František Machala

Über Mengen mit Trennrelationen

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 20 (1981), No. 1, 5--22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120096

1981 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 69

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Ladislav Sedláček, CSc.

ÜBER MENGEN MIT TRENNRELATIONEN

FRANTIŠEK MACHALA

(Eingelangt am 15. April 1980)

Die Trennrelationen werden eng zusammenhängend mit den Zwischenrelationen, mit den zyklischen und vollständigen Anordnungen behandelt. Nähere Untersuchung dieser Problematik wurde durch den axiomatischen Aufbau euklidischer Geometrie und durch späteres Studium der allgemeineren angeordneten geometrischen Strukturen angeregt. Die Trennrelationen stellen einen Grundbegriff in der Definition der angeordneten projektiven Ebenen [4], insbesondere beim axiomatischen Aufbau der reelen projektiven Ebene dar [1].

Die vorliegende Arbeit behandelt die Trennrelationen selbst an sich, die entsprechende geometrische Interpretation unbeachtend. Sie werden hier etwas allgemeiner als normalweise auch für die nicht notwendig verschiedenen Elemente definiert. Dem engen Zusammenhang zwischen den Trennrelationen und den zyklischen Anordnungen wegen, werden die Mengen mit Trennrelationen zyklisch geordnet gennant. Grundlegend ist dabei der durch Definition 4 eingeführte Begriff der konvexen Teilmengen. Ganz naturgemäß wird ein Homomorphismus zyklisch geordneter Mengen definiert. In den Sätzen 10 und 11 werden dann die Zusammenhänge zwischen den Homomorphismen zyklisch geordneter Mengen und den Zerlegungen dieser Mengen auf konvexe Teilmengen gezeigt. Durch jede konvexe Teilmenge von $\mathscr{M}$ wird eine weitere Trennrelation auf $\mathscr{M}$ bestimmt. Auf jeder konvexen Teilmenge einer zyklisch geordneten Menge wird eine Zwischenrelation und auf der Vereinigung zweier elementfremder Mengen mit den Zwischenrelationen eine Trennrelation definiert. Die Zusammenhänge zwischen diesen induzierten Relationen sind in den Sätzen 18 und 19 angegeben.

In den anderen Arbeiten des Vefassers werden diese Ergebnisse für die Lösung des Problems der Fortsetzung einer Anordnung affiner Klingenberg-Ebene zu einer Anordnung projektiver Klinberg-Ebene benutzt.

Definition 1.

Es sei $\mathscr{M}$ eine nichtleere Menge und $\leqq$ eine binäre Relation in $\mathscr{M}$. Das Paar $(\mathscr{M}, \leqq)$ heißt (vollständig) *geordnete Menge* und $\leqq$ *Anordnung* von $\mathscr{M}$, wenn für alle A, B, C $\in \mathscr{M}$ gilt;

(A1) $A \leqq A$,

(A2) $A \leqq B \wedge B \leqq A \Rightarrow A = B$,
(A3) $A \leqq B \wedge B \leqq C \Rightarrow A \leqq C$,
(A4) $A \leqq B \vee B \leqq A$.

Bemerkung 1.

Es sei $(\mathcal{M}, \leqq)$ eine geordnete Menge. Definiert man eine weitere binäre Relation $\leqq$, in $\mathcal{M}$ durch $A \leqq' B :\Leftrightarrow B \leqq A$, dann ist $\leqq'$ eine zu $\leqq$ inverse Anordnung von $\mathcal{M}$. Gilt $A \leqq B$ und zugleich $A \neq B$, dann schreibt man, wie üblich, $A < B$. Eine einelementige Menge $\mathcal{M} = \{A\}$ läßt sich durch $A \leqq A$ anordnen.

Definition 2.

Eine Ternärrelation $(\ast\ast\ast)$ in einer nichtleeren Menge $\mathcal{M}$ heißt *Zwischenrelation*, wenn für alle $A, B, C, X \in \mathcal{M}$ gilt:
(Z1) $(ABC) \Rightarrow (CBA)$,
(Z2) $(ABC) \vee (ACB) \vee (CAB)$,
(Z3) $(ABC) \wedge (ACB) \Rightarrow B = C$,
(Z4) $(ABC) \Rightarrow (ABX) \vee (XBC)$.
Gilt (ABC), dann B liegt zwischen A und C.

Aus (Z1) bis (Z4) gehen folgende Beziehungen (Z5) bis (Z8) hervor;
(Z5) $(ABC) \wedge (BCD) \Rightarrow (ACD) \vee B = C$,
(Z6) $(ABC) \wedge (ACD) \Rightarrow (BCD)$,
(Z7) $(ABC) \wedge (ACD) \Rightarrow (ABD)$,
(Z8) $(AAB), (ABA) \Rightarrow A = B$.
(Siehe [3], S. 24).

Satz 1.

Es sei $(\ast\ast\ast)$ eine Zwischenrelation auf $\mathcal{M}$. Sind A, B, C, X aus $\mathcal{M}$ mit $B \neq A, C, X$, dann können die Beziehungen (ABC), (ABX) und (XBC) nicht zugleich gelten.

Beweis. Es sei $(ABC) \wedge (ABX) \wedge (XBC)$ mit $B \neq A, C, X$. Für A, C, X erhält man nach (Z2) $(XAC) \vee (AXC) \vee (ACX)$. Nach (Z1) und (Z6) ergibt sich $(XAC) \wedge \wedge (ABC) \Rightarrow (CAX) \wedge (CBA) \Rightarrow (BAX)$ und nach (Z3) $(ABX) \wedge (BAX) \Rightarrow A = B$, also ein Widerspruch. Gilt (AXC), dann ergibt sich nach (Z6) $(ABX) \wedge (AXC) \Rightarrow \Rightarrow (BXC)$. Aus $(BXC) \wedge (XBC)$ folgt dann nach (Z3) $B = X$, also wieder ein Widerspruch. Gilt (ACX), dann erhält man $(ACX) \wedge (XBC) \Rightarrow (BCA)$ und $(ABC) \wedge \wedge (BCA) \Rightarrow B = C$. Somit ist keine der Beziehungen (XAC), (AXC), (ACX) erfüllt im Widerspruch zu (Z2). Unsere Voraussetzung $(ABC) \wedge (ABX) \wedge (XBC)$ ist also falsch.

Satz 2.

Es sei $(\ast\ast\ast)$ eine Zwischenrelation auf $\mathcal{M}$. Sind $0, 1$ zwei verschiedene Elemente aus $\mathcal{M}$, dann gibt es eine Anordnung $\underset{01}{\leqq}$ von $\mathcal{M}$ mit $0 \underset{01}{\leqq} 1$ und $(ABC) \Leftrightarrow A \underset{01}{\leqq} B \underset{01}{\leqq} C \vee C \underset{01}{\leqq} B \underset{01}{\leqq} A$. Ist $(\mathcal{M}, \leqq)$ eine geordnete Menge, dann ist $(ABC) :\Leftrightarrow A \leqq B \leqq$

$\leqq C \vee C \leqq B \leqq A$ *eine Zwischenrelation auf* $\mathcal{M}$. *Definiert man durch diese Zwischenrelation eine Anordnung* $\underset{01}{\leqq}$ *von* $\mathcal{M}$, *dann gilt* $A \underset{01}{\leqq} B \Leftrightarrow A \leqq B$ *bzw.* $A \underset{01}{\leqq} B \Leftrightarrow B \leqq A$, *alls* $0 < 1$ *bzw.* $1 < 0$ *ist* (Vgl. [3], § 2.2).

Definition 3.

Es sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge und $|$ eine binäre Relation in $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Das Paar $(\mathcal{M}, |)$ heißt *zyklisch geordnete Menge* und $|$ Trennrelation auf $\mathcal{M}$, wenn für alle $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}$ gilt:

(C1) $AB \mid CD \Leftrightarrow CD \mid AB \Leftrightarrow BA \mid CD$,

(C2) $AB \mid CD \vee AC \mid BD \vee AD \mid BC$,

(C3) $AB \mid CD \wedge CA \mid BD \Rightarrow B = C \vee A = D$,

(C4) $AC \mid BD \wedge AD \mid CE \wedge C \neq D \Rightarrow AD \mid BE$.

Bemerkung 2.

In der Definition 3 wird ein Paar $(A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ kurz mit AB bezeichnet. Wird in der Definition 3 zusätzlich vorausgesetzt, daß $AB \mid CD$ nur für voneinander verschiedene Elemente A, B, C, D definiert ist, dann ist $|$ eine Trennrelation im Sinne von [1], [4].

Satz 3.

Es sei $(\mathcal{M}, |)$ *eine zyklisch geordnete Menge. Für beliebige* $A, B, D \in \mathcal{M}$ *gilt* $AB \mid BD$ *und* $AD \mid BB \Rightarrow A = B \vee D = B$.

Beweis. Es seien $A, B, D \in \mathcal{M}$. Gilt $A = B$, dann ergibt sich nach (C2) $BB \mid BD \vee BB \mid BD \vee BD \mid BB$, also nach (C1) $BB \mid BD$. Für $B = D$ erhält man ähnlich $AB \mid BB$. Ferner sei $B \neq A, D$. Für die Elemente A, B, B, D gilt gemäß (C2) $AB \mid BD \vee AB \mid BD \vee AD \mid BB$, also $AB \mid BD \vee AD \mid BB$. Es sei $AD \mid BB$. Wegen $BB \mid BD$ ergibt sich dann nach (C4) $AD \mid BB \wedge BB \mid BD \wedge B \neq D \Rightarrow AB \mid BD$. Aus (C1) und (C3) folgt $AB \mid BD \wedge AD \mid BB \Rightarrow BA \mid BD \wedge BB \mid AD \Rightarrow A = B \vee D = B$, also ein Widerspruch. Wegen $AB \mid BD \vee AD \mid BB$ gilt also $AB \mid BD$.

Bemerkung 3.

Wir setzen $AB \nmid CD :\Leftrightarrow$ non $AB \mid CD$. Aus $AB \nmid CD$ folgt dann $A \neq C, D$; $B \neq C, D$ und $A = B \Rightarrow A \neq C \wedge A \neq D$ bzw. $C = D \Rightarrow A \neq C \wedge B \neq C$.

Satz 4.

Sind A, B, C, D *Elemente einer zyklisch geordneten Menge* $(\mathcal{M}, |)$ *mit* $A \neq C, D$ *und* $B \neq C, D$, *dann* $AB \mid CD \Rightarrow AC \nmid BD \wedge AD \nmid BC$.

Beweis. Es sei $A \neq C, D$: $B \neq C, D$ und $AB \mid CD$. Gilt zugleich $AC \mid BD$, dann ergibt sich nach (C3) $AB \mid CD \wedge CA \mid BD \Rightarrow B = C \vee A = D$, was zu $A \neq D$ und $B \neq C$ widerspricht. Aus $AB \mid CD \wedge AD \mid BC$ folgt nach (C1) und (C3) $DC \mid AB \wedge AD \mid CB \Rightarrow C = A \vee D = B$, also wieder ein Widerspruch.

Satz 5.

Ist $(\mathcal{M}, |)$ *eine zyklisch geordnete Menge und sind* A, B, X, Y, Z *aus* $\mathcal{M}$, *dann* $AB \mid XZ \wedge AB \nmid YZ \wedge X \neq A, B \Rightarrow AB \mid XY$.

