Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Jaroslav Krbiľa

Последовательность строго и специально нецопражённых линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 19 (1980), No. 1, 5--21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120086`

1980 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 65

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СТРОГО И СПЕЦИАЛЬНО НЕСОПРЯЖЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЯРОСЛАВ КРБИЛЯ

(Поступило в редакцию 20. 4. 1978 г.)

Посвящено академику О. БОРУВКЕ к дню его 80-летия 10. 5. 1979 г.

§ 1. Построение последовательности дифференциальных уравнений

Пусть дано обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$y_n'' + q_n(s_n)\, y_n = 0, \qquad y_n' = dy_n/ds_n. \tag{q_n}$$

Предположим, что действительная функция q_n, которую будем называть носителем уравнения (q_n), обладает свойством:

$$q_n \in C_o(I_n),\ I_n = (a_n, b_n) = \{s_n : -\infty \leqq a_n < s_n < b_n \leqq +\infty\},\ n \in P_o,$$

причем $P_o = \{0\} \cup P$ и P – множество всех натуральных чисел. Множество всех действительных функций, которые имеют на множестве M непрерывные производные к-го порядка, будем обозначать через $C_k(M)$, $к \in P_o$.

Под решением дифференциального уравнения (q_n) на интервале $I \subset I_n$ подразумеваем функцию y_n такую, что $y_n \in C_2(I)$ и для всех $s_n \in I$ имеет место равенство (q_n). Тривиальное нулевое решение $y_n \equiv 0$ учитывать в дальнейшем не будем.

Если действительная функция u_{i+1}, $i \in P_o$ обладает свойствами:

1° $u_{i+1} \in C_2(I_{i+1})$, $I_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1})$,

2° $u_{i+1} > 0$ для всех $s_{i+1} \in I_{i+1}$,

3° $s_i = a_i + \int\limits_{a_{i+1}}^{s_{i+1}} u_{i+1}^{-2}(t)\, dt, \qquad \int\limits_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} u_{i+1}^{-2}(t)\, dt = b_i - a_i,$

то будем говорить, что функция u_{i+1} принадлежит классу V_{i+1} и обозначать $u_{i+1} \in (V_{i+1})$.

В дальнейшем при ссылках на одно из условий c^o, $c = 1, 2, 3$ будем указывать пару (c^o, V_{i+1}).

Предметом нашего исследования является последовательность $\{(q_n)\}_{n=0}^{\infty}$ дифференциальных уравнений (q_n), носители которых конструируются с помощью функций u_i, $i \in P$, таким образом, чтобы все дифференциальные уравнения-члены приведенной последовательности имели один и тот же характер с точки зрения колеблемости, или неколеблемости.

О взаимной связи любых двух соседних членов рассматриваемой последовательности говорит

Теорема 1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y_i'' + q_i(s_i)\, y_i = 0, \qquad y_i' = dy_i/ds_i, \tag{q_i}$$

носитель которого $q_i \in C_o(I_i)$, $I_i = (a_i, b_i)$, $i \in P_o$. Если функция $u_{i+1} \in (V_{i+1})$, и функция y_i является решением дифференциального уравнения (q_i) на интервале I_i, то функция

$$y_{i+1}(s_{i+1}) = u_{i+1}(s_{i+1})\, y_i(s_i), \tag{1}$$

где сложная функция $s_i = s_i(s_{i+1})$ определена согласно $(3°, V_{i+1})$, является решением дифференциального уравнения

$$y_{i+1}'' + q_{i+1}(s_{i+1})\, y_{i+1} = 0, \qquad y_{i+1}' = dy_{i+1}/ds_{i+1}, \tag{q_{i+1}}$$

на интервале I_{i+1} и носитель дифференциального уравнения (q_{i+1}) записывается в виде

$$q_{i+1}(s_{i+1}) = q_i[s_i(s_{i+1})]\, u_{i+1}^{-4}(s_{i+1}) - u_{i+1}''(s_{i+1})\, u_{i+1}^{-1}(s_{i+1}). \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения (q_i), (q_{i+1}) на интервалах I_i, I_{i+1} соответственно являются одновременно колеблющимися, или неколеблющимися.

