden der projektiven Ebene π' ([3], Def. 6) enthalten sind. Dann sind O, E eigentlich. Wir setzen $x = OU$, $y = OV$, $e = VE$, $e' = EU$ (Fig. 7). Ferner setzen wir voraus, daß O, E, U, V fest gewählt sind.

Es sei p eine Gerade von π mit $\bar{p} \neq \bar{u}$. Wir definieren eine Zwischenrelation auf $\mathcal{U}(p)$ durch die folgende Vorschrift:

(U1) Es seien $A, B, C \in \mathcal{U}(p)$. Wir wählen einen (eigentlichen) Punkt S mit $S \notin \bar{p}$ und setzen $a = SA, b = SB, c = SC$. Wegen $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C}$ ist dann $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$ und $b, c \in N(S, a)$ ([3], Bem. 3). Nach [3], Def. 10 ist auf $N(S, a)$ eine Zwischenrelation erklärt. Wir setzen $(ABC): \Leftrightarrow (abc)$.

Nach [3], Satz 13 ist die Definition (U1) von der Wahl des Punktes S unabhängig.

Es sei v eine uneigentliche Gerade. Mit $\mathcal{V}(v)$ bezeichnen wir die Menge der zu V benachbarten Punkte von v und setzen $\mathcal{W}(v) = v \setminus \mathcal{V}(v)$. Die Zwischenrelation auf $\mathcal{V}(v)$ definieren wir folgendermaßen:

(U2) Wir wählen einen Punkt S und für $A, B, C \in \mathcal{V}(v)$ setzen wir $a = SA, b = SB, c = SC$. Da $b, c \in N(S, a)$ ist, können wir entsprechend zu (U1) $(ABC): \Leftrightarrow (abc)$ setzen.

Die Zwischenrelation auf $\mathcal{W}(v)$ definieren wir, wie folgt:

(U3) Es seien $A, B, C \in \mathcal{W}(v)$. Wir wählen einen Punkt S und setzen $p = SV, a = SA, b = SB, c = SC$. Wegen $\bar{V} \neq \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ sind a, b, c zu p fern und deshalb ist $a, b, c \in F(S, p)$. Nach [3], Def. 11 ist auf $F(S, p)$ eine Zwischenrelation erklärt. Wir setzen $(ABC): \Leftrightarrow (abc)$.

Nach [3], Satz 15 ist die Definition (U3) von der Wahl des Punktes S unabhängig.

Auf jeder Menge mit einer Zwischenrelation läßt sich nach [1], (2.3) ein Paar voneinander inversen Anordnungen bestimmen, die die zugehörige Zwischenrelation reproduzieren. Im folgenden führen wir die Regeln (B1) bis (B6) an, mit denen sich genau eine Anordnung der betrachteten Teilmengen von Geraden bestimmen läßt.

(B1) Es sei die Gerade p eigentlich mit $\bar{p} \nparallel \bar{y}$. Wir betrachten die Menge aller zu y parallelen Geraden, also die Richtung $\Pi(y)$. Nach [3], Def. 4 ist eine Zwischenrelation auf $\Pi(y)$ definiert. Mit dieser Zwischenrelation läßt sich solche Anordnung \leq auf $\Pi(y)$ erklären, daß $y \leq e$ gilt ([3], Bem. 2, [1], (2.3)). Sind $A, B \in p_\alpha$ gegeben, dann setzen wir $A \leq B \Leftrightarrow VA \leq VB$. Damit ist genau eine Anordnung auf p_α bestimmt, welche die gegebene Zwischenrelation von p_α reproduziert, d. h. $(ABC) \Leftrightarrow \bar{A} \leq \bar{B} \leq \bar{C} \vee \bar{C} \leq \bar{B} \leq \bar{A}$ gilt.

(B2) Es sei die Gerade p eigentlich mit $\bar{p} // \bar{y}$. Auf der Richtung $\Pi(x)$ definieren wir eine Zwischenrelation und durch diese Zwischenrelation erklären wir die Anordnung \leq von $\Pi(x)$ mit $x \leq e'$. Sind $A, B \in p_\alpha$ gegeben, dann setzen wir $a = UA, b = UB$ und $A \leq B: \Leftrightarrow a \leq b$.

(B3) Es sei die Gerade p eigentlich mit $\bar{p} \nparallel \bar{y}$. Wir führen die Anordnung \leq auf der Menge $\mathcal{U}(p)$ folgendermaßen an: Es seien $A, B \in \mathcal{U}(p)$. Wir wählen einen Punkt S mit $S \notin p$ derart, daß $SA \neq SB$ im Falle $A \neq B$ ist und setzen $a = SA, b = SB, c = SV, N = c \cap p$ (Fig. 8). Auf c wählen wir einen zu S fernen Punkt M mit $\sqcap(MSN)$ und durch M führen wir eine zu c ferne Gerade m mit $\bar{m} \nparallel \bar{p}$. Wird $A_1 = m \cap a$ und $B_1 = m \cap b$ bezeichnet, dann setzen wir $A \leq B$ genau dann, wenn $A_1 \leq B_1$ in der mittels (B1) definierten Anordnung von m_α gilt.

