1980 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 65

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty

Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ZUR LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG

JIŘÍ ZEMAN

(*Eingelangt am 31. März 1979*)

Einige konkrete Probleme den wir in der Physik begegnen führen zur Untersuchung nichthomogener Differentialgleichung

$$y'' + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)\, y = h(t), \tag{1}$$

wo die Funktionen $k(t)$ und $h(t)$ im Intervall j definiert sind, λ ist ein Parameter und $\varepsilon = \pm 1$. In der physikalischen Literatur wird die Gleichung (1) für $h(t) \equiv 0$ die Wellengleichung genannt. Hierin bestimmt man die Funktion $k(t)$ durch den Charakter des Mediums, in dem sich die Wellenbewegnung fortpfanzt. Die rechte Seite von $h(t)$ bildet dabei das sog. Quellenglied.

Zur Lösung von (1) wird folgendes Verfahren benutzt: Die Wellenlösung $y(t)$ dieser Gleichung wird an der Grenze zweier Medien auf die Summe $y(t) = u(t) + v(t)$ der durchdringenden und der reflektierten Welle zerlegt. Mathematisch entspricht dies der Transformation der Lösung $y(t)$ von (1) auf die Lösung eines gewissen zweidimensionalen linearen Systems. Die Transformation ist dabei so gewählt, dass die Summe $u(t) + v(t)$ von der Komponenten beliebiger Lösung $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ dieses Systems im Intervall j der gegebenen Differentialgleichung (1) genügt.

Der nahstehende Satz 1 enthält den Grundgedanken dieses Verfahrens ([1]). Dann wird ein Problem gelöst, der sich in diesem Zusammenhang formulieren läßt.

Satz 1. *Mögen die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ der Klasse C^1 angehören und mögen die Funktionen $k(t)$, $h(t)$ im Intervall j stetig sein. Ferner möge $\beta(t) - \alpha(t) \neq 0$, $k(t) \neq 0$ für jedes $t \in j$ gelten. Wir setzen*

$$A(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} [\alpha'(t) + \alpha(t)\beta(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)],$$

$$B(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} [\beta'(t) + \beta^2(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)],$$

$$C(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} [\alpha'(t) + \alpha^2(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)],$$

$$D(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} [\beta'(t) + \alpha(t)\beta(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)],$$

wo $\varepsilon = \pm 1$.

Stellt $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ -C(t) & -D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

im Intervall j dar, so sagt man, daß die Funktion $y(t) = u(t) + v(t)$ *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$y'' + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)\, y = h(t) \tag{1}$$

in j ist. Stellt die Funktion $y(t)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (1) ***im Intervall j*** *dar, dann ist der Vektor*

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} y(t)\beta(t) - y'(t) \\ -y(t)\alpha(t) + y'(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems (2) *in j.*

Beweis: Betrachten wir ein System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon\lambda^2 k^2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

äquivalent mit (1) und führen wir darin die Transformation

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Aus den auf die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ gestellten Voraussetzungen ergibt sich, daß die Matrix

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

der Transformation (4) im Intervall j die Ableitung

$$\boldsymbol{P}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

besitzt und weiter, daß in j eine inverse Matrix

$$P^{-1}(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} \beta(t) & -1 \\ -\alpha(t) & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

existiert. Genügt der Vektor $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ dem System (2) im Intervall j, dann unter Anwendung von (4), (2) und der Definitionsformeln für $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ und $D(t)$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ -C(t) & -D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon\lambda^2 k^2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon\lambda^2 k^2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt, daß der Vektor

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) + v(t) \\ \alpha(t)\, u(t) + \beta(t)\, v(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems (3) im Intervall j darstellt und demnach seine erste Komponente $y(t) = u(t) + v(t)$ in j der Differentialgleichung (1) genügt.