Beweis. Es sei $AB \mid XZ \wedge AB \nmid YZ \wedge X \neq A, B$. Gemäß (C2) gilt $AB \mid XY \vee \vee AX \mid BY \vee AY \mid BX$. Es sei z. B. $AX \mid BY$, also auch $AX \mid YB$. Nach (C4) ergibt sich $AX \mid YB \wedge AB \mid XZ \wedge X \neq B \Rightarrow AB \mid YZ$, also ein Widerspruch zu $AB \nmid YZ$. Es sei $AY \mid BX$, also auch $BX \mid YA$. Nach (C4) ergibt sich $BX \mid YA \wedge BA \mid XZ \wedge X \neq \neq A \Rightarrow BA \mid YZ$, also wieder ein Widerspruch. Wegen $AX \nmid BY \wedge AY \nmid BX$ gilt $AB \mid XY$.

Satz 6.

Ist $(\mathcal{M}, |)$ *eine zyklisch geordnete Menge und sind* A, B, X, Y, Z *aus* $\mathcal{M}$, *dann* $AB \nmid XY \wedge AB \nmid YZ \Rightarrow AB \nmid XZ$.

Beweis. Es sei $AB \nmid XY \wedge AB \nmid YZ$. Wegen $AB \nmid XY$ ist dann $X \neq A, B$. Nach Satz 5 gilt $AB \mid XZ \wedge AB \nmid YZ \wedge X \neq A, B \Rightarrow AB \mid XY$, was ein Widerspruch ist. Mithin ist $AB \nmid XZ$.

Satz 7.

Sind A, B, X, Y, Z *Elemente einer zyklisch geordneten Menge* $(\mathcal{M}, |)$ *mit* $A \neq X, Y, Z$ *und* $B \neq X, Y, Z$, *dann* $AB \mid XY \wedge AB \mid XZ \Rightarrow AB \nmid YZ$.

Beweis. Es sei $AB \mid XY \wedge AB \mid XZ$. Aus $AB \mid XZ$ und $A \neq X, Z$; $B \neq X, Z$ folgt nach Satz 4 $AX \nmid BZ$ und $AZ \nmid BX$. Nehmen wir $AB \mid YZ$ an. Wegen $A \neq Y, Z$ und $B \neq Y, Z$ gilt nach Satz 4 $AY \nmid BZ$ und $AZ \nmid BY$. Nach Satz 6 ergibt sich dann $BZ \nmid AX \wedge BZ \nmid AY \Rightarrow BZ \nmid XY$ und $AZ \nmid BX \wedge AZ \nmid BY \Rightarrow AZ \nmid XY$. Daraus folgt aber $XY \nmid BZ \wedge XY \nmid AZ \Rightarrow XY \nmid AB$, was ein Widerspruch zu $AB \mid XY$ ist. Es gilt daher $AB \nmid YZ$.

Definition 4.

Es sei $(\mathcal{M}, |)$ eine zyklisch geordnete Menge. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{M}$ heißt *konvex*, falls ein Element $X \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ existiert, so daß $AB \mid CX \Rightarrow C \in \mathcal{K}$ für beliebige $A, B \in \mathcal{K}$ und $C \in \mathcal{M}$ erfüllt ist.

Satz 8.

Ist eine Teilmenge $\mathcal{K}$ *einer zyklisch geordneten Menge* $(\mathcal{M}, |)$ *konvex, dann gilt* $AB \mid CY \Rightarrow C \in \mathcal{K}$ *für beliebige* $A, B \in \mathcal{K}$, $C \in \mathcal{M}$ *und* $Y \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$.

Beweis. Es sei $\mathcal{K}$ konvex. Dann gibt es ein Element $X \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ mit $AB \mid CX \Rightarrow \Rightarrow C \in \mathcal{K} \;\forall A, B \in \mathcal{K}$. Ferner sei Y ein Element aus $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ konvex ist, gilt $AB \mid YX \Rightarrow Y \in \mathcal{K}$, was aber ein Widerspruch ist. Somit ist $AB \nmid YX$. Es sei nun $AB \mid CY$ mit $A, B \in \mathcal{K}$. Aus $A = C$ bzw. $B = C$ folgt $C \in \mathcal{K}$. Gilt $C \neq A, B$, dann ergibt sich nach Satz 5 $AB \mid CY \wedge AB \nmid XY \wedge C \neq A, B \Rightarrow AB \mid CX \Rightarrow C \in \mathcal{K}$.

Bemerkung 4.

Ist $(\mathcal{M}, |)$ eine zyklisch geordnete Menge, dann ist $\mathcal{M}$ nicht konvex. Enthält $\mathcal{M}$ mindestens zwei verschiedene Elemente, dann ist jede einelementige Teilmenge von $\mathcal{M}$ konvex.

Satz 9.

Ist eine Teilmenge $\mathscr{K}$ einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$ konvex, dann ist auch $\mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ konvex.

Beweis. Es sei $\mathscr{K}$ konvex und sei $\mathscr{K}' = \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ gesetzt. Die Mengen $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ sind nicht leer. Wir wählen ein Element $X \in \mathscr{K}$ und nehmen $AB \mid CX$ mit $A, B \in \mathscr{K}'$ an. Ist C in $\mathscr{K}$ enthalten, so ergibt sich nach Definition 4 und nach Satz 8 $AB \mid CX \Rightarrow$ $\Rightarrow CX \mid AB \Rightarrow A \in \mathscr{K}$, also ein Widerspruch. Mithin gilt $C \in \mathscr{K}'$ und $\mathscr{K}'$ ist daher konvex.

Definition 5.

Es seien $(\mathscr{M}, |)$ und $(\mathscr{N}, |)$ zyklisch geordnete Mengen. Eine Abbildung σ der Menge $\mathscr{M}$ auf die Menge $\mathscr{N}$ heißt *Homomorphismus* von $(\mathscr{M}, |)$ auf $(\mathscr{N}, |)$, wenn $AB \mid CD \Rightarrow A^\sigma B^\sigma \mid C^\sigma D^\sigma$ für $A, B, C, D \in \mathscr{M}$ gilt. Ein Homomorphismus von $(\mathscr{M}, |)$ auf $(\mathscr{N}, |)$ heißt ***Isomorphismus***, wenn σ eine bijektive Abbildung von $\mathscr{M}$ auf $\mathscr{N}$ ist. Zwei zyklisch geordnete Mengen $(\mathscr{M}, |)$ und $(\mathscr{N}, |)$ sind isomorph, wenn ein Isomorphismus von $(\mathscr{M}, |)$ auf $(\mathscr{N}, |)$ existiert.

Bemerkung 5.

Es sei $(\mathscr{M}, |)$ eine zyklisch geordnete Menge und $\mathscr{N} = \{N\}$ eine einelementige Menge. Setzen wir $NN \mid NN$, dann ist $(\mathscr{N}, |)$ eine zyklisch geordnete Menge. Die Abbildung σ; $X \to N$ für alle $X \in \mathscr{M}$ ist offenbar ein Homomorphismus von $(\mathscr{M}, |)$ auf $(\mathscr{N}, |)$, den man trivial nennt.

Satz 10.

Es sei σ ein nichttrivialer Homomorphismus einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$ auf eine zyklisch geordnete Menge $(\mathscr{N}, |)$. Die Menge $\bar{P} = \{X \in \mathscr{M} \mid X^\sigma = P^\sigma\}$ ist konvex für ein beliebiges Element P aus $\mathscr{M}$ und alle solche Mengen bilden eine Zerlegung Σ von $\mathscr{M}$. Es sei $\overline{\mathscr{M}} = \mathscr{M}/\Sigma$ die zur Zerlegung Σ gehörige Restklassen-Menge. Führen wir auf $\overline{\mathscr{M}} \times \overline{\mathscr{M}}$ eine binäre Relation ϱ durch $\bar{A}\bar{B}\varrho\bar{C}\bar{D}$: $\Leftrightarrow A^\sigma B^\sigma \mid C^\sigma D^\sigma$ ein, dann ist ϱ eine Trennrelation und $(\overline{\mathscr{M}}, \varrho)$, $(\mathscr{N}, |)$ sind isomorph.

Beweis. 1. Wir beweisen, daß $\bar{P}$ konvex für ein beliebiges $P \in \mathscr{M}$ ist. Es sei also $P \in \mathscr{M}$. Da σ ein nichttrivialer Homomorphismus ist, gibt es ein Element $X \in \mathscr{M} \setminus \bar{P}$. Es seien $A, B \in \bar{P}$ und $C \in \mathscr{M}$ mit $AB \mid CX$. Wegen $A^\sigma B^\sigma \mid C^\sigma X^\sigma$ und $A^\sigma = B^\sigma$ ergibt sich nach Satz 3 $A^\sigma = C^\sigma \vee A^\sigma = X^\sigma$ und wegen $X \in \mathscr{M} \setminus \bar{P}$ folgt daraus $A^\sigma = C^\sigma$, also $C \in \bar{P}$. Mithin ist $\bar{P}$ konvex. Da σ eine Abbildung ist, bilden alle Mengen $\bar{P}$ eine Zerlegung Σ von $\mathscr{M}$.

2. ϱ ist offensichtlich eine Trennrelation auf $\overline{\mathscr{M}}$ und die Abbildung ξ ; $\bar{X} \to X^\sigma$ $\forall X \in \mathscr{M}$ ist ein Isomorphismus von $(\overline{\mathscr{M}}, \varrho)$ auf $(\mathscr{N}, |)$.

Satz 11.

Es sei Σ eine Zerlegung einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$ auf konvexe Teilmengen und $\overline{\mathscr{M}} = \mathscr{M}/\Sigma$ die zu Σ gehörige Restklassen-Menge. Für die Elemente $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \in \overline{\mathscr{M}}$ setzen wir $\bar{A}\bar{B}\varrho\bar{C}\bar{D}$ genau dann, wenn $M \in \bar{A}$, $N \in \bar{B}$, $P \in \bar{C}$, $Q \in \bar{D}$

so existieren, daß $MN \mid PQ$ gilt. Dann ist ϱ eine Trennrelation auf $\overline{\mathscr{M}}$ und die Abbildung $\sigma : X \to \bar{X} \, \forall \, X \in \mathscr{M}$ ist ein Homomorphismus von $(\mathscr{M}, |)$ auf $(\overline{\mathscr{M}}, \varrho)$.

Beweis. Es seien $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ voneinander verschiedene Elemente von $\overline{\mathscr{M}}$ mit $\bar{A}\bar{B}\varrho\bar{C}\bar{D}$. Wir beweisen, daß die Definition von ϱ von der Wahl der Elemente aus $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ unabhängig ist. Wegen $\bar{A}\bar{B}\varrho\bar{C}\bar{D}$ gibt es Elemente $M \in \bar{A}$, $N \in \bar{B}$, $P \in \bar{C}$, $Q \in \bar{D}$ mit $MN \mid PQ$. Wir nehmen an, daß $MN \nmid PQ'$ für ein $Q' \in \bar{D}$ gilt. Nach Satz 5 ergibt sich dann $MN \mid PQ \wedge MN \nmid PQ' \wedge Q \neq M, N \Rightarrow MN \mid QQ'$. Aus $Q, Q' \in \bar{D}$ und $M \notin \bar{D}$ folgt $QQ' \mid NM \Rightarrow N \in \bar{D}$, denn $\bar{D}$ ist konvex. Dies aber steht im Widerspruch zu $\bar{B} \neq \bar{D}$. Somit gilt $MN \mid PQ'$. Für $P' \in \bar{C}$ erhält man dann $MN \mid PQ' \Rightarrow$ $\Rightarrow MN \mid Q'P \Rightarrow MN \mid Q'P'$ und für $N' \in \bar{B}$ ähnlicherweise $MN \mid Q'P' \Rightarrow Q'P' \mid MN \Rightarrow$ $\Rightarrow Q'P' \mid MN'$. Für $M' \in \bar{A}$ ergibt sich schließlich $Q'P' \mid MN' \Rightarrow Q'P' \mid N'M \Rightarrow$ $\Rightarrow Q'P' \mid N'M' \Rightarrow M'N' \mid P'Q'$.

