Josef Hošek

Zu einer Eigenschaft von Phasen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 21 (1982), No. 1, 37--42

1982 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 73

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty
Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ZU EINER EIGENSCHAFT VON PHASEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

JOSEF HOŠEK

(*Eingelangt am 31. März 1981*)

Gewidmet Prof. Miroslav Laitoch zu seinem 60. Geburtstag

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$y'' + Q(t)\, y = 0, \tag{Q}$$

wo $Q \in C_j^2$ und für $t \in j$ $Q(t) > 0$, wobei j ein offenes Interwall darstellt.

Im weiteren verwenden wir nur die abgekürzte Bezeichnung der Gleichung und die Menge aller reellen Zahlen wird als **R** geschrieben.

Das Hauptziel unserer Betrachtungen ist es, eine Lösung von gewissen Problems für den Träger Q der Gleichung (Q) zu geben, einige von dessen Eigenschaften und Ausdrücke aus speziellen an ihre Phasen gelegenen Forderungen hervorgehen.

Problemstellung: Es sollen alle Funktionen Q gefunden werden, so daß die zweite Phase β einer Basis von Gleichung (Q) mit dem Träger Q genau einer primitiven Funktion zur Funktion $\sqrt{Q}$ im Intervall j gleich wird. Mit anderen Worten, so daß für $t \in j$

$$\beta(t) = \int \sqrt{Q(t)}\, dt \tag{1}$$

gilt.

Bemerkung 1. Für die erste Phase war das obenangeführe Problem in [6] gelöst.

Satz 1. *Damit die zweite Phase β einer Basis (u, v) der Gleichung* (Q) *genau einer primitiven Funktion zur Funktion $\sqrt{Q}$ im Intervall j gleich wird, ist es notwendig und es genügt, wenn der Träger Q eine* (*positive*) *Lösung einer nichtlinearen Gleichung zweiter Ordnung*

$$12z''z - 17z'^2 = 0. \tag{2}$$

ist.

Beweis. Nehmen wir an, es gebe eine zweite Phase β von Gleichung (Q), welche die Bedingung (1) erfüllt. Es gilt dann in j

$$\beta'(t) = \sqrt{Q}, \tag{3}$$

$$\beta''(t) = \frac{1}{2}\frac{Q'}{\sqrt{Q}}, \tag{4}$$

$$\beta'''(t) = \frac{1}{2}\frac{Q''}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{4}\frac{Q'^2}{Q\sqrt{Q}}. \tag{5}$$

Für die zweite Phase β gilt nach [1] in j

$$\{\beta, t\} + \beta'^2(t) = Q_1(t). \tag{6}$$

wo

$$Q_1(t) = Q(t) - \frac{1}{2}\frac{Q''(t)}{Q(t)} + \frac{3}{4}\left(\frac{Q'(t)}{Q(t)}\right)^2. \tag{7}$$

Bemerken wir dabei, daß das Symbol

$$\{\beta, t\} = \frac{1}{2}\frac{\beta'''}{\beta'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\beta''}{\beta'}\right)^2$$

die Schwarzsche Ableitung von der Funktion β in der Zahl t bezeichnet.

Durch Einsetzen von (3), (4), (5), (7) in (6) ergibt sich für alle $t \in j$

$$\frac{1}{2}\frac{2Q''Q - Q'^2}{4Q^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}\right)^2 + Q = Q - \frac{1}{2}\frac{Q''}{Q} + \frac{3}{4}\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2$$

und daraus mit kleiner Zubereitung

$$12Q''Q - 17Q^2 = 0.$$

Wird in der letzten Beziehung anstelle von Q, Q', Q'' der Reihe nach z, z', z'' geschrieben, so ergibt sich sogleich (1). Umgekehrt. Es sei Q (wo $Q(t) > 0$ für $t \in j$) eine Lösung von Gleichung (2). Dann jede durch die Beziehung (1) definierte Funktion β bedeutet die zweite Phase einer Basis von Gleichung (Q), denn, falls die Funktionen Q, Q', Q'' aus den Bedingungen (3), (4), (5) mit Hilfe von $\beta', \beta'', \beta'''$ ausgedrückt und diese Ausdrücke in (2) eingesetzt werden, dann für alle $t \in j$