Umgekehrt, genügt die Funktion $y(t)$ der Differentialgleichung (1) im Intervall j, dann genügt der Vektor $\begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ in j dem System (3). Aus (4) und (7) folgt

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} \beta(t) & -1 \\ -\alpha(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \tag{4'}$$

Hieraus unter Benutzung von (3) und der Definitionsformeln für $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ und $D(t)$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \left\{ \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} \beta(t) & -1 \\ -\alpha(t) & 1 \end{pmatrix} \right\}' \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} \beta(t) & -1 \\ -\alpha(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' =$$

$$= \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ -C(t) & -D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und somit der Vektor

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} y(t)\beta(t) - y'(t) \\ -y(t)\alpha(t) + y'(t) \end{pmatrix} \tag{4'}$$

genügt in j dem System (2). Dabei

$$u(t) + v(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} [y(t)\beta(t) - y'(t) - y(t)\alpha(t) + y'(t)] = y(t).$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Bemerkung 1. Von praktischer Bedeutung ist eine solche Wahl der Matrix $\boldsymbol{P}(t)$ der Transformation (4), in der die Funktionen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ teilweise Summen der Reihe

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,\lambda^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,\lambda^{1-n}$$

darstellen, die ein Integrand im Exponent von der WKB-Lösung ([2], [4]) einer zur Differentialgleichung (1) angehörenden homogenen Gleichung ist. (Siehe z. B. [1], 2. Teil). Natürlich ist es dabei notwendig vom Koeffizienten $k(t)$ die entsprechende Glättung zu verlangen.

Es sei nun $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ eine beliebige Lösung des Systems (2) im Intervall j. Dann gilt in j identisch

$$\begin{aligned} u'(t) &= A(t)\,u(t) + B(t)\,v(t) - \frac{h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}, \\ v'(t) &= -C(t)\,u(t) - D(t)\,v(t) + \frac{h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}, \end{aligned} \tag{8}$$

und nach Satz 1 die Summe $y(t) = u(t) + v(t)$ der Komponenten in dieser Lösung genügt hier der Differentialgleichung (1). In diesem Zusammenhang erhebt sich die Frage, ob solche Funktionen $k(t)$ und $h(t)$ existieren, wo außer der Summe $u(t) + v(t)$ der Komponenten beliebiger Lösung vom System (2) auch die Komponenten $u(t)$ und $v(t)$ dieser Lösung der Differentialgleichung (1) im Intervall j genügen.

Im weiteren werden wir durchweg annehmen, dass die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ im Intervall j der Klasse C^2 und die Funktionen $k(t)$, $h(t)$ im Intervall j der Klasse C^1 angehören. Für jedes $t \in j$ wird dabei stets $\beta(t) - \alpha(t) \neq 0$, $k(t) \neq 0$ vorausgesetzt. Differentiation der Identität (8) und Einsetzen in die Ausdrücke für $u''(t)$ und $v''(t)$ wieder aus den Formeln (8) ergeben folgende Identitäten im Intervall j:

$$\begin{aligned} u''(t) = {} & [A'(t) + A^2(t) - B(t)\,C(t)]\,u(t) + \\ & + [B'(t) + A(t)\,B(t) - B(t)\,D(t)]\,v(t) + \frac{h(t)\,[B(t) - A(t)] - h'(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} + \\ & + \frac{h(t)\,[\beta'(t) - \alpha'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2}, \\ v''(t) = {} & [-C'(t) - A(t)\,C(t) + C(t)\,D(t)]\,u(t) + \end{aligned}$$

$$+ [-D'(t) - B(t)\,C(t) + D^2(t)]\,v(t) + \frac{h(t)\,[C(t) - D(t)] + h'(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} -$$
$$- \frac{h(t)\,[\beta'(t) - \alpha'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2}\,.$$