Es gilt $\bar{A}\bar{B}\varrho\bar{B}\bar{C}$ für alle $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \overline{\mathscr{M}}$; Wählt man Elemente $M \in \bar{A}$, $N \in \bar{B}$, $P \in \bar{C}$, dann ist $MN \mid NP$ und folglich $\bar{A}\bar{B}\varrho\bar{B}\bar{C}$. Es sei $\bar{A}\bar{A}\varrho\bar{B}\bar{C}$. Dann existieren $M \in \bar{A}$, $M' \in \bar{A}$, $N \in \bar{B}$, $P \in \bar{C}$ mit $MM' \mid NP$. Aus $\bar{A} \neq \bar{C}$ folgt $N \in \bar{A}$, also $\bar{A} = \bar{B}$, denn $\bar{A}$ ist konvex. Aus $\bar{A} \neq \bar{B}$ folgt ähnlicherweise $\bar{A} = \bar{C}$. Somit ergibt sich $\bar{A}\bar{A}\varrho\bar{B}\bar{C} \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{A} = \bar{B} \vee \bar{A} = \bar{C}$.

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß ϱ den Axiomen (C1) bis (C4) genügt. Da $AB \mid CD \Rightarrow \bar{A}\bar{B}\varrho\bar{C}\bar{D}$ gilt, ist $\sigma : X \to \bar{X} \, \forall \, X \in \mathscr{M}$ ein Homomorphismus von $(\mathscr{M}, |)$ auf $(\overline{\mathscr{M}}, \varrho)$.

Bemerkung 6.

Nach Sätzen 10 und 11 sind alle nichttriviale Homomorphismen einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$ durch Zerlegungen der Menge $\mathscr{M}$ auf die konvexen Teilmengen repräsentiert.

Definition 6.

Es sei eine Teilmenge $\mathscr{K}$ einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$ konvex und sei $\mathscr{K}' = \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ gesetzt. Wir erklären eine binäre Relation $|_{\mathscr{K}}$ in $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$ folgendermaßen: Sind die Elemente $A, B, C, D \in \mathscr{M}$ voneinander verschieden und genau zwei in $\mathscr{K}$ enthalten, dann $AB \mid_{\mathscr{K}} CD :\Leftrightarrow AB \nmid CD \wedge (A \in \mathscr{K}, B \in \mathscr{K}' \vee A \in \mathscr{K}', B \in \mathscr{K})$. In allen übrigen Fällen gilt $AB \mid_{\mathscr{K}} CD :\Leftrightarrow AB \mid CD$. So definierte $|_{\mathscr{K}}$ nennt man eine $\mathscr{K}$ *– Relation.*

Satz 12.

Es sei eine Teilmenge $\mathscr{K}$ einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$ konvex und sei $\mathscr{K}' = \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ gesetzt. Die $\mathscr{K}$-Relation $|_{\mathscr{K}}$ ist eine Trennrelation auf $\mathscr{M}$. Die Gleichheit $|_{\mathscr{K}} = |$ gilt genau dann, wenn eine der Mengen $\mathscr{K}, \mathscr{K}'$ einelementig ist. Seien die Teilmengen $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ von $(\mathscr{M}, |)$ konvex. Gibt es vier voneinander verschiedene Elemente A, B, C, D aus $\mathscr{M}$ mit $A, B \in \mathscr{K} \setminus \mathscr{L}$; $C, D \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ und ist höchstens eins von C, D in $\mathscr{L}$ enthalten, dann $|_{\mathscr{K}} \neq |_{\mathscr{L}}$.

Beweis. I. Wir beweisen, daß $|_{\mathscr{K}}$ alle Forderungen (C1) bis (C4) erfüllt. In (C1) bis (C3) läßt sich dabei nur solchen Fall untersuchen, daß die Elemente $A, B, C, D \in \mathcal{M}$ voneinander verschieden sind und genau zwei von ihnen in $\mathcal{K}$ enthalten sind.

Ad (C1) Es sei $AB\,|_{\mathcal{K}}\,CD$. Dann gilt $AB \nmid CD$ und $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}' \vee A \in \mathcal{K}'$, $B \in \mathcal{K}$. Da genau zwei von Elementen A, B, C, D in $\mathcal{K}$ liegen, folgt daraus: $C \in \mathcal{K}$, $D \in \mathcal{K}' \vee C \in \mathcal{K}'$, $D \in \mathcal{K}$. Nach (C1) ergibt sich dann $AB \nmid CD \Leftrightarrow CD \nmid AB \Leftrightarrow CD\,|_{\mathcal{K}}\,AB$. Änlicherweise läßt sich auch $AB\,|_{\mathcal{K}}\,CD \Leftrightarrow BA\,|_{\mathcal{K}}\,CD$ beweisen.

Ad (C2) Es seien $A, B, C, D \in \mathcal{M}$. Der Bestimmtheit wegen nehmen wir $A, C \in \mathcal{K}$ und $B, D \in \mathcal{K}'$ an. Da $\mathcal{K}$ konvex ist, gilt dann $AC \nmid BD$. Nach (C2) ergibt sich also $AB \mid CD \vee AD \mid BC$. Da A, B, C, D voneinander verschieden sind, gilt nach Satz 4 $AB \nmid CD \vee AD \nmid BC$. Wegen $A, C \in \mathcal{K}$ und $B, D \in \mathcal{K}'$ erhält man daraus $AB\,|_{\mathcal{K}}\,CD \vee$ $\vee\, AD\,|_{\mathcal{K}}\,BC$.

Ad (C3) Es sei $AB\,|_{\mathcal{K}}\,CD \wedge CA\,|_{\mathcal{K}}\,BD$. Dann gilt $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}' \vee A \in \mathcal{K}'$, $B \in \mathcal{K}$ und zugleich $A \in \mathcal{K}$, $C \in \mathcal{K}' \vee A \in \mathcal{K}'$, $C \in \mathcal{K}$. Aus $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}'$ folgt $C \in \mathcal{K}'$ und $D \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ konvex ist, ergibt sich daraus $AD \nmid BC$ und aus $AB \nmid CD$, $CA \nmid BD$ ergibt sich dann ein Widerspruch zu (C2). Aus $A \in \mathcal{K}'$, $B \in \mathcal{K}$ folgt $C \in \mathcal{K}$, $D \in \mathcal{K}'$ und $AD \nmid BC$, also wieder ein Widerspruch. Mithin die Beziehungen $AB\,|_{\mathcal{K}}\,CD$ und $CA\,|_{\mathcal{K}}\,BD$ können nicht zugleich gelten.

Ad (C4) Es sei $AC\,|_{\mathcal{K}}\,BD \wedge AD\,|_{\mathcal{K}}\,CE \wedge C \neq D$. Als Folgerung wollen wir $AD\,|_{\mathcal{K}}\,BE$ beweisen.

1. Es seien A, B, C, D solche voneinander verschiedene Elemente von $\mathcal{M}$, daß genau zwei in $\mathcal{K}$ enthalten sind. Dann gilt $AC\,|_{\mathcal{K}}\,BD \Rightarrow AC \nmid BD \wedge (A \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{K}' \vee$ $\vee\, A \in \mathcal{K}', C \in \mathcal{K})$. Wir nehmen z. B. an, daß $A, B \in \mathcal{K}$ und $C, D \in \mathcal{K}'$ erfüllt ist.

a) Es sei $E \in \mathcal{K}$. Gilt $E = A$, dann ist $AD \mid BE$ und folglich $AD\,|_{\mathcal{K}}\,BE$. Sei also $E \neq A$. Wegen $C, D \in \mathcal{K}'$ sind A, C, D, E voneinander verschieden und wegen $A, E \in \mathcal{K}$, $C, D \in \mathcal{K}'$ ist $AD\,|_{\mathcal{K}}\,CE \Rightarrow AD \nmid CE$. Es sei $AD \nmid BE$. Nach Satz 6 gilt dann $AD \nmid BE \wedge AD \nmid CE \Rightarrow AD \nmid BC$ und wegen $AC \nmid BD \wedge AD \nmid BC$ ergibt sich nach (C2) $AB \mid CD$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $\mathcal{K}$ ist konvex. Somit gilt $AD \mid BE$ und wegen $A, B, E \in \mathcal{K}$ auch $AD\,|_{\mathcal{K}}\,BE$.

b) Es sei $E \in \mathcal{K}'$. Wegen $C, D, E \in \mathcal{K}'$ ergibt sich $AD\,|_{\mathcal{K}}\,CE \Rightarrow AD \mid CE$. Aus $D = E$ folgt $AD \mid BE$ und $AD\,|_{\mathcal{K}}\,BE$. Es sei also $D \neq E$. Wegen $A, B \in \mathcal{K}$ und $C, E \in$ $\in \mathcal{K}'$ erhält man $AB \nmid CE$, denn $\mathcal{K}$ ist konvex. Nach Satz 5 gilt dann $CE \mid AD \wedge$ $\wedge\, CE \nmid AB \wedge D \neq C, E \Rightarrow CE \mid BD$ und $BD \mid CE \wedge BD \nmid AC \wedge E \neq B, D \Rightarrow BD \mid AE$. Da A, B, D, E voneinander verschieden sind, folgt hieraus nach Satz 4 $AD \nmid BE$. Wegen $A, B \in \mathcal{K}$ und $D, E \in \mathcal{K}'$ gilt also $AD\,|_{\mathcal{K}}\,BE$.

2. Sind A, D, C, E voneinander verschieden und genau zwei in $\mathcal{K}$ enthalten, dann läßt sich ähnlich wie unter 1 verfahren.

3. Nehmen wir an, daß weder die Voraussetzungen Ad 1 noch Ad 2 erfüllt sind. Dann gilt $AC\,|_{\mathcal{K}}\,BD \Leftrightarrow AC \mid BD$ und $AD\,|_{\mathcal{K}}\,CE \Leftrightarrow AD \mid CE$. Wegen $C \neq D$ folgt hieraus nach (C4) $AD \mid BE$. Sind alle Elemente A, D, B, E nicht verschieden, dann gilt $AD \mid BE \Rightarrow AD\,|_{\mathcal{K}}\,BE$. Es seien also A, D, B, E voneinander verschieden. Gilt $A, D \in \mathcal{K}$, dann wegen $AD \mid BE$ mindestens eins von B, E ist in $\mathcal{K}$ enthalten, denn $\mathcal{K}$ ist konvex. In diesem Falle erhält man $AD \mid BE \Rightarrow AD\,|_{\mathcal{K}}\,BE$. Gilt $A, D \in \mathcal{K}'$ bzw.

$B, E \in \mathscr{K}$ bzw. $B, E \in \mathscr{K}'$, dann läßt sich ganz ähnlich verfahren. Es seien $A, B \in \mathscr{K}$ und $D, E \in \mathscr{K}'$. Gilt dabei $C \in \mathscr{K}$, dann $A, C \in \mathscr{K}$ und $D, E \in \mathscr{K}'$ und damit sind die Forderungen von Ad 2 erfüllt. Gilt $C \in \mathscr{K}'$, dann $A, D \in \mathscr{K}$ und $B, C \in \mathscr{K}'$ und damit sind die Forderungen von Ad 1 erfüllt.

