Jiří Zeman

Zur asymptotischen Integration der Differentialgleichung $y'' + q(t)y = 0$

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 20 (1981), No. 1, 129--132

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120101

1981 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 69

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty
Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ZUR ASYMPTOTISCHEN INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + q(t)\,y = 0$

JIŘÍ ZEMAN

(*Eingelangt am 15. März 1980*)

Wie bekannt spielen die Lösungen der Differentialgleichung

$$4zz'' - 5z'^2 = 0 \tag{1}$$

eine gewisse Rolle in manchen Gebieten der Theorie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + q(t)\,y = 0. \tag{2}$$

In [5] wurde gezeigt, daß genau wenn die Funktion $q(t)$ in (2) eine positive Lösung von (1) im Intervall j ist, so gibt es eine solche Basis $u_1(t)$, $u_2(t)$ von (2) in j, daß die erste Phase ([1]) $\alpha(t)$ dieser Basis eine primitive Funktion zur Funktion $q(t)$ im Intervall j ist. In [6] wurde bewiesen, daß jede Differentialgleichung mit dem Parameter λ der Form

$$y'' - \lambda^2 f(t)\,y = 0 \tag{3}$$

mit der Eigenschaft, daß sich die Reihe im Exponenten der WKB-Lösung ([2], [4]) im Intervall j in eine endliche Summe reduziert, die Differentialgleichung (3) ist, in der der Koeffizient $f(t)$ eine Lösung von (1) in j ist.

Die Lösungen von (1) sind jedoch anwendbar auch in anderen Gebieten der Theorie linearer Differentialgleichung zweiter Ordnung, z. B. bei asymptotischer Integration von (2) im sog. elliptischen Fall. In [3], Seite 438 finden wir

Satz 1.

Sei $q(t) \in C^2$ positive Funktion im Intervall $j = \langle 0, \infty)$, welche die Bedingungen

$$\int^{\infty} \sqrt{q(t)}\,\mathrm{d}t = \infty, \qquad \int^{\infty} \left| \frac{5q'^2(t)}{16q^3(t)} - \frac{q''(t)}{4q^2(t)} \right| . \sqrt{q(t)}\,\mathrm{d}t < \infty \tag{4}$$

erfüllt. Sind α, β beliebige Konstanten, so gibt es eine einzige Lösung $y(t)$ der

Differentialgleichung

$$y'' + q(t)\, y = 0, \tag{2}$$

die den asymptotischen Gleichheiten

$$\sqrt[4]{q(t)}\, y(t) = [\alpha + o(1)] \cos \int_0^t \sqrt{q(\tau)}\, d\tau + [\beta + o(1)] \sin \int_0^t \sqrt{q(\tau)}\, d\tau,$$

$$\{\sqrt[4]{q(t)}\, y(t)\}' \frac{1}{\sqrt{q(t)}} = -[\alpha + o(1)] \sin \int_0^t \sqrt{q(\tau)}\, d\tau + \tag{5}$$

$$+ [\beta + o(1)] \cos \int_0^t \sqrt{q(\tau)}\, d\tau$$

für $t \to \infty$ genügt.

In [5] und [6] enthaltene Resultate ermöglichen uns folgende Behauptung auszusprechen:

Satz 2.

Die Bedingungen (4) sind nicht zur Gültigkeit von (5) notwendig.

Beweis: Es genügt eine solche die Bedingungen (4) nicht erfüllende Funktion $q(t)$ zu finden, daß die Gleichheiten (5) erfült sind.

Betrachten wir die Funktion

$$q(t) = (at + b)^{-4},$$

wo $a > 0$, $b > 0$ beliebige Konstanten sind. Diese Funktion ist die Lösung von (1), ist offensichtlich positiv und gehört zur Klasse C^2 im Intervall $\langle 0, \infty)$. In diesem Fall

$$\int^{\infty} \sqrt{q(t)}\, dt = \int^{\infty} \frac{dt}{(at + b)^2} < \infty,$$

$$\int^{\infty} \left| \frac{5q'^2(t)}{16q^3(t)} - \frac{q''(t)}{4q^2(t)} \right| \sqrt{q(t)}\, dt = \int^{\infty} \left| \frac{5q'^2(t) - 4q(t)\, q''(t)}{16q^3(t)} \right| \sqrt{q(t)}\, dt = 0,$$

denn $q(t)$ genügt der Differentialgleichung (1). Die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{(at + b)^4}\, y = 0, \tag{6}$$

hat z. B. die Basis ([5])

$$y_1(t) = (at + b) \sin \left[-\frac{1}{a(at + b)} \right],$$

$$y_2(t) = (at + b) \cos \left[-\frac{1}{a(at + b)} \right],$$

und daher ist die Funktion

$$y(t) = (at + b) \left\{ c_1 \cos \left[-\frac{1}{a(at + b)} \right] + c_2 \sin \left[-\frac{1}{a(at + b)} \right] \right\},$$

für beliebige Konstanten c_1, c_2 die Lösung von (6) im Intervall $\langle 0, \infty)$. Wählen wir