Wenden wir die Definitionsformel für die Funktionen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ und $D(t)$ aus Satz 1 an, erhalten wir folgende Identitäten in j:

$$\begin{aligned} u''(t) &= -\varepsilon\lambda^2 k^2(t)\,u(t) + M(t)\,u(t) + N(t)\,v(t) + P(t), \\ v''(t) &= -\varepsilon\lambda^2 k^2(t)\,v(t) - M(t)\,u(t) - N(t)\,v(t) - Q(t), \end{aligned} \tag{9}$$

in dennen

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{\alpha''(t) + 2\varepsilon\lambda^2 k(t)\,k'(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} + \frac{2\alpha(t)\,[\alpha'(t)\,\beta(t) - \alpha(t)\,\beta'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} - \\ &\quad - \frac{2[\alpha'(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)]\,[\beta'(t) - \alpha'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2}, \\ N(t) &= \frac{\beta''(t) + 2\varepsilon\lambda^2 k(t)\,k'(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} + \frac{2\beta(t)\,[\alpha'(t)\,\beta(t) - \alpha(t)\,\beta'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)_3{}^2} - \\ &\quad - \frac{2[\beta'(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)]\,[\beta'(t) - \alpha'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2}, \\ P(t) &= \frac{\beta(t)\,h(t) - h'(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} + \frac{2h(t)\,[\beta'(t) - \alpha'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2}, \\ Q(t) &= \frac{\alpha(t)\,h(t) - h'(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} + \frac{2h(t)\,[\beta'(t) - \alpha'(t)]}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Addieren wir die Identitäten (8), so erhalten wir

$$\begin{aligned} u''(t) + v''(t) &= -\varepsilon\lambda^2 k^2(t)\,[u(t) + v(t)] + P(t) - Q(t) = \\ &= -\varepsilon\lambda^2 k^2(t)\,[u(t) + v(t)] + h(t) \end{aligned}$$

im Einklang mit der Satzaussage.

Satz 2. *Die Komponenten $u(t)$, $v(t)$ der Lösung $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ des Systems* (2) *genügen der Differentialgleichung* (1) *in j genau dann, wenn in j*

$$\begin{aligned} M(t)\,u(t) + N(t)\,v(t) &= -Q(t), \\ -M(t)\,u(t) - N(t)\,v(t) &= P(t) \end{aligned} \tag{11}$$

identisch gilt.

Beweis: Aus (9) ersieht man, daß die Funktionen $u(t)$, $v(t)$ der Differentialgleichung (1) im Intervall j genau dann genügen, wenn in j

$$\begin{aligned} M(t)\,u(t) + N(t)\,v(t) + P(t) &= h(t), \\ -M(t)\,u(t) - N(t)\,v(t) - Q(t) &= h(t) \end{aligned}$$

identisch gilt. Die Behauptung ist offenbar, denn es folgt aus (10), daß $h(t) - P(t) = -Q(t)$, $h(t) + Q(t) = P(t)$.

Satz 3. *Es gebe eine Lösung* $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *vom System* (2) *derart, daß die Funktionen* $u(t), v(t)$ *im Intervall* j *den Identitäten* (11) *genügen. Danach* $h(t) = 0$ *für jedes* $t \in j$.

Beweis: Addieren wir die Identitäten (11), so kommen wir auf die Beziehung $0 = P(t) - Q(t)$, die mit den Definitionsgleichungen (10) zur folgenden Identität

$$0 = \frac{[\beta(t) - \alpha(t)]\, h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}$$

führt. Hieraus ergibt sich die Satzaussage.

Folgerung. Falls die Gleichung (1) oder das System (2) nicht homogen ist, so existiert keine Lösung $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ des Systems (2), dessen Komponenten $u(t)$ und $v(t)$ im Intervall j der Identitäten (11) genügen und demnach die Komponenten $u(t)$ und $v(t)$ keiner Lösung des Systems (2) in j die Lösungen der Differentialgleichung (1) darstellen. Daraus ergibt sich, daß nur die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ -C(t) & -D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{2'}$$

solche Eigenschaft besitzen können, nach der die Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ der Differentialgleichung

$$y'' + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)\, y = 0 \tag{1'}$$

im Intervall j genügen. In diesem Fall werden die Identitäten (11) auf eine einzige Identität

$$M(t)\, u(t) + N(t)\, v(t) = 0 \tag{11'}$$

zurückgeführt.