Im folgenden Satz (S1) beweist man, daß die durch (B3) angeführte Anordnung von $\mathcal{U}(p)$ von der Wahl der Punkte S, M und der Geraden m unabhängig ist.

(S1) Es seien p eine eigentliche Gerade mit $\bar{p} \parallel \bar{y}$, A, B Punkte von $\mathcal{U}(p)$ und S_1, S_2 Punkte mit $S_1, S_2 \notin p$, für die $S_1A \neq S_1B, S_2A \neq S_2B$ für $A \neq B$ gilt. Wir setzen $c_1 = S_1V, c_2 = S_2V, a_1 = S_1A, b_1 = S_1B, a_2 = S_2A, b_2 = S_2B, N_1 = c_1 \cap p$ und $N_2 = c_2 \cap p$. M_1 bzw. M_2 sei ein zu S_1 bzw. S_2 ferner Punkt von c_1 bzw. c_2 .

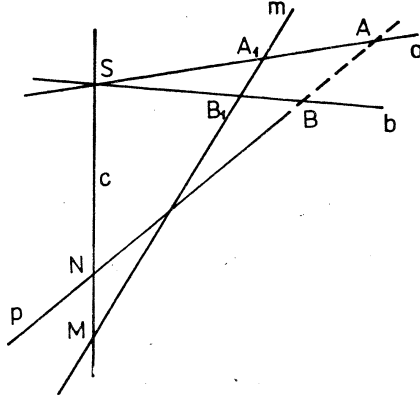


Fig. 8

Durch M_1 bzw. M_2 führen wir eine Gerade m_1 bzw. m_2 mit $\bar{m}_1 \neq \bar{c}_1, \bar{m}_1 \parallel \bar{p}$ bzw. $\bar{m}_2 \neq \bar{c}_2, \bar{m}_2 \parallel \bar{p}$ und setzen $A_1 = m_1 \cap a_1, B_1 = m_1 \cap b_1, A_2 = m_2 \cap a_2, B_2 = m_2 \cap b_2$. Ist $\neg(M_1S_1N_1), \neg(M_2S_2N_2)$ bzw. $\neg(M_1S_1N_1), (M_2S_2N_2)$, dann gilt $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$ bzw. $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$ in den nach (B1) definierten Anordnungen von m_1 und m_2 .

Beweis. 1. Zuerst nehmen wir an, daß S_1, S_2 in einer durch p bestimmten Halbebene liegen. Es sei z. B. $S_1, S_2 \in H_p^+$. Nach [4], Satz 2 gibt es einen Punkt Q von p mit $\neg(N_1QN_2)$ und $\bar{Q} \neq \bar{N}_1, \bar{N}_2$. Wählen wir einen Punkt $M'_1 \in c_1$ mit $\bar{M}'_1 \neq \bar{N}_1, M'_1 \in H_p^-$ und setzen wir $m = M'_1Q$, dann ist $\bar{m} \parallel \bar{c}_2, \bar{m} \parallel \bar{p}$. Mithin gibt es Punkte $A'_1 = m \cap a_1, B'_1 = m \cap b_1, A'_2 = m \cap a_2, B'_2 = m \cap a_2, M'_2 = m \cap c_2$ (Fig. 9). Wegen $M'_1 \in H_p^-, S_1 \in H_p^+$ gilt nach [3], (H3) $(M'_1N_1S_1)$, woher $\neg(S_1M'_1N_1)$ folgt. Mittels der Parallelprojektion $\varphi(\Pi(y), p, m)$ ergibt sich $\neg(N_1QN_2) \Rightarrow \neg(M'_1QM'_2)$ und wegen $M'_1 \in H_p^-$ folgt hieraus $M'_2 \in H_p^-$. Aus $M'_2 \in H_p^-$ und $S_2 \in H_p^+$ erhält man dann $(M'_2N_2S_2)$, also $\neg(S_2M'_2N_2)$. Wegen $\neg(N_1QN_2)$ sind N_1, N_2 in einer durch m bestimmten Halbebene enthalten. Ist z. B. $N_1, N_2 \in H_m^+$, dann $\neg(S_1M'_1N_1)$ und $\neg(S_2M'_2N_2)$ impliziert $S_1, S_2 \in H_m^+$. Führen wir also zu m parallele Geraden s_1, s_2 durch S_1, S_2 , dann nach [3], (H1) gilt $s_1, s_2 \subset H_m^+$ und in der auf $\Pi(m)$ angeführten Zwischenrelation ergibt sich $\neg(s_1ms_2)$. Da wegen $\bar{S}_1, \bar{S}_2 \notin \bar{m}$ zugleich $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \neq \bar{m}$ gilt, sind die Voraussetzungen (1), (3) des Satzes 11, [3] erfüllt und diesen Satz nach erhält man $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2$. Es sei $\neg(M_1S_1N_1)$. Gilt dabei $(M_1S_1M'_1)$, dann ist nach [1], (Z5b) $(M'_1N_1S_1) \wedge (M'_1S_1M_1) \Rightarrow (N_1S_1M_1)$, was ein Widerspruch ist. Mithin gilt $\neg(M_1S_1M'_1)$ und gemäß [3], Satz 17 ergibt sich $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1$ in den nach (B1) erklärten Anordnungen von m_1, m . Gilt $\neg(M_2S_2N_2)$, dann ergibt sich ganz ähnlich $\neg(M_2S_2M'_2)$ und $A_2 \leq B_2 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2$. Nehmen wir $(M_2S_2N_2)$ an, dann nach [1], (Z5) gilt $(M_2S_2N_2) \wedge (S_2N_2M'_2) \Rightarrow (M_2N_2M'_2) \vee S_2 = N_2$, also $(M_2N_2M'_2)$ und gemäß [1], (Z6) ergibt sich $(M_2S_2N_2) \wedge (M_2N_2M'_2) \Rightarrow (M_2S_2M'_2)$. Nach [3], Satz 17 gilt dann $B_2 \leq A_2 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2$. Aus $\neg(M_1S_1N_1) \wedge \neg(M_2S_2N_2)$ folgt also $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$ und aus $\neg(M_1S_1N_1) \wedge \wedge (M_2S_2N_2)$ folgt $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2 \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$.