Доказательство. Так как функция $s_i = s_i(s_{i+1})$ возрастает и для интервалов I_i, I_{i+1} имеет место $I_i = s_i(I_{i+1})$, то функция y_{i+1}, выражаемая формулой (1) определена на интревале I_{i+1}. Для второй производной функции y_{i+1} имеем выражение:

$$y_{i+1}'' = u_{i+1}'' y_i + \ddot{y}_i u_{i+1}^{-3}, \; ' = d/ds_{i+1}, \; \dot{} = d/ds_i.$$

Если в этом выражении заменить, исходя из дифференциального уравнения (q_i), $\ddot{y}_i$ на $-q_i y_i$, то получим

$$y_{i+1}'' = [u_{i+1}'' u_{i+1}^{-1} - q_i u_{i+1}^{-4}]\, u_{i+1} y_i.$$

Отсюда согласно (1) и (2) вытекает, что функция y_{i+1}, выражаемая формулой (1), является решением дифференциального уравнения (q_{i+1}) на интервале I_{i+1}. Утверждение, что дифференциальные уравнения (q_i), (q_{i+1}) на интервалах I_i, I_{i+1} соответственно являются одновременно или колеблющимися, или неколеблющимися следует из формулы (1) и неравенства $(2°, V_{i+1})$.

Введем далее следующие обозначения, использование которых упрощает выкладки при анализе связи между нулевым и n-ым членом рассматриваемой последовательности $\{(q_n)\}_{n=0}^{\infty}$.

Пусть s_i, $i \in P_0$, суть функции удовлетворяющие $(3°, V_{i+1})$. Для множества $D(s_i)$-области определения функции s_i и множества $H(s_{i+1})$-области значений функции s_{i+1} имеем соотношение

$$D(s_i) = H(s_{i+1}) = I_{i+1}.$$

С помощью функций s_i можем определить сложные функции:

$$s_i^n = s_i(s_{i+1}^n), \quad 0 \leqq i < n, \quad n \in P; \quad s_n^n = s_n, \quad n \in P_o. \tag{3}$$

В частности

$$s_o^2 = s_o[s_1^2] = s_o[s_1(s_2^2)] = s_o[s_1(s_2)].$$

При этом

$$s_i^n(s_{n+1}) = s_i^{n+1}. \tag{4}$$

Кроме того, для областей определения и значений функции s_i^n, т. е. для множеств $D(s_i^n) = I_n$, $H(s_i^n) = I_i$, имеем соотношение:

$$s_i^n(I_n) = I_i. \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть дана последовательность дифференциальных уравнений $\{(q_n)\}_{n=0}^{\infty}$, любые соседние члены которой обладают свойством указанным в теореме 1. Тогда если y_0 является решением дифференциального уравнения (q_0) на интервале I_0, то дифференциальное уравнение (q_n), $n \in P$ имеет носитель $q_n \in C_0(I_n)$, выражаемый при помощи носителя q_0 формулой

$$q_n(s_n) = q_0(s_0^n) \prod_{j=1}^{n} u_j^{-4}(s_j^n) - \sum_{j=1}^{n} u_j''(s_j^n)\, u_j^{-1}(s_j^n) \prod_{k=j+1}^{n} u_k^{-4}(s_k^n) \tag{6}$$

и функция

$$y_n(s_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n)\, y_0(s_0^n) \tag{7}$$

является решением дифференциального уравнения (q_n) на интервале I_n.

Доказательство. При $n = 1$ имеем дифференциальное уравнение (q_0), $q_0 \in C_0(I_0)$, $I_0 = (a_0, b_0)$. Возьмем функцию $u_1 \in (V_1)$. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 1, можно проверить, что функция $y_1 = u_1 y_0(s_0)$, где функция $s_0 = s_0(s_1)$ определяется интегралом

$$s_0 = a_0 + \int_{a_1}^{s_1} u_1^{-2}(t)\, dt,$$

т. е. функция

$$y_1 = u_1 y_0(s_0^1) \tag{8}$$

является решением дифференциального уравнения (q_1) с носителем

$$q_1(s_1) = q_0(s_0^1)\, u_1^{-4}(s_1) - u_1''(s_1)\, u_1^{-1}(s_1). \tag{9}$$

Так как функции y_0, q_0 определены на интервале I_0, то функции y_1, q_1 выражаемые формулами (8), (9) соответственно, определены на интервале $I_1 = (a_1, b_1)$. Таким образом при $n = 1$ утверждение теоремы справедливо.