Satz 4. *Sind die Lösungen* $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ *des Systems* (2′) *im Intervall* j *linear unabhängig, dann bilden die Funktionen* $u_1(t) + v_1(t), u_2(t) + v_2(t)$ *in* j *ein Fundamentalsystem der Lösungen von Differentialgleichung* (1′). *Sind* $y_1(t)$, $y_2(t)$ *linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung* (1′) *in* j, *so sind die Vektoren*

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} \beta(t)\; y_1(t) - y_1'(t) \\ -\alpha(t)\; y_1(t) + y_1'(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} \beta(t)\; y_2(t) - y_2'(t) \\ -\alpha(t)\; y_2(t) + y_2'(t) \end{pmatrix}$$

linear unabhängige Lösungen des Systems (2′) *in* j.

Beweis: a) Sind die Lösungen $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ des Systems (2') linear unabhängig in j, so ist die Determinante

$$\mathscr{D}(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ v_1(t) & v_2(t) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden in j. Durch direkte Berechnung läßt sich nachweisen, daß für die Wronskische Determinante der Lösungen $u_1(t) + v_1(t)$, $u_2(t) + v_2(t)$ von der Differentialgleichung (1')

$$\mathscr{W} = \begin{vmatrix} u_1(t) + v_1(t) & u_2(t) + v_2(t) \\ u_1'(t) + v_1'(t) & u_2'(t) + v_2'(t) \end{vmatrix} =$$

$$= [-A(t) + B(t) + C(t) - D(t)]\,\mathscr{D}(t) = [\beta(t) - \alpha(t)]\,\mathscr{D}(t)$$

gilt, weshalb $\mathscr{W}$ ebenso in j von Null verschieden ist.

b) Sind die Lösungen $y_1(t)$, $y_2(t)$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (1') in j, so ist die Wronskische Determinante $y_1(t)\,y_2'(t) - y_1'(t)\,y_2(t)$ von dieser Lösungen in j von Null verschieden. Es ist

$$\frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{vmatrix} \beta(t)\,y_1(t) - y_1'(t) & \beta(t)\,y_2(t) - y_2'(t) \\ -\alpha(t)\,y_1(t) + y_1'(t) & -\alpha(t)\,y_2(t) + y_2'(t) \end{vmatrix} =$$

$$= y_1(t)\,y_2'(t) - y_1'(t)\,y_2(t).$$

Dies besagt, daß die Lösungen $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ des Systems (2') in j linear unabhängig sind.

Satz 5. *Die Komponenten $u(t)$ und $v(t)$ beliebiger Lösung $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ des Systems* (2') *die Lösungen der Differentialgleichung* (1') *im Intervall j genau dann darstellen, wenn für jedes $t \in j$ gleichzeitig*

$$M(t) = 0, \qquad N(t) = 0 \tag{12}$$

gilt.

Beweis: a) Es gelte (12) für jedes $t \in j$. Dann ist die Identität (11') für jede Lösung $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ des Systems (2') erfüllt und die Komponenten $u(t)$ und $v(t)$ in dieser Lösung genügen der Differentialgleichung (1') in j.

b) Es genügen die Komponenten $u(t)$ und $v(t)$ in beliebiger Lösung $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ des Systems (2') der Differentialgleichung (1') in j. Für diese Komponenten gilt dann in j die Beziehung (11).

Seien $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ linear unabhängige Lösungen des Systems (2′) in j. Folglich gilt in j identisch

$$\begin{aligned} M(t)\,u_1(t) + N(t)\,v_1(t) &= 0, \\ M(t)\,u_2(t) + N(t)\,v_2(t) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Für jedes $t \in j$ stellt (13) ein System von algebraischen Gleichungen mit von Null verschiedener Determinante

$$\mathscr{D}(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix}$$

dar, denn ihre Matrix ist eine Fundamentalmatrix der Lösungen vom System (2′) in j. Daraus ergibt sich, daß für jedes $t \in j$ das System (13) bloß triviale Lösungen besitzt, d. h. es gilt in j identisch $M(t) = 0$, $N(t) = 0$.