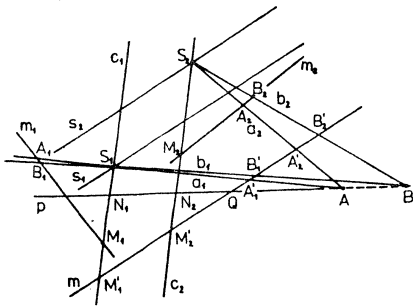


Fig. 9

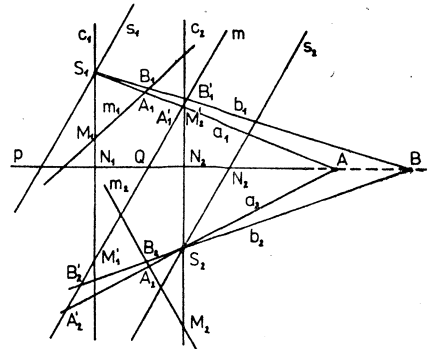


Fig. 10

2. Wir nehmen an, daß S_1, S_2 in verschiedenen durch p erklärten Halbebenen liegen. Es sei z. B. $S_1 \in H_p^+$ und $S_2 \in H_p^-$.

a) Es sei $\bar{c}_1 \neq \bar{c}_2$, also $\bar{N}_1 \neq \bar{N}_2$. Nach [4], Satz 9 und Bemerkung 10 gibt es auf p einen Punkt Q mit $\bar{Q} \neq \bar{N}_1, \bar{N}_2$ und $(N_1Q_1N_2)$. Wählen wir einen Punkt $M'_1 \in c_1$ mit $\bar{M}'_1 \neq \bar{N}_1, M_1 \in H_p^-$ und setzen wir $m = M'_1Q$, dann ist $\bar{m} \parallel \bar{c}, \bar{m} \parallel \bar{p}$ und es gibt Punkte $M'_2 = m \cap c_2, A_1 = m \cap a_1, B'_1 = m \cap b_1, A'_2 = m \cap a_2, B'_2 = m \cap b_2$ (Fig. 10). Wegen $S_1 \in H_p^+, M'_1 \in H_p^-$ gilt $(M'_1N_1S_1)$ und entsprechend zum Fall 1 aus $\neg(M_1S_1N_1)$ folgt $\neg(M_1S_1M'_1)$. Nach [3], Satz 17 ergibt sich hieraus $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1$. Mit der Parallelprojektion $\varphi(\Pi(y), p, m)$ erhält man $(N_1QN_2) \Rightarrow (M'_1QM'_2)$. Wegen $M'_1 \in H_p^-$ gilt also $M'_2 \in H_p^+$ und wegen $S_2 \in H_p^-$ ist $(M'_2N_2S_2)$. Aus $\neg(M_2S_2N_2)$ ergibt sich dann analog zu 1 $\neg(M_2S_2M'_2)$ und folglich $A_2 \leq B_2 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2$. Aus $(M_2S_2N_2)$ folgt $(M_2S_2M'_2)$ und $B_2 \leq A_2 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2$ (Fig. 10). Wegen (N_1QN_2) sind N_1, N_2 in verschiedenen durch m erklärten Halbebenen enthalten. Es sei z. B. $N_1 \in H_m^+$ und $N_2 \in H_m^-$. Da $(M'_1N_1S_1), (M'_2N_2S_2)$ ist, gilt $\neg(S_1M'_1N_1), \neg(S_2M'_2N_2)$ und folglich $S_1 \in H_m^+, S_2 \in H_m^-$. Führen wir zu m parallele Geraden s_1, s_2 durch S_1, S_2 , dann gilt $s_1 \subset H_m^+, s_2 \subset H_m^-, \bar{s}_1, \bar{s}_2 \neq \bar{m}$ und in der Anordnung von $\Pi(m)$ ergibt sich (s_1ms_2) . Deshalb

sind die Bedingungen (2), (4) des Satzes 11, [3] erfüllt und diesem Satz nach erhält man $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2$. Im Fall $\neg (M_1S_1N_1) \wedge \neg (M_2S_2N_2)$ ergibt sich also $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$ und im Fall $\neg (M_1S_1N_1) \wedge (M_2S_2N_2)$ ist $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A'_2 \leq B'_2 \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$.