II. Wir beweisen, daß $|_{\mathscr{K}} = |$ genau dann gilt, wenn eine der Mengen $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{K}'$ einelementig ist. Es sei $\mathscr{K}$ einelementig. Dann existieren keine vier Elemente, die voneinander verschieden sind und genau zwei von ihnen in $\mathscr{K}$ enthalten sind. Hieraus folgt $AB |_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB | CD$ für alle $A, B, C, D \in \mathscr{M}$, also $|_{\mathscr{K}} = |$. Dasselbe erhält man, falls $\mathscr{K}'$ einelementig ist. Es sei umgekehrt $|_{\mathscr{K}} = |$. Nehmen wir dabei an, daß $A, B \in \mathscr{K}$ und $C, D \in \mathscr{K}'$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$ existieren. Da $\mathscr{K}$ konvex ist, gilt $AB \nmid CD$. Nach (C2) ergibt sich also $AC | BD \vee AD | BC$. Gilt $AC | BD$, so ist nach Satz 4 $AD \nmid BC$ und wegen $A \in \mathscr{K}$, $D \in \mathscr{K}'$ ergibt sich daraus $AD |_{\mathscr{K}} BC$, also $| \neq |_{\mathscr{K}}$. Aus $AD | BC$ folgt ähnlicherweise $AC \nmid BD$ und $AC |_{\mathscr{K}} BD$, also $| \neq |_{\mathscr{K}}$. Eine der Mengen $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{K}'$ ist daher einelementig.

III. Es seien die Teilmengen $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ von $\mathscr{M}$ konvex. Wir nehmen an, daß vier voneinander verschiedene Elemente $A, B, C, D \in \mathscr{M}$ mit $A, B \in \mathscr{K} \setminus \mathscr{L}$; C, $D \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ und $C \notin \mathscr{L}$, $D \in \mathscr{L}$ existieren. Da $\mathscr{K}$ konvex ist, gilt $AB \nmid CD$ und nach (C2) erhält man also $AC | BD \vee AD | BC$. Es sei z. B. $AC | BD$. Nach Satz 4 folgt daraus $AD \nmid BC$. Wegen $AC | BD$ und $A, B, C \notin \mathscr{L}$ ergibt sich nach Definition von $|_{\mathscr{L}}$ $AC |_{\mathscr{L}} BD$. Da $|_{\mathscr{L}}$ eine Trennrelation ist und A, B, C, D verschieden sind, folgt aus Satz 4 non $AD |_{\mathscr{L}} BC$. Zugleich gilt aber $AD \nmid BC \wedge A \in \mathscr{K}$, $D \in \mathscr{K}' \Rightarrow AD |_{\mathscr{K}} BC$, also $|_{\mathscr{L}} \neq |_{\mathscr{K}}$.

Satz 13.

$\mathscr{K}$ sei eine konvexe Teilmenge einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$ und $|_{\mathscr{K}}$ eine $\mathscr{K}$-Relation. Dann ist $\mathscr{K}$ eine konvexe Teilmenge der zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |_{\mathscr{K}})$. Ist $|_{\mathscr{K}\mathscr{K}}$ eine $\mathscr{K}$-Relation von $(\mathscr{M}, |_{\mathscr{K}})$, dann $|_{\mathscr{K}\mathscr{K}} = |$.

Beweis. 1. $\mathscr{K}$ ist konvex in $(\mathscr{M}, |_{\mathscr{K}})$: Es sei X ein Element von $\mathscr{K}' = \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ und sei $AB |_{\mathscr{K}} CX$ mit $A, B \in \mathscr{K}$. Wegen $A, B \in \mathscr{K}$ ergibt sich $AB |_{\mathscr{K}} CX \Rightarrow AB | CX \Rightarrow C \in \mathscr{K}$, denn $\mathscr{K}$ ist konvex in $(\mathscr{M}, |)$.

2. Wir wollen $|_{\mathscr{K}\mathscr{K}} = |$ beweisen. Es seien A, B, C, D voneinander verschieden, genau zwei von ihnen in $\mathscr{K}$ enthalten und es sei dabei $A \in \mathscr{K}, B \in \mathscr{K}' \vee A \in \mathscr{K}'$, $B \in \mathscr{K}$. Dann ergibt sich $AB |_{\mathscr{K}\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow$ non $AB |_{\mathscr{K}} CD$ und zugleich $AB |_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB \nmid CD$. Wegen non $AB |_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow$ non $AB \nmid CD \Leftrightarrow AB | CD$ gilt $AB |_{\mathscr{K}\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB | CD$. In allen übrigen Fällen ist $AB |_{\mathscr{K}\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB |_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB | CD$ erfüllt.

Bemerkung 7.

Es sei $(R, \leqq)$ die in natürlicher Weise geordnete Menge der reelen Zahlen und sei auf der Menge $\mathscr{R} = R \cup \{\infty\}$ eine Trennrelation $|$ üblicherweise eingeführt. Jedes Intervall $\mathscr{J}$ von $(R, \leqq)$ ist eine konvexe Teilemenge von $(\mathscr{R}, |)$ und durch $\mathscr{J}$ läßt sich daher eine $\mathscr{J}$-Relation von $(\mathscr{R}, |)$ erklären. Nach Satz 12 läßt sich dadurch unendlich viele und voneinander verschiedene Trennrelationen auf $\mathscr{R}$ bestimmen.

Bemerkung 8.

Ist $\mathcal{K}$ eine konvexe Teilmenge einer zyklisch geordneten Menge $(\mathcal{M}, |)$, dann ist nach Satz 9 auch $\mathcal{K}' = \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ konvex und es gilt $|_{\mathcal{K}} = |_{\mathcal{K}'}$.

Satz 14.

Es sei $\mathcal{K}$ eine konvexe Teilmenge einer zyklisch geordneten Menge $(\mathcal{M}, |)$. Setzt man (ACB): $\Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}, AB \mid CX$ für $A, B, C \in \mathcal{K}$, dann ist $(***)$ eine Zwischenrelation auf der Menge $\mathcal{K}$. Sind X, Y zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ und setzt man $A \leqq B$: $\Leftrightarrow AX \mid BY$ für $A, B \in \mathcal{K}$, dann ist $\leqq$ eine Anordnung von $\mathcal{K}$ mit $(ACB) \Leftrightarrow A \leqq C \leqq B \vee B \leqq C \leqq A$.

Beweis. 1. Wir beweisen, daß unsere Definition von $(***)$ von der Wahl des Elementes $X \in \mathcal{K}' = \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ unabhängig ist. Es sei $AB \mid CX$ für $A, B, C \in \mathcal{K}$, $X \in \mathcal{K}'$ und sei Y ein Element von $\mathcal{K}'$. Gilt $AB \nmid CY$, dann ergibt sich nach Satz 5 $AB \mid XC \wedge AB \nmid YC \wedge X \neq A, B \Rightarrow AB \mid XY$, was aber ein Widerspruch ist, denn $\mathcal{K}$ ist konvex. Somit ist $AB \mid CY$.

2. Wir beweisen, daß $(***)$ den Forderungen (Z1) bis (Z4) genügt.

Ad (Z1). Es sei (ACB). Dann ist $AB \mid CX$ für ein $X \in \mathcal{K}'$ und nach (C1) ergibt sich $BA \mid CX$, also (BCA).

Ad (Z2). Es sei $A, B, C \in \mathcal{K}$. Ist X ein Element von $\mathcal{K}'$, dann gilt nach (C2) $AB \mid CX \vee AC \mid BX \vee AX \mid BC$, nach (C1) ergibt sich daraus $AB \mid CX \vee AC \mid BX \vee \vee BC \mid AX$ und folglich $(ACB) \vee (ABC) \vee (CAB)$.

Ad (Z3). Es sei $(ABC) \wedge (ACB)$, also $AC \mid BX \wedge AB \mid CX$ für $X \in \mathcal{K}'$. Nach (C1) gilt dann $AB \mid CX \wedge CA \mid BX$ und nach (C3) folgt daraus $B = C \vee A = X$. Wegen $A \neq X$ ist also $B = C$.

Ad (Z4). Es seien $A, B, C, D \in \mathcal{K}$ mit (ABC), also mit $AC \mid BX$ für $X \in \mathcal{K}'$. Da nach Satz 6 aus $BX \nmid AD \wedge BX \nmid DC$ stets $BX \nmid AC$ folgt, was ein Widerspruch ist, gilt $AD \mid BX \vee DC \mid BX$ und folglich $(ABD) \vee (DBC)$.

3. Es seien $X, Y \in \mathcal{K}'$ mit $X \neq Y$. Wir beweisen, daß die durch $A \leqq B$: $\Leftrightarrow AX \mid BY$ definierte binäre Relation $\leqq$ eine Anordnung von $\mathcal{K}$ ist.

Ad (A1). Für $A \in \mathcal{K}$ gilt nach Satz 3 $AX \mid AY$, also $A \leqq A$.

Ad (A2). Aus $A \leqq B \wedge B \leqq A$ folgt $AX \mid BY \wedge BX \mid AY$, woraus sich $A = B \vee X = = Y$ ergibt. Wegen $X \neq Y$ gilt also $A = B$.

Ad (A3). Es sei $A \leqq B \wedge B \leqq C$, also $AX \mid BY \wedge BX \mid CY$. Wir wollen $AX \mid CY$ beweisen. Gilt $A = B$, dann $BX \mid CY \Rightarrow AX \mid CY$. Ferner sei $A \neq B$ und sei dabei $AX \nmid \nmid CY$. Nach Satz 5 ergibt sich dann $AX \mid BY \wedge AX \nmid CY \wedge B \neq A, X \Rightarrow AX \mid BC$ und aus (C4) folgt daraus $BX \mid CY \wedge AX \mid BC \wedge X \neq C \Rightarrow BX \mid AY$. Nach (C3) ergibt sich $BX \mid AY \wedge AX \mid BY \Rightarrow X = Y \vee B = A$, also ein Widerspruch. Mithin gilt $AX \mid CY$ und $A \leqq C$.

Ad (A4). Es seien $A, B \in \mathcal{K}$. Nach (C2) ist $AB \mid XY \vee AX \mid BY \vee AY \mid BX$. Da $\mathcal{K}$ konvex ist, gilt $AB \nmid XY$ und daher $AX \mid BY \vee AY \mid BX$. Dies bedeutet aber $A \leqq B \vee \vee B \leqq A$.

4. a) Es sei (ACB), also $AB \mid CX$. Aus $A = C$ ergibt sich wegen $A \leqq B \vee B \leqq A$

entweder $A \leqq C \leqq B$ oder $B \leqq C \leqq A$. Es sei $A \neq C$. Dann ist $A \leqq C \vee C \leqq A$, also $AX \mid CY \vee CX \mid AY$. Wir nehmen $A \leqq C$, also $AX \mid CY$, an. Gilt dabei $CX \nmid BY$, dann erhält man nach Satz 5 $AB \mid CX \wedge CX \nmid BY \wedge A \neq C, X \Rightarrow CX \mid AY$ und nach (C3) $AX \mid CY \wedge CX \mid AY \Rightarrow A = C \vee X = Y$, also ein Widerspruch. Mithin gilt $CX \mid BY$ und $C \leqq B$, also $A \leqq C \leqq B$. Im Falle $C \leqq A$ beweisen wir ähnlicherweise, daß $B \leqq C$ und $B \leqq C \leqq A$ gilt.

b) Es sei $A \leqq C \leqq B$, also $AX \mid CY \wedge CX \mid BY$. Nach (C4) ergibt sich $CY \mid AX \wedge \wedge CX \mid YB \wedge X \neq Y \Rightarrow CX \mid AB$, also $AB \mid CX$, was (ACB) bedeutet. Ähnlich läßt sich $B \leqq C \leqq A \Rightarrow (ACB)$ beweisen.