Satz 6. *Es gelte identisch in j*

$$M(t) = 0, \qquad N(t) = 0. \tag{12}$$

Seien $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ *linear unabhängige Lösungen des Systems* (2′) *im Intervall j. Ist für jedes* $t \in j$ $B(t) \neq 0$ (*oder* $C(t) \neq 0$), *dann sind die Funktionen* $u_1(t)$ *und* $u_2(t)$ (*oder* $v_1(t)$ *und* $v_2(t)$) *linear unabhänhige Lösungen der Differentialgleichung* (1′) *im Intervall j.*

Beweis: Es gilt für jedes $t \in j$

$$\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ A(t)\,u_1(t) + B(t)\,v_1(t) & A(t)\,u_2(t) + B(t)\,v_2(t) \end{vmatrix} =$$

$$= B(t) \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ v_1(t) & v_2(t) \end{vmatrix} = B(t)\,\mathscr{D}(t),$$

und weiterhin

$$\begin{vmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ v_1'(t) & v_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ -C(t)\,u_1(t) - D(t)\,v_1(t) & -C(t)\,u_2(t) - D(t)\,v_2(t) \end{vmatrix} =$$

$$= -C(t) \begin{vmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{vmatrix} = C(t)\,\mathscr{D}(t).$$

Daraus ergibt sich schon die Satzaussage.

Bemerkung 2. Durch direkte Berechnung kann man nachweisen, dass die Beziehungen (12) sich in der Form

$$\begin{aligned} [\beta(t) - \alpha(t)] \left\{ \frac{\alpha'(t) + \alpha^2(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} \right\}' &= 0, \\ [\beta(t) - \alpha(t)] \left\{ \frac{\beta'(t) + \beta^2(t) + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} \right\}' &= 0, \end{aligned} \tag{12′}$$

oder in der Form

$$[\beta(t) - \alpha(t)]\left\{\frac{C(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}\right\}' = 0,$$
$$[\beta(t) - \alpha(t)]\left\{\frac{B(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}\right\}' = 0 \tag{12''}$$

schreiben lassen.

Satz 7. *Erfüllen die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und $k(t)$ für jedes $t \in j$ die Bedingungen* (12), *dann gilt im Intervall j identisch*

$$\frac{\beta'(t) - \alpha'(t) + \beta^2(t) - \alpha^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = c, \tag{14}$$

wo c eine Konstante bedeutet.

Beweis: Subtrahieren wir von der zweiten Identität in (12') die erste Identität, erhalten wir

$$[\beta(t) - \alpha(t)]\left\{\frac{\beta'(t) - \alpha'(t) + \beta^2(t) - \alpha^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2}\right\}' = 0.$$

Hieraus folgt die Satzaussage, denn $\beta(t) \neq \alpha(t)$ im Intervall j.

Beispiele 1. Es sei $\alpha(t) = p\beta(t)$, wobei $p \neq 1$ beliebige Konstante ist. In diesem Fall

$$\frac{\beta'(t) - \alpha'(t) + \beta^2(t) - \alpha^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = \frac{1}{1-p}\,\frac{\beta'(t)}{\beta^2(t)} + \frac{1+p}{1-p}.$$

Der gegebene Ausdruck ist konstant in j genau dann, wenn $\beta'(t)\,\beta^{-2}(t)$ in j konstant ist. Von dieser Eigenschaft ist genau beliebige Funktion

$$\beta(t) = \frac{1}{at + b}, \tag{15}$$

wo a, b $(a^2 + b^2 > 0)$ Konstanten sind. Dabei also

$$\alpha(t) = \frac{p}{at + b}. \tag{16}$$

Das Intervall j wählen wir so, damit $j \subset \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ oder $j \subset \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ wäre. Für die durch die Gleichungen (15) und (16) definierten Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ gewinnen wir:

$$\frac{\alpha'(t) + \alpha^2(t) + \varepsilon\lambda^2k^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = \frac{p(p - a) + \varepsilon\lambda^2k^2(t)(at + b)^2}{(1 - p)^2},$$
$$\frac{\beta'(t) + \beta^2(t) + \varepsilon\lambda^2k^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = \frac{(1 - a) + \varepsilon\lambda^2k^2(t)(at + b)^2}{(1 - p)^2}.$$