$$24[\beta''^2 + \beta'\beta''']\,\beta'^2 - 68\beta'^2\beta'' = 0,$$

was sich noch auf die Form

$$-8[\beta''^2 + \beta'\beta''']\,\beta'^2 + 20\beta'^2\beta''^2 = 16[\beta''^2 + \beta'\beta''']\,\beta'^2 - 48\beta'^2\beta''^2$$

bringen läßt. Nach einer weiteren Umformung erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{\beta'''}{\beta'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\beta''}{\beta'}\right)^2 + \beta'^2 = \beta'^2 - \frac{\beta''^2 + \beta'\beta'''}{\beta'^2} + 3\left(\frac{\beta''}{\beta'}\right)^2. \tag{8}$$

Da, gemäß (3), (4), (5), (7)

$$Q_1 = \beta'^2 - \frac{\beta''^2 + \beta'\beta'''}{\beta'^2} + 3\left(\frac{\beta''}{\beta'}\right)^2, \tag{9}$$

dann nach einer Änderung und durch Einsetzen von (9) in (8) ergibt sich

$$\frac{1}{2}\frac{\beta'''}{\beta'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\beta''}{\beta'}\right)^2 + \beta'^2 = Q_1$$

also für die Funktion β gilt in j (6).

Im folgenden wird das oben formulierte Problem gleichzeitig für die erste und zweite Phase von (Q) betrachtet.

Satz 2. *Für die Gleichung* (Q) *existieren erste und zweite Phasen gleich einigen primitiven Funktionen zur Funktion* $\sqrt{Q}$ *im Intervall* j *genau dann, wenn*

$$Q(t) = K \qquad (= konstant),\ K > 0,\ (t \in j). \tag{10}$$

Beweis. Gegeben seien erste Phase α der Basis (u, v) und zweite Phase β der Basis $(\bar{u}, \bar{v})$ von Gleichung (Q) mit der Eigenschaft

$$f(t) = \int \sqrt{Q(t)}\, dt \qquad (t \in j), \tag{11}$$

wo wir anstelle von f entweder α oder β setzen. Nach [1] genügt α in j der nichtlinearen Gleichung

$$\{\alpha, t\} + \alpha'^2(t) = Q(t) \tag{12}$$

und β der nichtlinearen Gleichung (6). Aus (11) ergibt sich auch für jedes $t \in j$

$$\beta(t) = \alpha(t) + k, \qquad k\text{-geeignete Konstante.} \tag{13}$$

Da $\{\alpha, t\} = \{\alpha + k, t\} = \{\beta, t\}$, $t \in j$, ist in Bezug auf (6), (12), (13)

$$Q(t) = Q_1(t), \tag{14}$$

woraus sich mit Rücksicht auf [5] ergibt, daß Gleichung (Q) zu sich selbst begleitend bei den Gewichtskonstanten [0, 1] ist. Aus Beziehung (12) nach [2] und [6] ist zu sehen, daß sich alle positiven Träger Q von (Q) in der Form

$$Q(t) = (a_1 t + b_1)^{-4}, \qquad a_1^2 + b_1^2 > 0, \qquad a_1, b_1 \in \mathbf{R} \tag{15}$$

ausdrücken lassen. Betrachten wir (14), dann nach [5] gibt (15) $a_1 = 0$, so daß $Q(t) = b_1^{-4}$, $(b_1 \neq 0)$ und wenn wir $b_1^{-4} = K$ setzen, dann erhalten wir (10).

In Übereinstimmung mit [1] seien $[\alpha]$ ($[\beta]$) ein vollständiges Phasensystem der ersten (zweiten) Phase α (β) von Gleichung (Q).