Следуя методу индукции, предположим, что данное утверждение справедливо для $n = i$, т. е. что дифференциальное уравнение (q_i) имеет носитель, определенный на интервале I_i и выраженный формулой:

$$q_i(s_i) = q_0(s_0^i)\prod_{j=1}^{i} u_j^{-4}(s_j^i) - \sum_{j=1}^{i} u_j''(s_j^i)\, u_j^{-1}(s_j^i) \prod_{k=j+1}^{i} u_k^{-4}(s_k^i) \tag{10}$$

и что функция

$$y_i(s_i) = \prod_{j=1}^{i} u_j(s_j^i)\, y_0(s_0^i) \tag{11}$$

является решением уравнения (q_i) на интервале I_i. Тогда из теоремы 1 следует, что для функции y_{i+1}, выраженной согласно (1), где вместо y_i выписана правая часть из (11), справедлива формула:

$$y_{i+1}(s_{i+1}) = u_{i+1}(s_{i+1})\, y_i[s_i(s_{i+1})] = u_{i+1}(s_{i+1}) \prod_{j=1}^{i} u_j[s_j^i(s_{i+1})]\, y_0[s_0^i(s_{i+1})]\,.$$

Используя равенство (4) получим

$$y_{i+1}(s_{i+1}) = \prod_{j=1}^{i+1} u_j(s_j^{i+1})\, y_0(s_0^{i+1}),$$

эта функция является решением дифференциального уравнения (q_{i+1}) с носителем, выраженным формулой (2) и определенным на интервале I_{i+1}. Если в формуле (2) выразим q_i в соответствии с (10), то получим:

$$q_{i+1}(s_{i+1}) = q_0[s_0^i(s_{i+1})]\, u_{i+1}^{-4}(s_{i+1}) \prod_{j=1}^{i} u_j^{-4}[s_j^i(s_{i+1})] -$$

$$- u_{i+1}^{-4}(s_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} u_j''[s_j^i(s_{i+1})]\, u_j^{-1}[s_j^i(s_{i+1})] \prod_{k=j+1}^{i} u_k^{-4}[s_k^i(s_{i+1})] - u_{i+1}''(s_{i+1})\, u_{i+1}^{-1}(s_{i+1}).$$

Используя далее соотношение (4), получим для q_{i+1} выражение:

$$q_{i+1}(s_{i+1}) = q_0(s_0^{i+1}) \prod_{j=1}^{i+1} u_j^{-4}(s_j^{i+1}) - \sum_{j=1}^{i+1} u_j''(s_j^{i+1})\, u_j^{-1}(s_j^{i+1}) \prod_{k=j+1}^{i+1} u_k^{-4}(s_k^{i+1}).$$

Таким образом мы показали, что утверждение теоремы справедливо при $n = i + 1$ и доказали тем самым данную теорему полностью.

Заметим что

$$\prod_{j=k}^{k} u_j = u_k, \qquad \prod_{j=k+1}^{k} u_j = 1.$$

В дальнейшем будем выбирать функции u_{i+1} специальным образом. Для простоты обозначим:

$$e_{-1} = 0,\ e_{-2} = -\infty,\ e_k = \exp[e_{k-1}],$$
$$l_0(t) = t,\ l_{k+1}(t) = \log[l_k(t)],\ k \in P_0,$$

используя, естественно натуральные логарифмы.

Положим

$$u_{i+1} = \sqrt{s_{i+1}}, \qquad i \in P_0, \tag{12}$$

где

$$s_{i+1} \in I_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}),\ a_{i+1} \geqq 0.$$

Очевидно, что функция $u_{i+1} \in (V_{i+1})$. Полагая, что

$$\lim_{s_{i+1} \to a_{i+1}+} \log(s_{i+1}) = a_i,$$

получаем из $(3^\circ, V_{i+1})$ функцию

$$s_i = \log(s_{i+1}),\ i \in P_0, \tag{13}$$

определенную на интервале $I_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1})$. Полагая $a_0 = -\infty$, $b_0 = +\infty$, получим, что

$$I_{i+1} = (e_{i-1}, +\infty),\ i \in P_{-1} = \{-1\} \cup P_0.$$

Легко можно проверить, что для функций определенных согласно (3) имеет место соотношение:

$$s_j^k = l_{k-j}(s_k), \qquad 0 \leqq j \leqq k. \tag{14}$$

В соответствии с (12) и (14) имеем

$$\prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n) = \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{l_j(s_n)}.$$