Bemerkung 9.

Es sei $\mathcal{K}$ eine konvexe Menge einer zyklisch geordneten Menge $(\mathcal{M}, |)$ und sei $\leqq_{XY}$ die im Satz 14 durch zwei verschiedene Elemente $X, Y \in \mathcal{K}' = \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ definierte Anordnung von $\mathcal{K}$. Dann ist $\leqq_{YX}$ die zu $\leqq_{XY}$ inverse Anordnung von $\mathcal{K}$. Es seien X', Y' weitere Elemente von $\mathcal{K}'$ mit $X' \neq Y'$ und $\leqq_{X'Y'}$ die zugehörige Anordnung von $\mathcal{K}$. Nach Satz 14 gilt $(ACB) \Leftrightarrow A \leqq_{XY} C \leqq_{XY} B \vee B \leqq_{XY} C \leqq_{XY} A \Leftrightarrow A \leqq_{X'Y'} \leqq_{X'Y'} C \leqq_{X'Y'} B \vee B \leqq_{X'Y'} C \leqq_{X'Y'} A$. Nach Satz 2 folgt daraus $\leqq_{X'Y'} = \leqq_{XY} \vee \vee \leqq_{X'Y'} = \leqq_{YX}$. Gilt also $A \leqq_{XY} B \wedge A \leqq_{X'Y'} B$ für zwei verschiedene Elemente $A, B \in \mathcal{K}$, dann $\leqq_{XY} = \leqq_{X'Y'}$.

Satz 15.

Es seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ zwei elementfremde konvexe Mengen einer zyklisch geordneten Menge $(\mathcal{M}, |)$ derart, daß in $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$ zwei verschiedene Elemente existieren. Es sei $\leqq_{XY}$ die zu zwei verschiedenen Elementen X, Y von $\mathcal{K}'$ gehörige Anordnung von $\mathcal{K}$. Setzt man $X' \leqq^{XY} Y' :\Leftrightarrow X' = Y' \vee (X' \neq Y' \wedge \leqq_{XY} = \leqq_{X'Y'})$ für $X', Y' \in \mathcal{K}'$, dann ist $\leqq^{XY}$ eine Anordnung von $\mathcal{K}'$.

Beweis. Wir beweisen, daß $\leqq^{XY}$ eine Anordnung von $\mathcal{K}'$ ist.

Ad (A1) Für ein beliebiges $X' \in \mathcal{K}'$ gilt $X' \leqq^{XY} X'$.

Ad (A2) Es sei $X' \leqq^{XY} Y' \wedge Y' \leqq^{XY} X'$. Aus $X' \neq Y'$ folgt $\leqq_{X'Y'} = \leqq_{XY} = \leqq_{Y'X'}$, was aber ein Widerspruch ist, denn $\leqq_{X'Y'}$ und $\leqq_{Y'X'}$ sind zwei inverse Anordnungen von $\mathcal{K}$. Es gilt also $X' = Y'$.

Ad (A3) Es sei $X' \leqq^{XY} Y' \wedge Y' \leqq^{XY} Z'$. Es läßt sich nur der Fall $X' \neq Y'$ und $Y' \neq Z'$ untersuchen. Dann gilt $\leqq_{X'Y'} = \leqq_{XY} = \leqq_{Y'Z'}$. Es seien A, B zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{K}$ mit $A \leqq_{XY} B$. Dann ist $A \leqq_{X'Y'} B$ und $A \leqq_{Y'Z'} B$, also $AX' \mid BY' \wedge AY' \mid BZ'$ und wegen (C1) auch $X'A \mid Y'B \wedge Y'A \mid Z'B$. Ganz ähnlich zum Beweis von Satz 14, Ad (A3) beweisen wir, daß daraus $AX' \mid BZ'$, also $A \leqq_{X'Z'} B$ folgt. Nach Bemerkung 9 gilt dann $\leqq_{XY} = \leqq_{X'Z'}$ und $X' \leqq^{XY} Z'$.

Ad (A4) Ist $X' \neq Y'$, dann gilt entweder $\leqq_{X'Y'} = \leqq_{XY}$ oder $\leqq_{Y'X'} = \leqq_{XY}$, also entweder $X' \leqq^{XY} Y'$ oder $Y' \leqq^{XY} X'$.

Satz 16.

Es seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei elementfremde konvexe Teilmengen einer zyklisch geordneten Menge $(\mathcal{M}, |)$. Nach Satz 14 erklären wir eine durch die Zwischenrelation *auf $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{K}'$ bestimmte Anordnung $\leqq^{\mathrm{I}}$ bzw. $\leqq^{\mathrm{II}}$ von $\mathscr{K}'$. Wir wählen ein Element $U \in \mathscr{K}$ und definieren auf der Menge $\mathscr{M}' = (\mathscr{K} \cup \mathscr{K}') \setminus \{U\}$ eine binäre Relation $\leqq$ durch folgende Vorschrifte:*

1. *Ist $P, Q \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$, dann $P \leqq Q$ genau dann, wenn eine der Beziehungen* $U \leqq^{\mathrm{I}} \leqq^{\mathrm{I}} P \leqq^{\mathrm{I}} Q$, $P \leqq^{\mathrm{I}} Q <^{\mathrm{I}} U$, $Q <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} P$ erfüllt ist.
2. *Ist $P, Q \in \mathscr{K}'$, dann $P \leqq Q :\Leftrightarrow P \leqq^{\mathrm{II}} Q$.*
3. *Ist $P \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$ und $Q \in \mathscr{K}'$, dann*

$$P < Q :\Leftrightarrow U <^{\mathrm{I}} P,$$
$$Q < P :\Leftrightarrow P <^{\mathrm{I}} U.$$

Die Relation $\leqq$ ist eine Anordnung von $\mathscr{M}'$.

Beweis. Wir beweisen, daß $\leqq$ die Forderungen (A1) bis (A4) erfüllt. Die Gültigkeit von (A1) folgt unmittelbar aus den Eigenschaften von $\leqq^{\mathrm{I}}$ und $\leqq^{\mathrm{II}}$.

Ad (A2) Es sei $P \leqq Q \wedge Q \leqq P$. Gilt $P, Q \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$, dann ist eine der Beziehungen $U <^{\mathrm{I}} P \leqq^{\mathrm{I}} Q$, $P \leqq^{\mathrm{I}} Q <^{\mathrm{I}} U$, $Q <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} P$ und zugleich eine von $U <^{\mathrm{I}} Q \leqq^{\mathrm{I}} P$, $Q \leqq^{\mathrm{I}} P <^{\mathrm{I}} U$, $P <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} Q$ erfüllt. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß in allen angeführten Fällen die Gleichheit $P = Q$ gilt. Aus $P, Q \in \mathscr{K}'$ folgt $P = Q$ wegen der Eigenschaften von $\leqq^{\mathrm{II}}$. Der Fall $P \in \mathscr{K}$ und $Q \in \mathscr{K}'$ kann nicht eintreten.

Ad (A3) Es sei $P \leqq Q \wedge Q \leqq R$.

a) Zuerst nehmen wir an, daß $P, Q, R \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$ gilt. Wegen $P \leqq Q$ gilt eine der Ungleichheiten $U <^{\mathrm{I}} P \leqq^{\mathrm{I}} Q$, $P \leqq^{\mathrm{I}} Q <^{\mathrm{I}} U$, $Q <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} P$ und wegen $Q \leqq R$ auch eine von $U <^{\mathrm{I}} Q \leqq^{\mathrm{I}} R$, $Q \leqq^{\mathrm{I}} R <^{\mathrm{I}} U$, $R <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} Q$. Es sei z. B. $U <^{\mathrm{I}} P \leqq^{\mathrm{I}} Q$. Gilt zugleich $U <^{\mathrm{I}} Q \leqq^{\mathrm{I}} R$, dann $U <^{\mathrm{I}} P \leqq^{\mathrm{I}} Q \leqq^{\mathrm{I}} R$ und folglich $P \leqq R$. Aus $Q \leqq^{\mathrm{I}} R <^{\mathrm{I}} U$ folgt $Q <^{\mathrm{I}} U$, also ein Widerspruch zu $U <^{\mathrm{I}} Q$. Wegen $R <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} Q$ ergibt sich $R <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} P$, also $P \leqq R$. Ähnlicherweise prüfen wir alle übrige Fälle nach.

b) Ist $P, Q, R \in \mathscr{K}'$, dann gilt $P \leqq Q \wedge Q \leqq R \Rightarrow P \leqq R$ wegen der Eigenschaften von $\leqq''$.

c) Es sei $P, Q \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$ und $R \in \mathscr{K}'$. Aus $Q \leqq R$ folgt $U <^{\mathrm{I}} Q$ und wegen $P \leqq Q$ ergibt sich hieraus $U <^{\mathrm{I}} P \leqq^{\mathrm{I}} Q$. Wegen $U <^{\mathrm{I}} P$ gilt dann $P \leqq R$. Aus $R \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$, $P, Q \in \mathscr{K}'$ folgt $Q \leqq R \Rightarrow R <^{\mathrm{I}} U \Rightarrow P \leqq R$. Es sei $P, R \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$ und $Q \in \mathscr{K}'$. Dann gilt $P \leqq Q \Rightarrow U <^{I} P$ und $Q \leqq R \Rightarrow R <^{\mathrm{I}} U$. Daraus folgt $R <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} P$, also $P \leqq R$. Es sei $Q, R \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$ und $P \in \mathscr{K}'$. Wegen $P \leqq Q$ ergibt sich $Q <^{\mathrm{I}} U$ und wegen $Q \leqq R$ folgt daraus $Q \leqq^{\mathrm{I}} R <^{\mathrm{I}} U$, also $P \leqq R$. Der Fall $Q \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$, $P, R \in \mathscr{K}'$ kann nicht eintreten, denn aus $P \leqq Q$ bzw. $Q \leqq R$ folgt $Q <^{\mathrm{I}} U$ bzw. $U <^{\mathrm{I}} Q$, also ein Widerspruch.

Ad (A4) Es seien $P, Q \in \mathscr{K} \setminus \{U\}$. Dann gilt $P <^{\mathrm{I}} U \vee U <^{\mathrm{I}} P$ bzw. $Q <^{\mathrm{I}} U \vee \vee U <^{\mathrm{I}} Q$ bzw. $P \leqq^{\mathrm{I}} Q \vee Q \leqq^{\mathrm{I}} P$. Ist z. B. $P <^{\mathrm{I}} U, Q <^{\mathrm{I}} U, P \leqq^{\mathrm{I}} Q$, dann $P \leqq^{\mathrm{I}} Q <^{\mathrm{I}} <^{\mathrm{I}} U$ und daher $P \leqq Q$. Aus $U <^{\mathrm{I}} P \wedge Q <^{\mathrm{I}} U \wedge Q \leqq^{\mathrm{I}} P$ folgt $Q <^{\mathrm{I}} U <^{\mathrm{I}} P$ und hieraus $P \leqq Q$. Ganz ähnlich lassen sich übrige Fälle untersuchen. Gilt $P, Q \in \mathscr{K}'$, dann $P \leqq Q \vee Q \leqq P$ ergibt sich wegen $P \leqq^{\|} Q \vee Q \leqq^{\|} P$. Aus $P \in \mathscr{K}$, $Q \in \mathscr{K}'$ folgt wegen $P <^{|} U \vee U <^{|} P$ entweder $Q < P$ oder $P < Q$.