b) Es sei $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$, also $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$. Durch V führen wir eine Gerade c mit $\bar{c} \neq \bar{c}_1$, auf c wählen wir einen Punkt S mit $\bar{S} \notin \bar{p}$, $S \in H_p^+$ und setzen $a = SA$, $b = SB$, $N = c \cap p$. Ferner wählen wir eine Gerade m' mit $\bar{m}' \parallel \bar{c}_1$, $\bar{m}' \parallel \bar{p}$, so daß $\bar{M} \notin \bar{p}$, $M \in H_p^-$, $\neg (NQ'N_1)$ und $\bar{Q} \neq \bar{N}$, \bar{N}_1 für $M = m' \cap c$, $Q' = m' \cap p$ gilt. Wegen $S \in H_p^+$ und $M \in H_p^-$ gilt dann (SNM) , also $\neg (MSN)$. Setzen wir $A' = a \cap m'$, $B' = b \cap m'$, dann wegen $S, S_1 \in H_p^+$ ergibt sich nach dem Fall 1 $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A' \leq B'$. Durch M führen wir noch eine Gerade m mit $\bar{m} \parallel \bar{p}$, so daß $(NQ'N_2)$ und $\bar{Q} \neq \bar{N}$, \bar{N}_2 für $Q = m \cap p$ gilt und setzen wir $A'' = m \cap a$, $B'' = m \cap b$.

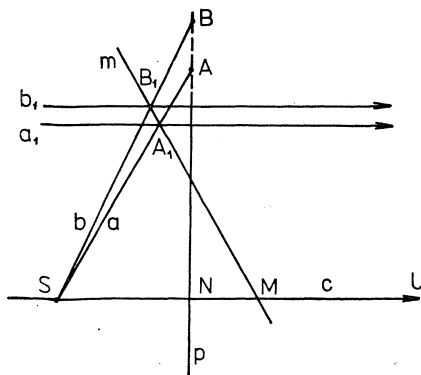


Fig. 11

Da $\bar{c} \neq \bar{c}_2$ und $S \in H_p^+$, $S_2 \in H_p^-$ gilt, erhält man $A_2 \leq B_2 \Leftrightarrow A'' \leq B''$ bzw. $B_2 \leq A_2 \Leftrightarrow A'' \leq B''$ im Fall $\neg (M_2S_2N_2)$ bzw. $(M_2S_2N_2)$. Nach [3], Satz 17 gilt zugleich $A' \leq B' \Leftrightarrow A'' \leq B''$. Aus $\neg (M_1S_1N_1) \wedge \neg (M_2S_2N_2)$ folgt also $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A' \leq B' \Leftrightarrow A'' \leq B'' \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$ und aus $\neg (M_1S_1N_1) \wedge (M_2S_2N_2)$ folgt $A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow A' \leq B' \Leftrightarrow A'' \leq B'' \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$.

(B4) Es sei p eine eigentliche Gerade mit $\bar{p} \parallel \bar{y}$. Wir führen die Anordnung \leq auf $\mathcal{U}(p)$ folgendermaßen an: Wir wählen einen Punkt S mit $S \notin p$ derart, daß $SA \neq SB$ im Falle $A \neq B$ ist und setzen $c = SU$, $N = p \cap c$, $a = SA$, $b = SB$. Es sei M ein Punkt von c mit $\bar{M} \neq \bar{S}$ und $\neg (MSN)$ (Fig. 11). Durch M führen wir eine Gerade m mit $\bar{m} \neq \bar{c}$, $\bar{m} \parallel \bar{p}$ und bezeichnen $A_1 = m \cap a$, $B_1 = m \cap b$, $a_1 = A_1U$, $b_1 = B_1U$. Wir setzen $A \leq B$ genau dann, wenn $a_1 \leq b_1$ in der Anordnung \leq von $\Pi(x)$ mit $x \leq e'$ gilt.

Entsprechend zu (S1) läßt sich beweisen, daß die in (B4) angeführte Anordnung von $\mathcal{U}(p)$ von der Wahl der Punkte S, M und der Geraden m unabhängig ist.

(B5) Es sei die Gerade p uneigentlich. Die Anordnung \leq auf $\mathcal{W}(p)$ führen wir folgendermaßen an: Es seien $A, B \in \mathcal{W}(p)$. Wird $a = OA, b = OB$ gesetzt, dann gilt $\bar{a} \parallel \bar{y}, \bar{b} \parallel \bar{y}$ und es gibt Punkte $A' = a \cap e, B' = b \cap e$. Wir setzen $A \leq B$ genau dann, wenn $A' \leq B'$ in der nach (B2) erklärten Anordnung von e_α ist.

(S2) Es sei p eine uneigentliche Gerade und seien $A, B \in \mathcal{W}(p)$. Ferner seien S ein Punkt und m eine Gerade mit $\bar{S} \notin \bar{m}$ und $m \parallel y$. Wir setzen $s = SV, A_1 = SA \cap m, B_1 = SB \cap m$. Gilt $\neg(eym) \wedge \neg(yms)$ bzw. $(eym) \wedge (yms) \wedge y \neq m$ in der Anordnung von $\Pi(y)$, dann ist $A \leq B$ in der Anordnung von $\mathcal{W}(p)$ nach (B5) genau dann, wenn $A_1 \leq B_1$ in der Anordnung von m_α nach (B2) ist.