$$c_1 = \alpha \cos \frac{1}{ab} + \beta \sin \frac{1}{ab},$$

$$c_2 = -\alpha \sin \frac{1}{ab} + \beta \cos \frac{1}{ab},$$

wo α, β Konstanten aus Satz 1 sind. Die entsprechende Lösung von (6) läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} y(t) &= (at+b)\left\{\left(\alpha \cos \frac{1}{ab} + \beta \sin \frac{1}{ab}\right) . \cos \left[-\frac{1}{a(at+b)}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\alpha \sin \frac{1}{ab} + \beta \cos \frac{1}{ab}\right) . \sin \left[-\frac{1}{a(at+b)}\right]\right\} = \\ &= (at+b)\left\{\alpha \cos \left[-\frac{1}{a(at+b)} + \frac{1}{ab}\right] + \beta \sin \left[-\frac{1}{a(at+b)} + \frac{1}{ab}\right]\right\} = \\ &= (at+b)\left[\alpha \cos \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2} + \beta \sin \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2}\right]. \end{aligned}$$

Somit gelten die Bezeichungen

$$\begin{aligned} &\frac{1}{at+b}\, y(t) = \alpha \cos \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2} + \beta \sin \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2}, \\ &\left\{\frac{1}{at+b}\, y(t)\right\}'(at+b)^2 = -\alpha \sin \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2} + \beta \cos \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Die letzten zwei Beziehungen sind asymptotische Gleichheiten (5) für die Gleichung (6).

Es gebe außer der oben angeführten Lösung $y(t)$ noch eine solche Lösung $y^*(t)$ von (6) im Intervall $\langle 0, \infty)$, daß

$$\frac{1}{at+b}\, y^*(t) = [\alpha + o(1)] \cos \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2} + [\beta + o(1)] \sin \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2} \tag{8}$$

gilt. Subtrahieren wir voneinander (7) und (8) erhalten wir für die Funktion $Y(t) = y^*(t) - y(t)$ die Beziehung

$$Y(t) = (at+b)\left[o(1) \cos \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2} + o(1) \sin \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2}\right]. \tag{9}$$

Da $Y(t)$ die Lösung von (6) im Intervall $\langle 0, \infty)$ ist und die Funktionen

$$y_1^*(t) = (at+b) \cos \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2}, \qquad y_2^*(t) = (at+b) \sin \int_0^t \frac{d\tau}{(a\tau+b)^2},$$

ihre Basis bilden, gilt

$$Y(t) = c_1^* y_1^*(t) + c_2^* y_2^*(t),$$

wo c_1^* und c_2^* geeignete Konstanten sind. Aus beiden Beziehungen (9) und (10) folgt durch Vergleich, daß dann $o(1) = c_1^*$ (oder c_2^*) und demnach $c_1^* = c_2^* = 0$. Dies bedeutet natürlich, daß $Y(t)$ eine triviale Lösung von (6) ist. Daher $y^*(t) = y(t)$ für alle $t \in \langle 0, \infty)$ und die Lösung $y(t)$ is somit die einzige den asymptotischen Gleichheiten (5) genügende Lösung dieser Gleichung.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Borůvka, O.: *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. D. V. W.*, Berlin 1967.

[2] Bellman, R.—Vasudevan, R.: *On the generalizations of Bremmer series solutions of wave equations.* J. Math. Anal. Appl. 52 1975, 151—167.

[3] Hartman, F.: *Ordinary differential equations.* New York, London, Sydney 1964. (Russische Übersetzung 1970.)

[4] Kamke, E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen.* Leipzig 1959. (Russische Übersetzung 1965.)

[5] Zeman, J.: *Über eine Anwendung der Phasentheorie.* Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 53 1977, 137—140

[6] Zeman, J.: *Eine Bemerkung zur Methode WKB.* Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 57 1978, 61—68.

SOUHRN

POZNÁMKA K ASYMPTOTICKÉ INTEGRACI DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' + q(t)\,y = 0$

JIŘÍ ZEMAN

Práce se zabývá asymptotickou integrací diferenciální rovnice (2) v eliptickém případě ([3]). Speciálně je dokázáno, že podmínky ve větě 8.3 monografi [3] nejsou nutné. Při důkazu je použito nelineární diferenciální rovnice (1), jejíž řešení hrají jistou roli v teorii WKB-metody ([2], [4]) resp. v teorii fází ([1]) lineární diferenciální rovnice (2).

РЕЗЮМЕ

ЗАМЕЧАНИЕ К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + p(t)\,y = 0$

ИРЖИ ЗЕМАН

Работа занимается асимптотическим интегрированием дифференциального уравнения (2) в эллиптическом случае ([3]). Именно доказано, что условия теоремы 8.3 монографии [3] не являются необходимимы. Для доказательства применено нелинейное дифференциальное уравнение (1), решения которого играют некоторую роль в теории ВКБ-метода ([2], [4]), или в теории фаз ([1]) линейного дифференциального уравнения (2).