Beide Ausdrucke sind in j konstant nui wenn

$$k(t) = \frac{\bar{c}}{at + b}, \tag{17}$$

wo $\bar{c}$ beliebige Konstante darstellt. Die durch die Formeln (15)–(17) definierten Funktionen $\beta(t)$, $\alpha(t)$ und $k(t)$ erfüllen also für jedes $t \in j$ die Bedingungen (12). Mit anderen Worten, die Komponenten $u(t)$ und $v(t)$ jeder Lösung $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ des Systems (2') sind in diesem Falle die Lösungen der Differentialgleichung (1') im Intervall j.

Diese Tatsache läßt sich direkt nachweisen. Den Nachweis führen wir z. B. für $p = -1$ und $\varepsilon = 1$ (oder $p = -1$ und $\varepsilon = -1$) durch.

a) Ist $\bar{c} = 0$, d. h. $k(t) = 0$ identisch in j, dann lautet die Gleichung (1')

$$y'' = 0 \tag{18}$$

und das entsprechende System (2')

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \frac{1}{2(at + b)} \begin{pmatrix} a - 1 & -a + 1 \\ -a - 1 & a + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Das System (19) besitzt z. B. in j linear unabhängige Lösungen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{(1 - a)\,t - b}{2} \\[2mm] \dfrac{(1 + a)\,t + b}{2} \end{pmatrix}.$$

Jede Komponente in diesen Lösungen, sowie die Summen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{(1 - a)\,t - b}{2} + \frac{(1 + a)\,t + b}{2} = t$ der Komponenten in derselben Lösung genügen in j der Differentialgleichung (18). Ist $B(t) = \frac{-a + 1}{2(at + b)} \neq 0$, d. h. $a \neq 1$, dann bilden die Funktionen $\frac{1}{2}$ und $\frac{(1 - a)\,t - b}{2}$ eine Basis der Differentialgleichung (18). Ist $C(t) = \frac{a + 1}{2(at + b)} \neq 0$, d. h. $a \neq -1$, dann bilden die Funktionen $\frac{1}{2}$ und $\frac{(1 + a)\,t + b}{2}$ eine Basis der Differentialgleichung (18).

b) Falls $\bar{c} \neq 0$ und $\varepsilon = 1$, so läßt sich $k(t)$ in der Form

$$k(t) = \frac{1}{at + b}$$

schreiben, wo anstelle von $\frac{a}{c}$ oder $\frac{b}{c}$ bloß a oder b geschrieben wird. In diesem Fall lautet die Differentialgleichung (1')

$$y'' + \frac{\lambda^2}{(at + b)^2}\, y = 0, \tag{20}$$

und das entsprechende System (2′)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \frac{1}{2(at+b)} \begin{pmatrix} \lambda^2 + a - 1 & \lambda^2 - a + 1 \\ -\lambda^2 - a - 1 & -\lambda^2 + a + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Zur Bestimmtheit gelbe weiter $\lambda > \frac{a}{2}$. Das System (21) besitzt in j linear unabhängige Lösungen (für $a \neq 0$)

$$\frac{\sqrt{at+b}}{4} \begin{pmatrix} (2-a)\cos\Omega(t) + \sqrt{4\lambda^2 - a^2}\sin\Omega(t) \\ (2+a)\cos\Omega(t) - \sqrt{4\lambda^2 - a^2}\sin\Omega(t) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\sqrt{at+b}}{4} \begin{pmatrix} (2-a)\sin\Omega(t) - \sqrt{4\lambda^2 - a^2}\cos\Omega(t) \\ (2+a)\sin\Omega(t) + \sqrt{4\lambda^2 - a^2}\cos\Omega(t) \end{pmatrix},$$