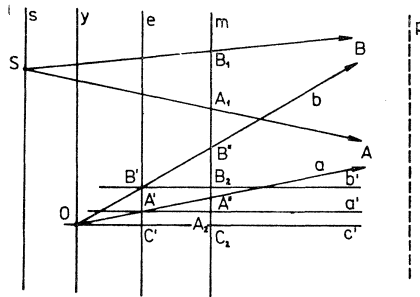


Fig. 12

Beweis. Wir setzen $a = OA, b = OB, A' = a \cap e$ und $B' = b \cap e$. Wir sollen beweisen, daß $A' \leq B'$ in der Anordnung von e_α genau dann gilt, wenn $A_1 \leq B_1$ in der Anordnung von m_α ist, wobei diese Anordnungen nach (B2) definiert sind.

1. Es sei $\neg(eym)$ und $\neg(yms)$.

a) Zunächst nehmen wir $\bar{m} \neq \bar{y}$ an. Wir setzen $A'' = a \cap m, B'' = b \cap m, a' = A'U, b' = B'U, c' = OU, A_2 = a' \cap m, B_2 = b' \cap m, C' = c' \cap e$ und $C_2 = c' \cap m$ (Fig. 12). Wegen $\neg(eym)$ gilt nach [3], Def. 4 $\neg(B'OB''), \neg(A'O A''), \neg(C'OC_2)$ und wegen $\bar{U} \notin \bar{e}, \bar{m}, \bar{O} \notin \bar{m}$ ergibt sich nach [3], Satz 16 $A_2 \leq B_2 \Leftrightarrow A'' \leq B''$ in der Anordnung von m_α . Gemäß (B2) ist $A' \leq B' \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$ und somit $A' \leq B' \Leftrightarrow A'' \leq B''$. Da p uneigentlich ist und $\bar{s}, \bar{y} \neq \bar{m}, \neg(yms)$ gilt, sind die Bedingungen des Satzes 11, [3] erfüllt und folglich gilt $A'' \leq B'' \Leftrightarrow A_1 \leq B_1$, also $A' \leq B' \Leftrightarrow A_1 \leq B_1$.

b) Es sei $\bar{m} = \bar{y}$ (Fig. 13). Wegen $\neg(eym)$ ist nach [1], (Z5c) $y \neq m$ und nach [1], (Z2) gilt $(yem) \vee (yme)$. Da α konvex ist, folgt aus (yem) und $\bar{m} = \bar{y}$ die Gleichheit $\bar{y} = \bar{e}$, was ein Widerspruch ist. Daher muß (yme) gelten. Ferner wollen wir zeigen, daß $\bar{e} \neq \bar{s}, \neg(yes)$ und $\neg(mse)$ erfüllt ist: Wegen $\neg(yms)$ ist $(mys) \vee (msy)$. Zunächst prüfen wir den Fall (mys) nach. Gemäß [1], (Z5) erhält man $(emy) \wedge \wedge (mys) \Rightarrow (eys) \vee m = y$. Aus $m \neq y$ folgt hieraus (eys) , was wegen $y \neq e$ gemäß [1], (Z3) $\neg(yes)$ impliziert. Nach [1], (Z6) ergibt sich weiter $(emy) \wedge (eys) \Rightarrow$

$\Rightarrow (ems)$. Da α konvex ist, folgt aus $\bar{s} = \bar{e}$ die Gleichheit $\bar{e} = \bar{m}$, also ein Widerspruch zu $\bar{y} = \bar{m}$ und $\bar{y} \neq \bar{e}$. Somit ist $\bar{s} \neq \bar{e}$. Wegen $\bar{S} \notin \bar{m}$ ist $\bar{s} \neq \bar{m}$ und (ems) impliziert $\neg(mse)$. Nun nehmen wir (msy) an. Unter Anwendung von [1], (Z5b), (Z6) erhält man $(yme) \wedge (ysm) \Rightarrow (sme) \wedge (yse)$, aus (ems) folgt $\bar{s} \neq \bar{e}$, $\neg(mse)$ und wegen $e \neq s$, (yse) ist $\neg(yes)$. Setzen wir $A'_1 = SA \cap e$, $B'_1 = SB \cap e$, dann $\bar{y} \neq \bar{e}$, $\bar{s} \neq \bar{e}$ und $\neg(yes)$ impliziert nach [3], Satz 11 $A' \leq B' \Leftrightarrow A'_1 \leq B'_1$. Wir bezeichnen $a' = A_1U$, $b' = B_1U$, $c' = SU$, $A_2 = a' \cap e$, $B_2 = b' \cap e$, $C' = c' \cap m$ und $C_2 = c' \cap e$. Wegen $\neg(mse)$ gilt $\neg(A_1SA'_1)$, $\neg(B_1SB'_1)$, $\neg(C'SC_2)$, wegen $\bar{s} \neq \bar{e}$ ist $\bar{S} \notin \bar{e}$ und nach [3], Satz 16 gilt also $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$. Da gemäß (B2) $A_2 \leq B_2 \Leftrightarrow A_1 \leq B_1$ erfüllt ist, ergibt sich hieraus $A' \leq B' \Leftrightarrow A_1 \leq B_1$.