Дифференцируя дважды функцию u_i по s_i получаем

$$u_i'(s_j^n) = 1/2\sqrt{l_{n-j}(s_n)}, \qquad u_j''(s_j^n) = -1/4 l_{n-j}(s_n)\sqrt{l_{n-j}(s_n)}. \tag{15}$$

Тогда из теоремы 2 непосредственно вытекает следующая теорема:

Теорема 3. Пусть дано дифференциальное уравнение (q_0) с носителем $q_0 \in C_0(I_0)$, где интервал $I_0 = (-\infty, +\infty)$ и пусть y_0 является решением этого уравнения на интервале I_0. Тогда дифференциальное уравнение (q_n), $n \in P$, носитель которого обладает свойством $q_n \in C_0(I_n)$, $I_n = (e_{n-2}, +\infty)$ и выражается формулой:

$$q_n(s_n) = q_0[l_n(s_n)] \prod_{j=0}^{n-1} l_j^{-2}(s_n) + \sum_{j=1}^{n} (2 \prod_{k=0}^{j-1} l_k(s_n))^{-2}, \tag{16}$$

обладает на интервале I_n решением

$$y_n(s_n) = \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{l_j(s_n)}\, y_0[l_n(s_n)]. \tag{17}$$

§ 2. Некоторые свойства гиперболических и параболических фаз

При рассматривании свойств дифференциальных уравнений (q_n), кроме других средств, употребляются фазы. Теория фаз находится в тесной связи с теорией преобразований дифференциальных уравнений (q), (Q):

$$y'' + q(s)\,y = 0,\ y' = dy/ds, \tag{q}$$

$q \in C_0(I),\ I = (a, b)$,

$$У^{\cdot\cdot} + Q(S)\,У = 0,\ У^{\cdot} = dУ/dS, \tag{Q}$$

$Q \in C_0(J),\ J = (A, B)$.

Суть преобразования состоит в установлении связи между решениями дифференциальных уравнений (q), (Q) и решениями нелинейных дифференциальных уравнений Куммера:

$$\{X, s\} + Q(X)\,X'^2 = q(s), \tag{Q, q}$$

где символ

$$\{X, s\} = (X''/2X')' - (X''/2X')^2$$

обозначает производную Шварца функции X в точке s.

Имеет место (см. [3, 4]) утверждение:

Если X является решением дифференциального уравнения на интервале $i \subset I$ и $X'(s) \neq 0$ для всех $s \in i$, и $У$ является решением дифференциального уравнения (Q), определенным на интервале $j \subset X(i) \subset J$, то сложная функция

$$y = У[X]/\sqrt{|X'|}, \tag{18}$$

является решением дифференциального уравнения (q) на интервале i.

В дальнейших рассуждениях мы будем обращать внимание на так называемые несопряженные дифференциальные уравнения. Для их исследования используются гиперболические, или параболические фазы [1, 11, 12, 13], поэтому напомним их определения.

Функции α_h, α_p называются гиперболической, параболической фазой дифференциального уравнения (q) соответственно, если они обладают свойствами:

(i) принадлежат к классу C_3 на соответствующих интервалах определения I_h, I_p и $\alpha_n'(s) \neq 0$, $\alpha_p'(s) \neq 0$ для всех $s \in I_h, I_p$,

(ii) удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$\{\alpha_h, s\} - \alpha_h'^2 = q_h(s), \qquad s \in I_h, \tag{$-1, q$}$$

$$\{\alpha_p, s\} = q_p(s), \qquad s \in I_p, \tag{$0, q$}$$

где функции q_h, q_p совпадают на интервалах I_h, I_p с носителем q уравнения (q).

Фаза α определенная на интервале $I_k = (a_k, b_k) \subset I$ и такая, что

$$\lim_{s \to a_k+} \alpha(s) = -\infty \operatorname{sgn} \alpha', \qquad \lim_{s \to b_k-} \alpha(s) = +\infty \operatorname{sgn} \alpha', \tag{19}$$

называется главной фазой на интервале I_k.