wo

$$\Omega(t) = \frac{\sqrt{4\lambda^2 - a^2}}{2a} \ln(at+b).$$

Jede Komponente in diesen Lösungen, sowie die Summen $\sqrt{at+b}\cos\Omega(t)$, $\sqrt{at+b}\sin\Omega(t)$ der Komponenten in derselben Lösung genügen in j der Differentialgleichung (20). Die Gleichung (20) ist die Eulersche Differentialgleichung und besitzt z. B. die Basis ([3], 2.14)

$$\sqrt{at+b}\cos\Omega(t), \qquad \sqrt{at+b}\sin\Omega(t).$$

Ist überdies $B(t) = \dfrac{\lambda^2 - a + 1}{2(at+b)} \neq 0$, d. h. $\lambda^2 \neq a - 1$, dann bilden die Basis der Gleichung (20) auch die ersten Komponenten der genannten Lösungen vom System (21). Für $C(t) = \dfrac{\lambda^2 + a + 1}{2(at+b)} \neq 0$, d. h. für $\lambda^2 \neq -a - 1$ haben dieselbe Eigenschaft auch die zweiten Komponenten dieser Lösungen.

c) Ist $\bar{c} \neq 0$ und $\varepsilon = -1$, dann lautet die Gleichung (1′)

$$y'' - \frac{\lambda^2}{(at+b)^2} y = 0 \tag{20′}$$

und das entsprechende System (2′)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \frac{1}{2(at+b)} \begin{pmatrix} -\lambda^2 + a - 1 & -\lambda^2 - a + 1 \\ \lambda^2 - a - 1 & \lambda^2 + a + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{21′}$$

Das System (21′) besitzt in j linear unabhängige Lösungen (für $a \neq 0$)

$$\frac{(at+b)^{s+\frac{1}{2}}}{2} \begin{pmatrix} 1 - a\left(\frac{1}{2} + s\right) \\ 1 + a\left(\frac{1}{2} + s\right) \end{pmatrix}, \qquad \frac{(at+b)^{-s+\frac{1}{2}}}{2} \begin{pmatrix} 1 - a\left(\frac{1}{2} - s\right) \\ 1 + a\left(\frac{1}{2} - s\right) \end{pmatrix},$$

wo

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\lambda^2}{a^2} + 1}.$$

Jede Komponente in diesen Lösungen, sowie die Summen $(at+b)^{s+\frac{1}{2}}$, $(at+b)^{-s+\frac{1}{2}}$ der Komponenten in derselben Lösung genügen in j der Differentialgleichung (20′). Die Gleichung (20′) ist die Eulersche Gleichung und hat z. B. die Basis ([3], 2.14)

$$(at + b)^{s+\frac{1}{2}}, \qquad (at + b)^{-s+\frac{1}{2}}.$$

Ist überdies $B(t) = \dfrac{-\lambda^2 + 1 - a}{2(at + b)} \neq 0$, d. h. $\lambda^2 \neq 1 - a$, dann bilden die Basis der Gleichung (20′) auch die ersten Komponenten der gennanten Lösungen vom System (21′). Für $C(t) = \dfrac{-\lambda^2 + a + 1}{2(at + b)} \neq 0$, d. h. für $\lambda^2 \neq a + 1$ besitzen diese Eigenschaft auch die zweiten Komponenten dieser Lösungen.

Ähnlich wie im Fall c) wird die Matrix $\boldsymbol{P}(t)$ der Transformation (4) z. B. in [1], 2. Teil gewählt.

2. Es sei $\alpha(t) = \beta^{-1}(t)$, wo $\beta(t) \neq 0$, $\beta(t) \neq \pm 1$ in j. In diesem Fall

$$\frac{\beta'(t) - \alpha'(t) + \beta^2(t) - \alpha^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = \frac{\beta'(t)[\beta^2(t) + 1] + \beta^4(t) - 1}{[\beta^2(t) - 1]^2}.$$