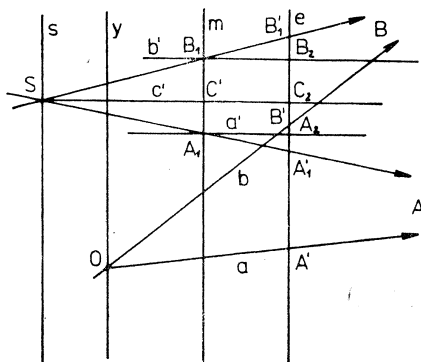


Fig. 13

2. Es sei (eym) , (yms) und $y \neq m$.

a) Wir nehmen $\bar{m} \neq \bar{y}$ an. Dabei erhalten wir die Bezeichnungen aus Teil 1a). Wegen (eym) ist $(A'OA'')$, $(B'OB'')$, $(C'OC_2)$ und gemäß $\bar{O} \notin \bar{m}$ gilt nach [3], Satz 16 $A_2 \leq B_2 \Leftrightarrow B'' \leq A''$. Nach (B1) ergibt sich $A' \leq B' \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$, also $A' \leq B' \Leftrightarrow B'' \leq A''$. Wegen $\bar{m} \neq \bar{s}$, \bar{y} und (yms) sind die Bedingungen (2), (3) des Satzes 11, [3] erfüllt. Mithin ist $B'' \leq A'' \Leftrightarrow A_1 \leq B_1$ und folglich $A' \leq B' \Leftrightarrow A_1 \leq B_1$.

b) Wir nehmen $\bar{m} = \bar{y}$ an. Nach [1], (Z5) gilt $(eym) \wedge (yms) \Rightarrow (ems) \vee y = m$ und wegen $y \neq m$ folgt daraus (ems) , was $\neg(mse)$ bedeutet. Gilt $\bar{e} = \bar{s}$, dann gemäß (ems) ergibt sich $\bar{e} = \bar{y}$, denn α ist konvex. Dies ist aber ein Widerspruch und es gilt daher $\bar{e} \neq \bar{s}$. Nach [1], (Z6) erhält man $(eym) \wedge (ems) \Rightarrow (eys)$ und wegen $e \neq y$ folgt hieraus $\neg(yes)$. Da $\bar{e} \neq \bar{s}$, $\neg(yes)$ und $\neg(mse)$ gilt, läßt sich ferner ganz analog wie unter 1b) verfahren.

(B6) Es sei die Gerade p uneigentlich. Wir führen die Anordnung \leq auf $\mathcal{V}(p)$ folgendermaßen an: Es seien $A, B \in \mathcal{V}(p)$. Wir bezeichnen $a = OA$, $b = OB$, $A' = a \cap e'$, $B' = b \cap e'$ und setzen $A \leq B$ genau dann, wenn $B' \leq A'$ in der nach (B1) erklärten Anordnung von e'_z gilt.

Mit [3], Satz 11 und Satz 16 läßt sich entsprechend zu (S2) die folgende Behauptung beweisen:

(S3) *Es sei p eine uneigentliche Gerade und seien $A, B \in \mathcal{V}(p)$. Ferner seien S ein Punkt und m eine Gerade mit $S \notin \bar{m}$ und $m \parallel x$. Wir setzen $s = SU$, $A_1 = SA \cap m$, $B_1 = SB \cap m$. Gilt $\neg(e'xm) \wedge \neg(xms)$ bzw. $(e'xm) \wedge (xms) \wedge x \neq m$ in der Anordnung von $\Pi(x)$, dann ist $A \leq B$ in der Anordnung von $\mathcal{V}(p)$ genau dann, wenn $B_1 \leq A_1$ in der Anordnung von m_x gilt.*

Nun beweisen wir zwei Sätzen (S4) und (S5), die im Teil II verwendet werden.

(S4) *Es sei m eine Gerade mit $\bar{m} \parallel \bar{x}$ und $\bar{m} \parallel \bar{y}$. Wir setzen $m' = L(O, m)$, $Q = m' \cap e$, $P = e \cap x$. Auf der Richtung $\Pi(x)$ bzw. $\Pi(y)$ betrachten wir eine Anordnung \leq bzw. \leq' , so daß $x \leq e'$ bzw. $y \leq e$ gilt. Diese Anordnungen induzieren zwei Anordnungen \leq und \leq' von m_x . Gilt $\neg(EPQ)$, dann sind die Anordnungen \leq , \leq' von m_x gleich. Gilt (EPQ) , dann sind \leq , \leq' die inversen Anordnungen.*

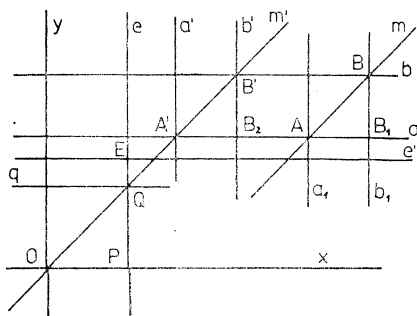


Fig. 14

Beweis. Auf jeder Geraden g von α mit $\bar{g} \parallel \bar{x}$ bzw. $\bar{g} \parallel \bar{y}$ betrachten wir solche Anordnungen \leq bzw. \leq' , die durch die Anordnung \leq bzw. \leq' von $\Pi(x)$ bzw. $\Pi(y)$ mit $x \leq e'$ bzw. $y \leq e$ induziert ist. Die auf gegebener Geraden m so definierten Anordnungen \leq , \leq' reproduzieren die Zwischenrelation von m . Wählen wir zwei verschiedene Punkte A, B von m mit $A < B$, dann ist $A <' B$ bzw. $B <' A$ und nach [1], (2.3) gilt entweder $\leq = \leq'$ oder \leq, \leq' sind inverse Anordnungen.