Решение y дифференциального уравнения (q), определенное на интервале I, называется правым, или левым главным решением дифференциального уравнения (q) на интервале I, если для всех $s \in I$

$$y(s) \neq 0, \qquad \int_a^s y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x < +\infty, \qquad \int_s^b y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x = +\infty \tag{20}$$

и

$$y(s) \neq 0, \qquad \int_s^b y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x < +\infty, \qquad \int_a^s y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$$

соответственно.

Можно доказать [13], что правое главное решение на интервале I, дифференциального уравнения (q), существует тогда и только тогда, когда существует левое главное решение дифференциального уравнения (q) на интервале I. На основании этого определяем:

Дифференциальное уравнение (q) называется строго несопряженным дифференциальным уравнением на интервале I, если существует левое, или правое главное решение дифференциального уравнения (q) на интервале I.

Дифференциальное уравнение (q) называется специально несопряженным дифференциальным уравнением на интервале I, если существует его решение y такое, что

$$y(s) \neq 0, \qquad \int_a^s y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x = +\infty, \qquad \int_s^b y^{-2}(x)\,\mathrm{d}x = +\infty, \tag{22}$$

для всех $s \in I$.

Решение y, дифференциального уравнения (q), подчиняющееся (22), называется главным решением дифференциального уравнения (q) на интервале I.

Отметим, что правое главное решение дифференциального уравнения (q) на интервале I и главное решение дифференциального уравнения (q) на интервале I, являются также главными решениями в том смысле, какое было введено Лейтоном и Морсом в [18]. Обратное утверждение не имеет, вообще, места.

Пусть дифференциальное уравнение (q) является строго, или специально несопряженным на интервале I. Базис решений (y_1, y_2) дифференциального уравнения (q) называется главным базисом уравнения (q) на интервале I, если одно из решений y_1, y_2 является левым и другое правым главным решением на интервале I, или если одно из решений является главным решением на интервале I.

Из свойств решений дифференциального уравнения (Q, q) соотношения (18), из определения гиперболических, или параболических фаз и из определения главных фаз (19) вытекает следующее утверждение [13]:

Лемма 1. Если α_h, или α_p является фазой (главной фазой) дифференциального уравнения (q) на интервале I, то функции

$$y_{1h} = [\exp(\alpha_h \operatorname{sgn} \alpha_h')]/\sqrt{|\alpha_h'|}, \qquad y_{2h} = [\exp(-\alpha_h \operatorname{sgn} \alpha_h')]/\sqrt{|\alpha_h'|}, \tag{23}$$

$$y_{1p} = \alpha_p/\sqrt{|\alpha_p'|}, \qquad y_{2p} = 1/\sqrt{|\alpha_p'|}, \tag{23a}$$

составляют базис (главный базис) решений дифференциального уравнения (q) на интервале I. В случае главного базиса, если $\operatorname{sgn} \alpha' = 1(-1)$, то $y_{2h}(y_{1h})$ является правым и $y_{1h}(y_{2h})$ левым главным решением на интервале I, или y_{2p} является главным решением на интервале I.

Из выше сказанного вытекает, что имеет место:

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием того, чтобы дифференциальное уравнение (q) было строго, или специально несопряженным дифференциальным уравнением на интервале I, является существование главной гиперболической, или главной параболической фазы дифференциального уравнения (q) на интервале I. Носитель этого дифференциального уравнения можно выразить формулой $(-1, q)$, или $(0, q)$.

§ 3. Несопряженные дифференциальные уравнения одинакового типа

В этом параграфе используем результаты из § 1 и свойства параболических, или гиперболических фаз, введенных в § 2. Будем искать ответ на вопрос, принадлежат ли дифференциальные уравнения — члены последовательности $\{(q_n)\}_{n=0}^{\infty}$, носители которых выражаются формулой (6) к одному и тому же типу, на соответствующих интервалах, причем тому типу, к которому принадлежит дифференциальное уравнение (q_0) на интервале I_0.