Bemerkung 10.

Es seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ elementfremde konvexe Teilmengen einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, |)$. Wir nehmen an, daß beide Mengen $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ mindestens zweielementig sind. Nach Satz 2 bestimmt die durch $|$ erklärte Zwischenrelation auf $\mathscr{K}$ zwei inverse Anordnungen $\leqq^{|}_{1}$, $\leqq^{|}_{2}$ von $\mathscr{K}$ und die Zwischenrelation auf $\mathscr{K}'$ bestimmt ähnlicherweise zwei inverse Anordnungen $\leqq^{\|}_{1}$, $\leqq^{\|}_{2}$ von $\mathscr{K}'$. Durch das Paar $(\leqq^{|}_{1}, \leqq^{\|}_{1})$ von Anordnungen läßt sich nach Satz 16 eine Anordnung $\leqq$ der Menge $\mathscr{M}' = (\mathscr{K} \cup \mathscr{K}') \setminus \{U\}$ erklären und $(\leqq^{|}_{2}, \leqq^{\|}_{2})$ bestimmt die zu $\leqq$ inverse Anordnung von $\mathscr{M}'$. Durch $(\leqq^{|}_{1}, \leqq^{\|}_{2})$ ist eine weitere Anordnung von $\mathscr{M}'$ und durch $(\leqq^{|}_{2}, \leqq^{\|}_{1})$ die zu ihr inverse Anordnung zu erklären. Durch $|$ läßt sich also auf der Menge $\mathscr{M}'$ vier Anordnungen definieren, von denen stets zwei Paare aus den inversen Anordnungen zusammengestellt sind. Ist die Menge $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{K}'$ einelementig, so läßt sich durch $|$ zwei voneinander inverse Anordnungen von $\mathscr{M}'$ erklären.

Satz 17.

Es seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ zwei elementfremde Mengen mit Zwischenrelationen, die mit gleichem Symbol (***) bezeichnet werden. Es seien $\leqq'$ und $\leqq''$ durch diese Zwischenrelationen erklärte Anordnungen von $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$. Wir setzen $\mathscr{M} = \mathscr{K} \cup \mathscr{K}'$ und definieren auf $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$ eine binäre Relation $|$ durch folgende Vorschriften:

1. *Gilt $A, B, C, D \in \mathscr{K}$ bzw. $A, B, C, D \in \mathscr{K}'$, dann ist $AB \mid CD$ genau dann, wenn eine der folgenden Beziehungen erfüllt ist: $(ACB) \wedge (CBD)$, $(ACB) \wedge (CAD)$, $(ADB) \wedge (CBD)$, $(ADB) \wedge (CAD)$.*

2. *Gilt $A, B, C \in \mathscr{K}$, $D \in \mathscr{K}'$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{K}'$, $D \in \mathscr{K}$,* dann *$AB \mid CD \Leftrightarrow CD \mid AB \Leftrightarrow (ACB)$.*

3. *Gilt $A, C \in \mathscr{K}$ und $B, D \in \mathscr{K}'$, dann $AB \mid CD \Leftrightarrow BA \mid CD \Leftrightarrow CD \mid AB \Leftrightarrow (A \leqq' C \wedge B \leqq'' D) \vee (C \leqq' A \wedge D \leqq'' B)$.*

Dann ist $|$ eine Trennrelation auf $\mathscr{M}$ und die Mengen $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ sind konvex in $(\mathscr{M}, |)$.

Beweis. Wir beweisen, daß $|$ den Forderungen (C1) bis (C4) genügt.

Ad (C1) Es seien $A, B, C, D \in \mathscr{K}$ bzw. $A, B, C, D \in \mathscr{K}'$. Die Beziehungen Ad 1 werden wegen (Z1) mit den Permutationen $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$ und $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow D$ von $\{A, B, C, D\}$ reproduziert und folglich gilt $AB \mid CD \Leftrightarrow CD \mid AB \Leftrightarrow BA \mid CD$. Ist $A, B, C \in \mathscr{K}$, $D \in \mathscr{K}'$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{K}'$, $D \in \mathscr{K}$, dann $AB \mid CD \Leftrightarrow (ACB) \Leftrightarrow (BCA) \Leftrightarrow BA \mid CD$. Übrige Fälle sind direkt in der Definition von $|$ angeführt.

Ad (C2) 1. Es sei $A, B, C \in \mathscr{K}$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{K}'$. Dann gilt nach (Z8) und (Z1) $(AAB) \wedge (CAA)$, also $AB \mid CA$.

2. Es seien die Elemente $A, B, C, D \in \mathscr{K}$ bzw. $A, B, C, D \in \mathscr{K}'$ voneinder verschieden. Nach (Z2) gilt $(ABC) \vee (ACB) \vee (CAB)$.

a) Es sei (ACB). Nach Satz 1 und (Z4) ist genau eine der Beziehungen (ACD), (DCB) erfüllt.

α) Es sei (ACD). Da (DCB) nicht gelten kann, ergibt sich nach (Z2) $(CBD) \vee \vee (BDC)$. Ist (CBD), dann $(ACB) \wedge (CBD) \Rightarrow AB \mid CD$. Wegen (BDC) gilt nach (Z1) und (Z6) $(ACB) \wedge (BDC) \Rightarrow (BDC) \wedge (BCA) \Rightarrow (DCA) \Rightarrow (ACD)$. Aus $(ACD) \wedge \wedge (BDC)$ folgt dann $AD \mid CB$.

ß) Es sei (DCB). Da (ACD) nicht erfüllt ist, gilt nach (Z2) $(ADC) \vee (CAD)$. Ist (CAD), dann ergibt sich nach (Z1) und (Z6) $(DCB) \wedge (CAD) \Rightarrow (DAC) \wedge (DCB) \Rightarrow \Rightarrow (ACB)$ und folglich $(ACB) \wedge (CAD) \Rightarrow AB \mid CD$. Aus (ADC) folgt $(ADC) \wedge \wedge (BCD) \Rightarrow AC \mid BD$.

b) Ähnlich wie in a) prüfen wir übrige Fälle (ABC) und (CAB) nach.

3. Es seien $A, B, C \in \mathscr{K}$, $D \in \mathscr{K}'$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{K}'$, $D \in \mathscr{K}$. Nach (Z2) gilt $(ABC) \vee (BAC) \vee (ACB)$ und wegen $(ABC) \Rightarrow AC \mid BD$, $(BAC) \Rightarrow BC \mid AD$, $(ACB) \Rightarrow \Rightarrow AB \mid CD$ ergibt sich dann $AC \mid BD \vee BC \mid AD \vee AB \mid CD$.

4. Es seien $A, C \in \mathscr{K}$ und $B, D \in \mathscr{K}'$. Nach (A4) gilt $A \leqq' C \vee C \leqq' A$ und $B \leqq'' \leqq'' D \vee D \leqq'' B$. Der Definition von $\mid$ nach ergibt sich $A \leqq' C \wedge B \leqq'' D \Rightarrow AB \mid CD$, $A \leqq' C \wedge D \leqq'' B \Rightarrow AD \mid CB$, $C \leqq' A \wedge B \leqq'' D \Rightarrow CB \mid AD$, $C \leqq' A \wedge D \leqq'' B \Rightarrow \Rightarrow CD \mid AB$.

Ad (C3) Es sei $AB \mid CD \wedge CA \mid BD$.

1. Es seien $A, B, C, D \in \mathscr{K}$ bzw. $A, B, C, D \in \mathscr{K}'$. Wegen $AB \mid CD$ gilt eine der Beziehungen von Ad 1; es sei z. B. $(ACB) \wedge (CBD)$. Wegen $CA \mid BD$ gilt eine der Beziehungen $(ABC) \wedge (BCD)$, $(ABC) \wedge (BAD)$, $(ADC) \wedge (BCD)$, $(ADC) \wedge (BAD)$. Aus $(ABC) \wedge (BCD)$ folgt nach (Z3) $(CBD) \wedge (BCD) \Rightarrow B = C$. Ist $(ABC) \wedge (BAD)$, dann $(ACB) \wedge (ABC) \Rightarrow B = C$ und wegen $(ADC) \wedge (BCD)$ ergibt sich $(CBD) \wedge \wedge (BCD) \Rightarrow B = C$. Es sei $(ADC) \wedge (BAD)$. Nach (Z1) und (Z5) ist $(ACB) \wedge (CBD) \Rightarrow \Rightarrow (ABD) \vee B = C$. Gilt (ABD), dann $(ABD) \wedge (BAD) \Rightarrow A = B$. Nach (Z8) ergibt sich $(ACA) \Rightarrow A = C$, also $B = C$. Ähnlicherweise prüfen wir übrige Fälle nach.

2. Es seien $A, B, C \in \mathscr{K}$, $D \in \mathscr{K}'$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{K}'$, $D \in \mathscr{K}$. Dann gilt $AB \mid CD \Rightarrow \Rightarrow (ACB)$, $CA \mid BD \Rightarrow (CBA)$ und hieraus ergibt sich nach (Z3) $B = C$.

3. Gilt $A, C \in \mathscr{K}$ und $B, D \in \mathscr{K}'$, dann ist $CA \mid BD$ nicht definiert.

Ad (C4) Es sei $AC \mid BD \wedge AD \mid CE \wedge C \neq D$. Hieraus wollen wir $AD \mid BE$ beweisen. Für die Elemente A, B, C, D sind folgende Möglichkeiten zu beachten:

I a) $A, B, C, D \in \mathscr{K}$,	b) $A, B, C, D \in \mathscr{K}'$,
II a) $A, B, C \in \mathscr{K}$, $D \in \mathscr{K}'$,	b) $D \in \mathscr{K}$, $A, B, C \in \mathscr{K}'$,
III a) $A, B, D \in \mathscr{K}$, $C \in \mathscr{K}'$,	b) $C \in \mathscr{K}$, $A, B, D \in \mathscr{K}'$,
IV a) $A, C, D \in \mathscr{K}$, $B \in \mathscr{K}'$,	b) $B \in \mathscr{K}$, $A, C, D \in \mathscr{K}'$,
V a) $B, C, D \in \mathscr{K}$, $A \in \mathscr{K}'$,	b) $A \in \mathscr{K}$, $B, C, D \in \mathscr{K}'$,
VI a) $A, B \in \mathscr{K}$, $C, D \in \mathscr{K}'$,	b) $C, D \in \mathscr{K}$, $A, B \in \mathscr{K}'$,
VII a) $A, C \in \mathscr{K}$, $B, D \in \mathscr{K}'$,	b) $B, D \in \mathscr{K}$, $A, C \in \mathscr{K}'$,
VIII a) $A, D \in \mathscr{K}$, $B, C \in \mathscr{K}'$,	b) $B, C \in \mathscr{K}$, $A, D \in \mathscr{K}'$.

In jedem der angeführten Fälle muß man noch folgende Möglichkeiten betrachten;

1. $E \in \mathscr{K}$,

2. $E \in \mathscr{K}'$.

Im folgenden prüfen wir die Fälle Ia) 1, Ia) 2, IIa) 2, IIIa) 1, IVa) 2, Va) 1, VIa) 1, VIIa) 2 nach. Übrige Fälle lassen sich ähnlich untersuchen.