Es seien also A, B zwei verschiedene Punkte von m mit $A \leq B$. Führen wir zwei Geraden $a, b \in \Pi(x)$ durch A, B , dann gilt $a \leq b$ in der Anordnung von $\Pi(x)$. Setzen wir $A' = a \cap m'$, $B' = b \cap m'$, dann ergibt sich auch $A' \leq B'$ in der Anordnung \leq von m' .

- 1. Es sei $\neg(EPQ)$. Wegen $x \leq e'$ ist $P \leq E$ in der Anordnung \leq von e . Aus $Q < P$ folgt dann $Q < P \leq E$ und (EPQ) , was ein Widerspruch zu $\neg(EPQ)$ ist. Somit ist $P \leq Q$ (Fig. 14). Setzen wir $q = L(Q, x)$, dann gilt $x \leq q$ und $O \leq Q$ in der Anordnung \leq von m' . Wegen $y \leq e'$ erhält man $O \leq' Q$ in der Anordnung \leq' von m' . Da $O \leq Q$ und zugleich $O \leq' Q$ ist, gilt $\leq = \leq'$ und aus $A' \leq B'$ folgt $A' \leq' B'$. Führen wir die Geraden $a', b' \in \Pi(y)$ durch A', B' , dann ist

$a' \leq' b'$ in der Anordnung von $\Pi(y)$ und folglich $A' \leq' B_2$ in der Anordnung \leq' von a , wo $B_2 = b' \cap a$ gesetzt ist. Ferner seien a_1, b_1 durch A, B gehende Geraden von $\Pi(y)$. Setzen wir $B_1 = b_1 \cap a$, dann wegen $\bar{m} \parallel x, \bar{m} \parallel \bar{y}, x \parallel \bar{y}$ erhalten wir nach [3], Satz 10 $A' \leq' B_2 \Rightarrow A \leq' B_1$ und folglich $a_1 \leq' b_1$. Mithin ist $A \leq' B$ in der Anordnung \leq' von m . Wegen $A \leq B$ und $A \leq' B$ ergibt sich dann $\leq = \leq'$.

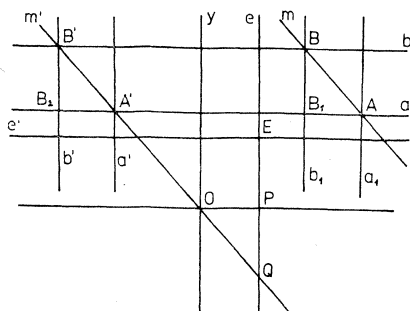


Fig. 15

2. Es sei (EPQ) . Wegen $x \leq e'$ gilt $P \leq E$ und $Q \leq P \leq E$ in der Anordnung \leq von e . $Q \leq P$ impliziert dann $Q \leq O$ in der Anordnung \leq von m' . Aus $y \leq' e$ folgt gleichzeitig $O \leq' Q$ in der Anordnung \leq' von m' . Wegen $Q \leq O$ und $O \leq' Q$ sind \leq, \leq' inverse Anordnungen von m' und aus $A' \leq' B'$ ergibt sich daher $B' \leq' A'$ (Fig. 15). Sind a', b' die durch A', B' gehenden Geraden von $\Pi(y)$,

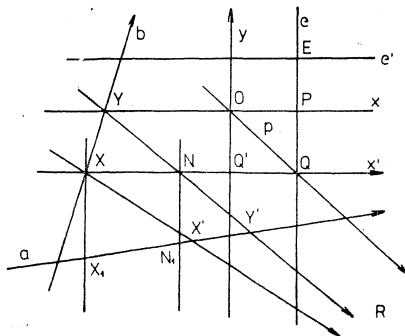


Fig. 16

dann gilt $b' \leq' a'$ und $B_2 \leq' A'$, wo $B_2 = b' \cap a$ gesetzt ist. Führen wir zugleich die Geraden $a_1, b_1 \in \Pi(y)$ durch A, B und setzen wir $B_1 = b_1 \cap a$, dann nach [3], Satz 10 erhalten wir $B_2 \leq' A' \Rightarrow B_1 \leq' A$ und $b_1 \leq' a_1$, also $B \leq' A$. Wegen $A \leq B$ und $B \leq' A$ sind \leq, \leq' inverse Anordnungen von m .