Dieser Ausdruck ist konstant in j genau dann wenn $\beta(t)$ im Intervall j der Differentialgleichung

$$\beta' = \frac{(\beta^2 - 1)[(c - 1)\beta^2 - (c + 1)]}{\beta^2 + 1} \tag{22}$$

mit der Konstante c genügt. Danach

$$\frac{\alpha'(t) + \alpha^2(t) + \varepsilon\lambda^2k^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = -\frac{(c - 1)\beta^2(t) - (c + 1)}{\beta^4(t) - 1} + \\ + \frac{1 + \varepsilon\lambda^2k^2(t)\beta^2(t)}{[\beta^2(t) - 1]^2}, \tag{23}$$

$$\frac{\beta'(t) + \beta^2(t) + \varepsilon\lambda^2k^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = \\ = \beta(t)\left\{\frac{(c - 1)\beta^2(t) - (c + 1)}{\beta^4(t) - 1} + \frac{\beta^2(t) + \varepsilon\lambda^2k^2(t)}{[\beta^2(t) - 1]^2}\right\}. \tag{24}$$

Die Gleichung (22) hat z. B. für $c = 2$ die Lösung $\beta(t) = \sqrt{3}$ für $t \in j = (-\infty, +\infty)$. Dann $\alpha(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ und die Ausdrücke (23) und (24) sind konstant in j genau dann, wenn $k(t) = k_0$ (= const.) im Intervall j. Für so gewählte Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$

und $k(t)$ stellen die Komponenten in jeder Lösung vom System (2') die Lösungen der Differentialgleichung (1') in j dar. Die gegebene Tatsache läßt sich wieder direkt verifizieren.

3. Es sei $\alpha(t) = \beta(t) + a$, wo $a \neq 0$ konstant ist. In diesem Fall

$$\frac{\beta'(t) - \alpha'(t) + \beta^2(t) - \alpha^2(t)}{[\beta(t) - \alpha(t)]^2} = -\left[\frac{2\beta(t)}{a} + 1\right].$$

Dieser Ausdruck ist konstant in j nur dann, wenn $\beta(t) = \beta_0$ (= const.). Dann also $\alpha(t) = \beta_0 + a$ und es ist evident, daß keine andere Funktion als die $k(t) = k_0$ (= const.) den Bedingungen (12) genügen kann.

Literaturverzeichnis

[1] Bellman, R.—Vasudevan, R.: *On the generalizations of Bremmer series solutions of wave equations.* In: J. Math. Anal. Appl. 52 (1975), 151—167.

[2] Cesari, L.: *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations.* Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959 (russische Auflage 1964).

[3] Kamke, E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen.* Leipzig 1959 (russische Auflage 1964).

[4] Zeman, J.: *Eine Bemerkung zur W—K—B-Methode.* In: Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 57 (1978).

Shrnutí

K ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

JIŘÍ ZEMAN

V práci je diferenciální rovnici

$$y'' + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)\, y = h(t), \tag{1}$$

v níž funkce $k(t)$ a $h(t)$ jsou definovány v intervalu j, λ je parametr a $\varepsilon = \pm 1$, přiřazena soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ -C(t) & -D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

s tou vlastností, že součet $u(t) + v(t)$ složek libovolného řešení $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ soustavy (2) je řešením diferenciální rovnice (1) v j. Jsou nalezeny podmínky k tomu, aby kromě součtu $u(t) + v(t)$ složek libovolného řešení soustavy (2) vyhovovaly diferenciální rovnici (1) v intervalu j rovněž složky $u(t)$ a $v(t)$ tohoto řešení.

Резюме

О РЕШЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

ИРЖИ ЗЕМАН

В статье вместе с дифференциальным уравнением

$$y'' + \varepsilon\lambda^2 k^2(t)\, y = h(t), \tag{1}$$

где функции $k(t)$ и $h(t)$ определены в промежутке j, λ — параметр и $\varepsilon = \pm 1$, рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ -C(t) & -D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

обладающая таким свойством, что сумма $u(t) + v(t)$ компонент любого решения $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ системы (2) является решением дифференциального уравнения (1) в j. Найдены условия для того, чтобы кроме суммы $u(t) + v(t)$ компонент любого решения системы (2) удовлетворяли дифференциальному уравнению (1) в промежутке j также компоненты $u(t)$ и $v(t)$ этого решения.