Ia) 1 Es seien $A, B, C, D, E \in \mathscr{K}$. Wir wollen beweisen, daß eine der Beziehungen $(ABD) \wedge (BDE)$, $(ABD) \wedge (BAE)$, $(AED) \wedge (BDE)$, $(AED) \wedge (BAE)$ erfüllt ist. Wegen $AC \mid BD$ nehmen wir z. B. $(ABC) \wedge (BCD)$ an. Wegen $AD \mid CE$ gilt eine der Beziehungen $(ACD) \wedge (CDE)$, $(ACD) \wedge (CAE)$, $(AED) \wedge (CDE)$, $(AED) \wedge (CAE)$.

α) Es sei $(ACD) \wedge (CDE)$. Aus $(ABC) \wedge (ACD)$ folgt nach (Z6) und (Z7) (BCD) und (ABD). Nach (Z5) gilt $(BCD) \wedge (CDE) \Rightarrow (BDE) \vee C = D$ und wegen $C \neq D$ ergibt sich also (BDE). Aus $(ABD) \wedge (BDE)$ folgt dann $AD \mid BE$.

β) Es sei $(ACD) \wedge (CAE)$. Ganz ähnlich wie unter α) erhält man $(ABC) \wedge (ACD) \Rightarrow$ $\Rightarrow (BCD) \wedge (ABD)$. Nach (Z1) und (Z6) gilt $(ABC) \wedge (CAE) \Rightarrow (CBA) \wedge (CAE) \Rightarrow$ $\Rightarrow (BAE)$ und aus $(ABD) \wedge (BAE)$ folgt dann $AD \mid BE$.

γ) Es sei $(AED) \wedge (CDE)$. Gilt $B = C$, dann ergibt sich $(ABC) \wedge (BCD)$ für alle $A, D \in \mathscr{K}$ und zugleich $(AED) \wedge (CDE) \Rightarrow (AED) \wedge (BDE) \Rightarrow AD \mid BE$. Es sei also $B \neq C$. Aus $(ABC) \wedge (BCD)$ folgt nach (Z5) (ACD) und folglich $(ACD) \wedge (CDE) \Rightarrow$ $\Rightarrow (ADE) \vee C = D$. Wegen $C \neq D$ ergibt sich also (ADE) und nach (Z3) ist daher $(AED) \wedge (ADE) \Rightarrow D = E$. Nach (Z8) folgt hieraus $(AED) \wedge (BDE)$, also $AD \mid BE$.

δ) Es sei $(AED) \wedge (CAE)$. Gilt $B = C$, dann ergibt sich (ABC), (BCD) für alle A, $D \in \mathscr{K}$ und zugleich $(AED) \wedge (CAE) \Rightarrow (AED) \wedge (BAE) \Rightarrow AD \mid BE$. Es sei also $B \neq C$. Nach (Z6) und (Z7) erhält man $(CBA) \wedge (CAE) \Rightarrow (BAE) \wedge (CBE)$ und wegen (Z5) ist dann $(DCB) \wedge (CBE) \Rightarrow (DBE) \vee B = C$, also (DBE). Nach (Z7) gilt $(EAB) \wedge$ $\wedge (EBD) \Rightarrow (EAD)$ und nach (Z3) $(EAD) \wedge (AED) \Rightarrow A = E$. Wegen (Z8) ergibt sich dann $(AED) \wedge (CAE)$, also $AD \mid BE$. Übrige Fälle lassen sich ähnlicherweise nachprüfen.

Ia) 2 Es seien $A, B, C, D \in \mathscr{K}$ und $E \in \mathscr{K}'$. Aus $AD \mid CE$ folgt dann (ACD). Wegen $AC \mid BD$ gilt eine der Beziehungen $(ABC) \wedge (BCD)$, $(ABC) \wedge (BAD)$, $(ADC) \wedge$ $\wedge (BCD)$, $(ADC) \wedge (BAD)$. Es sei z. B. $(ABC) \wedge (BCD)$. Aus (Z6) und (Z7) folgt $(ABC) \wedge (ACD) \Rightarrow (BCD) \wedge (ABD)$. Wegen (ABD) gilt dann $AD \mid BE$. Aus $(ABC) \wedge$ $\wedge (BAD)$ folgt wieder (ABD). Wegen (ABD) und (BAD) ergibt sich nach (Z3) $A = B$. Somit gilt $(AAD) \Rightarrow (ABD) \Rightarrow AD \mid BE$. Aus $(ADC) \wedge (BCD)$ folgt wegen (ACD) die Gleichheit $C = D$, also ein Widerspruch. Ähnlicherweise folgt auch aus $(ADC) \wedge$ $\wedge (BAD)$ ein Widerspruch.

IIa) 2 Es seien A, B, $C \in \mathscr{K}$ und D, $E \in \mathscr{K}'$. Dann gilt $AC \mid BD \Rightarrow (ABC)$ und $AD \mid CE \Rightarrow (A \leqq' C \wedge D \leqq'' E) \vee (C \leqq' A \wedge E \leqq'' D)$. Es sei $A \leqq' C$. Wegen (ABC) folgt daraus $A \leqq' B \leqq' C$ und $A \leqq' B \wedge D \leqq'' E$, was $AD \mid BE$ bedeutet. Aus $C \leqq' A$ ergibt sich $(ABC) \Rightarrow C \leqq' B \leqq' A$ und $B \leqq' A \wedge E \leqq'' D$, also $AD \mid BE$.

IIIa) 1 Es seien A, B, D, $E \in \mathscr{K}$ und $C \in \mathscr{K}'$. Dann gilt $AC \mid BD \Rightarrow BD \mid AC \Rightarrow$ $\Rightarrow (BAD)$ und $AD \mid CE \Rightarrow AD \mid EC \Rightarrow (AED)$. Nach (Z6) erhält man $(DEA) \wedge$ $\wedge (DAB) \Rightarrow (EAB)$ und aus $(AED) \wedge (BAE)$ folgt $AD \mid BE$.

IVa) 2 Es seien $A, C, D \in \mathscr{K}$ und $B, E \in \mathscr{K}'$. Es gilt $AC \mid BD \Rightarrow AC \mid DB \Rightarrow (ADC)$ und zugleich $AD \mid CE \Rightarrow (ACD)$. Aus (Z3) folgt hieraus $C = D$, also ein Widerspruch. Dieser Fall kann nicht eintreten.

Va) 1 Es seien $B, C, D, E \in \mathscr{K}$ und $A \in \mathscr{K}'$. Dann gilt $AC \mid BD \Rightarrow BD \mid CA \Rightarrow$ $\Rightarrow (BCD)$ und $AD \mid CE \Rightarrow CE \mid DA \Rightarrow (CDE)$. Nach (Z5) ergibt sich $(BCD) \wedge (CDE) \Rightarrow$ $\Rightarrow (BDE) \vee C = D$ und wegen $C \neq D$ gilt (BDE), also $AD \mid BE$.

VIa) 1 Es seien $A, B, E \in \mathscr{K}$ und $C, D \in \mathscr{K}'$. Dann gilt $AC \mid BD \Rightarrow (A \leqq^{\mathrm{I}} B \wedge C \leqq^{\mathrm{II}}$ $\leqq^{\mathrm{II}} D) \vee (B \leqq^{\mathrm{I}} A \wedge D \leqq^{\mathrm{II}} C)$ und $AD \mid CE \Rightarrow (A \leqq^{\mathrm{I}} E \wedge D \leqq^{\mathrm{II}} C) \vee (E \leqq^{\mathrm{I}} A \wedge C \leqq^{\mathrm{II}}$ $\leqq^{\mathrm{II}} D)$. Es sei $A \leqq^{\mathrm{I}} B \wedge C \leqq^{\mathrm{II}} D$. Wegen $C \neq D$ gilt zugleich $E \leqq^{\mathrm{I}} A \wedge C \leqq^{\mathrm{II}} D$, also $E \leqq^{\mathrm{I}} A \leqq^{\mathrm{I}} B$. Daraus folgt (EAB), also $AD \mid BE$. Aus $B \leqq^{\mathrm{I}} A \wedge D \leqq^{\mathrm{II}} C$ ergibt sich $A \leqq^{\mathrm{I}} E \wedge D \leqq^{\mathrm{II}} C$, also $B \leqq^{\mathrm{I}} A \leqq^{\mathrm{I}} E$. Hieraus erhält man (BAE) und folglich $AD \mid BE$.

VIIa) 2 Es seien $A, C \in \mathscr{K}$ und $B, D, E \in \mathscr{K}'$. Wegen $A, C \in \mathscr{K}$ und $B, D \in \mathscr{K}'$ ist dann $AC \mid BD$ nicht definiert.

Die Relation $\mid$ ist also eine Trennrelation auf der Menge $\mathscr{M}$.

Es seien $A, B \in \mathscr{K}$, $X \in \mathscr{K}'$ und $C \in \mathscr{M}$ mit $AB \mid CX$. Hieraus folgt $C \in \mathscr{K}$, denn der Ausdruck $AB \mid CX$ ist für $A, B \in \mathscr{K}$ und $C, X \in \mathscr{K}'$ nicht definiert. $\mathscr{K}$ ist also eine konvexe Teilmenge von $(\mathscr{M}, \mid)$. Wegen $\mathscr{K}' = \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ ist auch $\mathscr{K}'$ konvex in $(\mathscr{M}, \mid)$.

Bemerkung 11.

Es seien $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ zwei Mengen aus dem Satz 17. Die Zwischenrelation auf $\mathscr{K}$ erklärt ein Paar $(\leqq_1', \leqq_2')$ der voneinander inversen Anordnungen von $\mathscr{K}$ und die Zwischenrelation auf $\mathscr{K}'$ ein Paar $(\leqq_1'', \leqq_2'')$ der voneinander inversen Anordnungen von $\mathscr{K}'$. Ist $\mid$ eine nach Satz 17 durch $\leqq_1'$ und $\leqq_1''$ erklärte Trennrelation auf $\mathscr{M}$, dann ist durch das Paar $(\leqq_2', \leqq_2'')$ dieselbe Trennrelation auf $\mathscr{M}$ bestimmt. Die Paare $(\leqq_1', \leqq_2'')$ und $(\leqq_2', \leqq_1'')$ von Anordnungen bestimmen dann eine andere Trennrelation ϱ auf $\mathscr{M}$. Dabei gilt $\varrho = \mid_{\mathscr{K}}$, wo $\mid_{\mathscr{K}}$ die $\mathscr{K}$-relation ist.

Satz 18.

Es sei $\mathscr{K}$ eine konvexe Teilmenge einer zyklisch geordneten Menge $(\mathscr{M}, \mid)$ und $\mid_{\mathscr{K}}$ die zugehörige $\mathscr{K}$-Relation. Nach Satz 14 bestimmen wir auf den Mengen $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}' =$ $= \mathscr{M} \setminus \mathscr{K}$ die Zwischenrelationen und durch diese definieren wir nach Satz 17 die Trennrelationen ϱ_1 und ϱ_2 auf $\mathscr{M} = \mathscr{K} \cup \mathscr{K}'$ (Bemerkung 11). Es läßt sich die Bezeichnungen so wählen, daß $AB \mid CD \Leftrightarrow AB\varrho_1CD$ und $AB \mid_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB\varrho_2CD$ gilt.