(S5) Es seien a, b Geraden mit $\bar{a} \parallel \bar{x}, \bar{b} \parallel \bar{y}$ und R ein uneigentlicher Punkt mit $R \neq U, V$. Ferner sei \leq' die nach (B1) definierte Anordnung von a und \leq die nach (B2) definierte Anordnung von b . Wir setzen $p = OR, Q = p \cap e$, und $P = x \cap e$. Für eine Z-Projektion $\varphi(R, b, a)$ ergibt sich dann: Gilt (EPQ) bzw. \neg (EPQ), so ist $A \leq B \Rightarrow \varphi(A) \leq' \varphi(B)$ bzw. $A \leq B \Rightarrow \varphi(B) \leq' \varphi(A)$ für $A, B \in b$.

Beweis. Da R uneigentlich und a eigentlich sind, ist φ eine PZ-Projektion ([3], Def. 8). Beweisen wir, daß $X \leq Y \Rightarrow \varphi(X) \leq' \varphi(Y)$ bzw. $X \leq Y \Rightarrow \varphi(Y) \leq' \varphi(X)$ für zwei verschiedene Punkte von b ist, dann nach [3], Satz 7 gilt $A \leq B \Rightarrow \varphi(A) \leq' \varphi(B)$ bzw. $A \leq B \Rightarrow \varphi(B) \leq' \varphi(A)$ für alle Punkte $A, B \in b$.

1. Es sei (EPQ). Wegen $x \leq e'$ ist $P \leq E$ in der Anordnung von e , die nach (B2) erklärt ist und gemäß (EPQ) folgt hieraus $Q \leq P$. Setzen wir $x' = L(Q, x), Q' = x' \cap y, X' = x' \cap b, Y = x \cap b$, dann wegen $Q \leq P$ ist $x' \leq x$ und $X' \leq Y$ in der nach (B2) definierten Anordnung von b (Fig. 16). Setzen wir zugleich $X' = XR \cap a, Y' = YR \cap a, N = YR \cap x'$, dann ist $X' = \varphi(X)$ und $Y' = \varphi(Y)$. Wegen $y \leq' e$ gilt nach (B1) $Q' \leq Q$ in der Anordnung von x' und wegen $U \neq V \neq R \neq U$ ergibt sich nach [3], Satz 10 $Q' \leq' Q \Rightarrow X' \leq' N$. Nach (B1) bedeutet dies, daß $X_1 \leq' N_1$ in der Anordnung von a gilt, wo $X_1 = XV \cap a$ und $N_1 = NV \cap a$ gesetzt ist. Das Produkt der PZ-Projektionen $\varphi_1(V, a, x')$ und $\varphi_2(R, x', a)$ ist eine monoton wachsende Abbildung von a ([3], Satz 8), woher $X_1 \leq' N_1 \Rightarrow X' \leq' Y'$, also $\varphi(X) \leq' \varphi(Y)$ folgt.

2. Im Fall \neg (EPQ) läßt sich analog zum Fall 1 verfahren.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПОРЯДОЧЕННОСТИ АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ КЛИНГЕНБЕРГА В УПОРЯДОЧЕННОСТЬ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ КЛИНГЕНБЕРГА

Резюме

Соотношениям между упорядоченными аффинными и проективными плоскостями Клингенберга посвящено несколько статей автора. Предлагаемая работа тесно связана с работами [2], [3]. В первой части доказывается теорема (Т): Каждая АК-плоскость погруженная в выпукло упорядоченную РК-плоскость есть выпукло упорядоченная и выполняет условия (A1)—(A4). Во второй части введены некоторые определения и предложения как подготовка к доказательству теоремы обратной к (Т). Это доказательство будет приведено в продолжении нашей работы.

O PRODLOUŽENÍ USPOŘÁDÁNÍ AFINNÍ KLINGENBERGOVSKÉ ROVINY DO USPOŘÁDÁNÍ PROJEKTIVNÍ KLINGENBERGOVSKÉ ROVINY

Shrnutí

I

Vztahům mezi uspořádanými afinními a projektivními klingenbergovskými rovinami je věnováno několik autorových prací. Předložený článek navazuje na práce [2], [3]. V první části je dokázán teorém (T): Každá AK-rovina vnořená do konvexně uspořádané PK-roviny je konvexně uspořádaná a splňuje podmínky (A1)—(A4). Ve druhé části jsou uvedeny některé definice a věty, jako příprava k důkazu obráceného teorému k (T). Tento důkaz bude proveden v pokračování tohoto článku.

Literaturverzeichnis

- [1] Kunze, M.: *Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie*. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.
- [2] Machala, F.: *Über Mengen mit Trennrelationen*. Acta Univ. Pal. Olomucensis Tom 69, 1981, 5—22.
- [3] Machala, F.: *Über angeordnete affine Klingenbergische Ebenen, die sich in projektive Klingenbergische Ebene einbetten lassen*. Acta Univ. Pal. Olomucensis Tom 73, 1982, 9—31.
- [4] Machala, F.: *Fastgeordnete und geordnete affine Klingenbergische Ebenen*. Čas. pro pěst. mat. 106 (1981), 138—155.
- [5] Pickert, G.: *Projektive Ebenen*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1975.

RNDr. František Machala, CSc.
katedra algebry a geometrie
přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého
Leninova 26
771 46 Olomouc, ČSSR

AUPO, Fac. rerum nat. Vol. 76, Math. XXII (1983)