Beispiel 1. a) Die Funktion $\sqrt{K}t$ bedeutet in j die erste Phase der Basis (u, v) und die zweite Phase der Basis $(\bar{u}, \bar{v})$ mit der Eigenschaft (11) von Gleichung (Q) und mit dem Träger (10), wo

$$u(t) = \sin\sqrt{K}\,t \qquad \text{respektive} \qquad \bar{u}(t) = -\cos\sqrt{K}\,t,$$
$$v(t) = \cos\sqrt{K}\,t \qquad\qquad\qquad\qquad \bar{v}(t) = \sin\sqrt{K}\,t. \tag{16}$$

b) Die Menge $\sqrt{K}t + k$, $K > 0$, $k \in \mathbf{R}$ ist in j gleich dem vollständigen Phasensystem $[\sqrt{K}t]$ der ersten und der zweiten Phase $\sqrt{K}t$. Jede Phase aus diesem System ist eine wachsende Funktion in j.

c) Jede Funktion $\sqrt{K}t + k$ ist in j die erste Phase der Basis $(u\cos k + v\sin k, -u\sin k + v\cos k)$ und die zweite Phase der Basis $(\bar{u}\cos k + \bar{v}\sin k, -\bar{u}\sin k + \bar{v}\cos k)$.

Beweis. Die erste Behauptung wird leicht nachgewiesen durch Berechnung vermöge Satz 2. Aus Satz 2 und [1] folgt weiter $\{\sqrt{K}t + k\} \subset [\sqrt{K}t]$, $k \in \mathbf{R}$. Wenn umgekehrt $f \in [\sqrt{K}t]$, f beliebig, dann existiert $k_1 \in \mathbf{R}$ derart, daß für jedes $t \in j$ $f(t) = \sqrt{K}t + k_1$, woraus $f \in \{\sqrt{K}t + k\}$ und folglich auch $[\sqrt{K}t] \subset \{\sqrt{K}t + k\}$. Nach [1] folgen daraus auch die verbleibenden Behauptungen.

Nach [2] ist es möglich alle positiven Lösungen der Gleichung (2) explizit im gewissen Intervall als

$$Q(t) = |at + b|^{-\frac{12}{5}},$$

wobei $a^2 + b^2 > 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Es ist klar, daß für jedes betrachtetes Zahlenpaar a, b ein offenes Intervall existiert, in dem für alle t $at + b \neq 0$ gilt. Solch ein beliebig gewähltes Intervall wird im weiteren mit j bezeichnet.

Die Gleichung (Q) nimmt also in diesem Fall die Form

$$y'' + |at + b|^{-\frac{12}{5}}\,y = 0 \qquad (t \in j) \tag{17}$$

an. Durch direkte Berechnung ist leicht zu sehen, daß die Funktion $-\frac{5\varepsilon}{a}|at + b|^{-\frac{1}{5}} + k$, wo $a \neq 0$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(at + b)$ und auch die Funktion $|b|^{-\frac{6}{5}}t + k$, wo $a = 0$, $k \in \mathbf{R}$, $(b \neq 0)$ ihre zweite Phase im Intervall mit der Eigenschaft (1) darstellen.

Beispiel 2. Schreiben wir $F = \left\{-\frac{5\varepsilon}{a}|at + b|^{-\frac{1}{5}} + k\right\}$, $\bar{F} = \{|b|^{-\frac{6}{5}}t + k\}$. Die Menge F $(\bar{F})$ ist gleich dem vollständigen Phasensystem der zweiten (ersten und auch zweiten) Phase

$$\beta(t) = -\frac{5\varepsilon}{a}|at + b|^{-\frac{1}{5}}, \qquad a \neq 0, \tag{18}$$

$$(f(t) = |b|^{-\frac{6}{5}}t, \qquad a = 0) \tag{19}$$

im Intervall j mit der Eigenschaft (1), ((11)) der Gleichung (17), daß heißt $F = [\beta]$ ($\bar{F} = [f]$). Jede Phase des vollständigen System $[\beta]$ ($[f]$) ist eine wachsende Funktion in j.

Beweis. Für $a = 0$ folgt alles direkt aus Beispiel 1b), wen $K = |b|^{-\frac{12}{5}}$ gesetzt wird. Wenn $a \neq 0$, dann ist der Beweis analog zu dem in 1b). Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, daß $\beta'(t) = |at + b|^{-\frac{5}{6}} > 0$, $a \neq 0$, $t \in j$.

Die erste begleitende Gleichung zur Gleichung (17) bei Gewichtskonstanten $[0, 1]$ ist nach [1], [4] durch die Beziehung

$$y'' + |at + b|^{-\frac{12}{5}}\left(1 + \frac{6a^2}{25}|at + b|^{\frac{2}{5}}\right)y = 0 \qquad (t \in j) \tag{20}$$

ausgedrückt.