Beweis. Ist $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{K}'$ einelementige Menge, dann gilt nach Satz 12 $\mid = \mid_{\mathscr{K}}$ und nach Bemerkung 11 ist $\varrho_1 = \varrho_2$. Es seien also $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}'$ mindestens zweielementig. In $\mathscr{K}'$ wählen wir zwei verschiedene Elemente X, Y und definieren wir nach Satz 14, nach Bemerkung 9 und nach Satz 15 die Paare voneinander inversen Anordnungen $\leqq_{XY}$, $\leqq_{YX}$ bzw. $(\leqq^{XY}, \leqq^{YX})$ von $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{K}'$. Nach Bemerkung 11 bestimmen die Paare $(\leqq_{XY}, \leqq^{XY})$, $(\leqq_{YX}, \leqq^{YX})$ bzw. $(\leqq_{XY}, \leqq^{YX})$, $(\leqq_{YX}, \leqq^{XY})$ von Anordnungen die Trennrelation ϱ_1 bzw. ϱ_2 auf der Menge $\mathscr{M} = \mathscr{K} \cup \mathscr{K}'$. Es sei

ϱ_1 bzw. ϱ_2 durch $(\leqq_{XY}, \leqq^{XY})$ bzw. $(\leqq_{XY}, \leqq^{YX})$ bestimmt. Wir wollen $AB \mid CD \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow AB\varrho_1 CD$ und $AB \mid_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB\varrho_2 CD$ beweisen.

1. Wir nehmen an, daß die Elemente A, B, C, D voneinander verschieden sind, genau zwei von ihnen in $\mathscr{K}$ liegen und $A \in \mathscr{K}$, $B \in \mathscr{K}' \vee A \in \mathscr{K}'$, $B \in \mathscr{K}$. Der Bestimmheit wegen sei $A, C \in \mathscr{K}$ und $B, D \in \mathscr{K}'$.

a) α) Es sei $AB \mid CD$. Da $\mathscr{K}$ konvex ist, gilt $AC \nmid XY$ und nach (C2) folgt daraus $AX \mid CY \vee CX \mid AY$. Es sei $AX \mid CY$. Wegen $AX \mid CY$ und $AB \mid CD$ ergibt sich nach Bemerkung 9 $A \leqq_{XY} C$ und $A \leqq_{BD} C$. Daraus folgt aber $\leqq_{XY} = \leqq_{BD}$ und nach Satz 15 ergibt sich $B \leqq^{XY} D$. Wegen $A \leqq_{XY} C \wedge B \leqq^{XY} D$ gilt nach Satz 17 $AB\varrho_1 CD$. Es sei CX / AY. Dann ist $C \leqq_{XY} A$ und wegen $CD \mid AB$ gilt $C \leqq_{DB} A$. Daraus folgt $\leqq_{XY} = \leqq_{DB}$ und $D \leqq^{XY} B$. Aus $C \leqq_{XY} A \wedge D \leqq^{XY} B$ folgt wieder $AB\varrho_1 CD$.

β) Es sei $AB\varrho_1 CD$. Dann gilt $(A \leqq_{XY} C \wedge B \leqq^{XY} D) \vee (C \leqq_{XY} A \wedge D \leqq^{XY} B)$. Nehmen wir $A \leqq_{XY} C \wedge B \leqq^{XY} D$ an. Nach Satz 15 folgt daraus $\leqq_{XY} = \leqq_{BD}$ und $A \leqq_{XY} C \Rightarrow A \leqq_{BD} C$. Nach Definition von $\leqq_{BD}$ gilt also $AB \mid CD$. Ganz ähnlich ergibt sich $C \leqq_{XY} A \wedge D \leqq^{XY} B \Rightarrow C \leqq_{XY} A \wedge \leqq_{XY} = \leqq_{DB} \Rightarrow C \leqq_{DB} A \Rightarrow CD \mid$ $\mid AB \Rightarrow AB \mid CD$.

b) Wegen $A, C \in \mathscr{K}$ und $B, D \in \mathscr{K}'$ gilt $AC \nmid BD$. Nach Satz 4 und nach Definition 6 erhält man $AB \mid_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AB \nmid CD \Leftrightarrow AD \mid CB$. Durch Zeichenwechsel in a) ergibt sich dann $AB \mid_{\mathscr{K}} CD \Leftrightarrow AD \mid CB \Leftrightarrow (A \leqq_{XY} C \wedge B \leqq^{YX} D) \vee (C \leqq_{XY} A \wedge$ $\wedge D \leqq^{YX} B) \Leftrightarrow AB\varrho_2 CD$.

2. Es seien die in 1 angeführten Forderungen von A, B, C, D nicht erfüllt. Nach Definition 6 gilt dann $AB \mid CD \Leftrightarrow AB \mid_{\mathscr{K}} CD$. Nach Satz 17 und nach Bemerkung 11 gilt auch $AB\varrho_1 CD \Leftrightarrow AB\varrho_2 CD$. In diesem Fall genügt also nur $AB \mid CD \Leftrightarrow AB\varrho_1 CD$ zu beweisen. Ist $A = C \vee A = D \vee B = C \vee B = D$, dann gilt $AB \mid CD \Leftrightarrow AB\varrho_1 CD$, denn beide $\mid$ und ϱ_1 sind Trennrelationen. Im folgenden nehmen wir also an, daß A, B, C, D voneinander verschieden sind.

a) Es seien $A, B, C, D \in \mathscr{K}$.

α) Es sei $AB \mid CD$. Für ein beliebiges Element $X \in \mathscr{K}'$ gilt nach (C2) $AB \mid CX \vee$ $\vee AC \mid BX \vee AX \mid BC$ und zugleich $AB \mid DX \vee BD \mid AX \vee AD \mid BX$. Nehmen wir $AB \mid CX$ an. Nach Satz 7 ergibt sich dann $AB \mid CD \wedge AB \mid CX \Rightarrow AB \nmid DX$ und daraus folgt $BD \mid AX \vee AD \mid BX$. Zuerst sei $BD \mid AX$. Nach (C4) erhält man $AB \mid CX \wedge$ $\wedge BD \mid AX \wedge B \neq X \Rightarrow CD \mid AX$. Aus $AB \mid CX$ und $CD \mid AX$ folgt nach Satz 14 (ACB) und (CAD). Wegen $(ACB) \wedge (CAD)$ gilt nach Satz 17 $AB\varrho_1 CD$. Gilt $AD \mid BX$, dann ergibt sich gemäß (C4) $BA \mid CX \wedge BX \mid AD \wedge A \neq X \Rightarrow BX \mid CD \Rightarrow CD \mid BX$. Aus $(ACB) \wedge (CBD)$ folgt dann $AB\varrho_1 CD$. Ganz ähnlich wie oben läßt sich in den Fällen $AC \mid BX$ und $AX \mid BC$ verfahren.

β) Es sei $AB\varrho_1 CD$. Dann ist einer der Fälle Ad 1, Satz 17, erfüllt. Es sei z. B. $(ACB) \wedge (CBD)$. Für ein beliebiges $X \in \mathscr{K}'$ gilt dann $AB \mid CX \wedge CD \mid BX$. Nach (C4) ergibt sich $XC \mid AB \wedge XB \mid CD \wedge B \neq C \Rightarrow XB \mid AD$. Nehmen wir $AB \nmid CD$ an. Nach Satz 5 erhält man dann $AB \mid XC \wedge AB \nmid CD \wedge X \neq A$, $B \Rightarrow AB \mid XD$. Aus $BA \mid XD \wedge XB \mid AD$ folgt nach (C3) $A = X \vee B = D$, was ein Widerspruch ist. Somit ist $AB \mid CD$. Ähnlicherweise prüfen wir übrige Fälle nach.

b) Im Falle $A, B, C, D \in \mathcal{K}'$ verfahren wir ähnlich wie unter a).

c) Es seien $A, B, C \in \mathcal{K}, D \in \mathcal{K}'$ bzw. $A, B, C \in \mathcal{K}', D \in \mathcal{K}$. Dann gilt $AB \mid CD \Leftrightarrow \Leftrightarrow (ACB) \Leftrightarrow AB\varrho_1 CD$.

Satz 19.

Es seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei elementfremde Mengen mit Zwischenrelationen, die mit gleichem Symbol $(***)$ bezeichnet sind. Definieren wir nach Satz 17 eine Trennrelation $\mid$ auf der Menge $\mathcal{M} = \mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$ und durch $\mid$ nach Satz 14 eine Zwischenrelationen $((***))$ auf den Mengen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$, dann gilt $(ABC) \Leftrightarrow ((ABC))$.

Beweis. Es seien $A, B, C \in \mathcal{K}$ bzw. $A, B, C \in \mathcal{K}'$ mit (ABC). Für ein beliebiges $D \in \mathcal{K}'$ bzw. $D \in \mathcal{K}$ ergibt sich $(ABC) \Leftrightarrow AB \mid CD \Leftrightarrow ((ABC))$.

LITERATUR

[1] Coxeter, H. S. M.: *The real projective plane.* New York 1949.

[2] Klingenberg, W.: *Projektive Geometrien mit Homomorphismus.* Math. Ann. 132, 1956 180—200.

[3] Kunze, M.: *Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie.* Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.

[4] Pickert, G.: *Projektive Ebenen.* Zweite Auflage. Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1975.

SHRNUTÍ

O MNOŽINÁCH S RELACEMI ODDĚLOVÁNÍ

FRANTIŠEK MACHALA

Studium množin s relacemi oddělování těsně souvisí s axiomatickou výstavbou uspořádané projektivní geometrie. V předložené práci jsou tyto množiny zkoumány nezávisle na geometrické interpretaci a nazývají se cyklicky uspořádané množiny. Relace oddělování je přitom definována poněkud obecněji než je obvyklé, také pro prvky, které nemusí být nutně různé.

Základním pojmem je konvexní podmnožina cyklicky uspořádané množiny. Přirozeným způsobem je definován homomorfismus cyklicky uspořádaných množin a jsou ukázány vztahy mezi těmito homomorfismy a rozklady příslušných množin na konvexní podmnožiny. Ke každé konvexní podmnožině cyklicky uspořádané množiny je možno určit další relaci oddělování. Relace oddělování indukuje na každé konvexní podmnožině cyklicky uspořádané množiny relaci mezi a na sjednocení dvou disjunktních množin s relacemi mezi je možno definovat relaci oddělování. Dosažené výsledky umožňují studium obecnějších uspořádaných geometrických struktur, například projektivních Klingenbergovských rovin.

РЕЗЮМЕ

О МНОЖЕСТВАХ С ОТНОШЕНИЯМИ РАЗДЕЛЕННОСТИ

ФРАНТИШЕК МАХАЛА

Изучение множеств с отношениями разделенности тесно связано с аксиоматическим строением проективной геометрии. В предлагаемой работе исследуются эти множества отдельно от геометрической интерпретации. Множества с отношениями разделенности называются здесь циклически упорядоченные множества. Отношения разделенности определяются притом несколько более общим образом как обычно, тоже для не обязательно различных элементов.

Основным понятием является выпуклое подмножество. Естественным образом определяются гомоморфизмы циклически упорядоченных множеств и показываются связы между гомоморфизмами этих множеств и их разложениями на выпуклые подмножества. Для каждого выпуклого подмножества циклически упорялоченного множества определяется новое отношение разделенности. На каждом выпуклом подмножестве циклически упорядоченного множества определяется далее отношение между и на объединении двух не пересекающихся множеств с отношениями между определяется отношение разделенности. Приведенные результаты создавают основу для изучения более общих упорядоченных геометрических структур, на пример для проективных плоскостей Клингенберга.