Bemerkung 2. Man sieht aus (17), (20), daß für $a = 0$ die Gleichung (17) zu sich selbst begleitend ist.

Beispiel 3. Die Menge F ist in j dem vollständigen Phasensystem der ersten Phase β aus (18) der Basis (U, V) von Gleichung (20) gleich, wenn $a \neq 0$, wo

$$\begin{aligned} U(t) &= -|at + b|^{\frac{3}{5}} \sin\left(\frac{5\varepsilon}{a}|at + b|^{-\frac{1}{5}}\right), \\ V(t) &= |at + b|^{\frac{3}{5}} \cos\left(\frac{5\varepsilon}{a}|at + b|^{-\frac{1}{5}}\right), \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}(at + b). \end{aligned} \tag{21}$$

Die Basis (U_1, V_1) jeder (ersten) Phase $\beta + k \in [\beta]$, $k \in \mathbf{R}$ von (20) für $a \neq 0$ ist in j der Form

$$\begin{aligned} U_1(t) &= U(t)\cos k + V(t)\sin k \\ V_1(t) &= -U(t)\sin k + V(t)\cos k. \end{aligned} \tag{22}$$

Die Menge $\bar{F}$ ist in j gleich dem vollständigen Phasensystem der ersten und der zweiten Phase f aus (19) mit der Eigenschaft (1), aus Gleichung (20) für $a = 0$; dabei f ist die erste Phase der Basis (u, v) respektive die zweite Phase der Basis $(\bar{u}, \bar{v})$, wo für $u, v, \bar{u}, \bar{v}$ (16) gilt, wenn $K = |b|^{-\frac{12}{5}}$. Für die Basis jeder ersten (zweiten) Phase $f + k \in [f]$ mit der Eigenschaft (1) aus Gleichung (20) mit $a = 0$ gilt (22), wenn wir anstelle von U, V zu der rechten Seite von (22) die Funktionen u, v, $(\bar{u}, \bar{v})$ der Reihe nach einsetzen.

Beweis. Es sei $a \neq 0$. Da die Gleichung (20) die erste begleitende Gleichung zur Gleichung (17) ist, wird zum Nachweis nach [1] berechnet, daß β in j die erste Phase der Basis (21) und die Menge F gleich ihrem vollständigen Phasensystem sind. Da $\beta + k \in F$, ist in bezug auf [1] ihre Basis durch den Ausdruck (22) gegeben. Für $a = 0$ ergeben sich alle Behauptungen direkt aus dem Beispiel 1, wenn $K = |b|^{-\frac{12}{5}}$ gesetzt wird.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. Borůvka: *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[2] E. Kamke: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen* I. Leipzig, 1959 (russische Auflage, Moskva 1965).

[3] J. Krbila: *Algebraická štruktúra množiny hlavných hyperbolických fáz diferenciálnych rovníc $y'' = q(t)y$ v intervale* $(-\infty, \infty)$. Matem. čas. 20 (1970), No. 3, 195—202.

[4] M. Laitoch: *L'équation associeé dans la théorie des transformations des équations différentielles du second ordre.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 12, 1963, 45—62.

[5] M. Laitoch: *Homogene lineare zu sich selbst begleitende Differentialgleichung zweiter Ordnung.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 33, 1971, 61—72.

[6] J. Zeman: *Über eine Anwendung der Phasentheorie.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 53, 1977, 137—140.

Souhrn

K JEDNÉ VLASTNOSTI FÁZÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 2. ŘÁDU

JOSEF HOŠEK

V práci byly nalezeny nutné a postačující podmínky k tomu, aby druhá fáze (první a druhá fáze) některé báze rovnice $y'' + Q(t)\,y = 0$ byla právě rovna v intervalu j některé primitivní funkci k funkci $\sqrt{Q}$.

Резюме

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФАЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2. РОДА

ИОСИФ ГОШЕК

В работе найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы вторая фаза (первая и вторая) некоторого базиса уравнения $y'' + Q(t)y = 0$ была равна именно на интервале j некоторой первообразной функции к функции $\sqrt{Q}$.