Ниже будем предполагать, что функции $u_i \in (V_i)$ для всех $i \in P$. С помощью функций α_0 таких, что

$$\alpha_0 \in C_3(I_0),\ \alpha_0' \neq 0 \quad \text{для всех} \quad s_0 \in I_0 = (a_0, b_0) \tag{α_0}$$

и функций s_i, $i \in P_0$, удовлетворяющих $(3^\circ, V_{i+1})$, построим далее функции:

$$\alpha_i(s_i) = \alpha_0(s_0^i), \qquad i \in P_0. \tag{24}$$

Лемма 3. Функции α_i определенные формулой (24) обладают свойствами:

$$\alpha_i(s_i) \in C_3(I_i), \qquad \alpha_i'(s_i) \neq 0 \tag{25}$$

для всех $s_i \in I_i$,

$$\alpha_{i+1}(s_{i+1}) = \alpha_i(s_i^{i+1}). \tag{26}$$

Доказательство. Свойство (25) следует из свойств производных сложных функций ввиду (α_0) и свойств функций s_i. Из определения (24) и свойства (4) получаем равенство

$$\alpha_{i+1}(s_{i+1}) = \alpha_0(s_0^{i+1}) = \alpha_0[s_0^i(s_{i+1})] = \alpha_i[s_i(s_{i+1})] = \alpha_i(s_i^{i+1}),$$

из которого вытекает справедливость (26).

Лемма 4. Пусть дана последовательность функций $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ определенных формулой (24). Тогда для каждого $n \in P$ производная Шварца функции α_n в точке s_n равна

$$\{\alpha_n, s_n\} = \{\alpha_{n-1}, s_{n-1}^n\}\, s_{n-1}'^2(s_n) + \{s_{n-1}, s_n\}. \tag{27}$$

Доказательство. а) В случае $n = 1$, учитывая формулу для производной Шварца сложной функции [3, 4]:

$$\{XZ, t\} = \{X, Z(t)\}\, Z'^2(t) + \{Z, t\}, \tag{28}$$

получим

$$\{\alpha_1, s_1\} = \{\alpha_0[s_0(s_1)], s_1\} = \{\alpha_0, s_0(s_1)\}\, s_0'^2(s_1) + \{s_0, s_1\} =$$
$$= \{\alpha_0, s_0^1\}\, s_0'^2(s_1) + \{s_0, s_1\}.$$

б) Пусть (27) справедливо при $n = m$. Тогда из (28) и (26) получим

$$\{\alpha_{m+1}, s_{m+1}\} = \{\alpha_m(s_m^{m+1}), s_{m+1}\} = \{\alpha_m, s_m(s_{m+1})\} s_m'^2(s_{m+1}) + \{s_m, s_{m+1}\} =$$
$$= \{\alpha_m, s_m^{m+1}\}\, s_m'^2(s_{m+1}) + \{s_m, s_{m+1}\}.$$

Итак лемма доказана.

Лемма 5. Если выполняются условия предыдущей леммы, то для каждого $n \in P$ имеет место соотношение

$$\{\alpha_n, s_n\} = \{\alpha_0, s_0^n\} \prod_{j=0}^{n-1} s_j'^2(s_{j+1}^n) + \sum_{j=0}^{n-1} \{s_j, s_{j+1}^n\} \prod_{k=j+1}^{n-1} s_k'^2(s_{k+1}^n). \tag{29}$$

Доказательство. а) При $n = 1$ получаем аналогично как в части а) доказательства леммы 4:

$$\{\alpha_1, s_1\} = \{\alpha_0, s_0^1\}\, s_0'^2(s_1) + \{s_0, s_1\} = \{\alpha_0, s_0^1\}\, s_0'^2(s_1^1) + \{\alpha_0, s_1^1\} =$$
$$= \{\alpha_0, s_0^1\} \prod_{j=0}^{0} s_j'^2(s_1^1) + \sum_{j=0}^{0} \{s_j, s_{j+1}^1\} \prod_{k=j+1}^{0} s_k'^2(s_{k+1}^1).$$

б) Используя выражение для производной Шварца в (29) при $n = m$, получим при $n = m + 1$ на основании леммы 4, что

$$\{\alpha_{m+1}, s_{m+1}\} = \{\alpha_m, s_m^{m+1}\}\, s_m'^2(s_{m+1}) + \{s_m, s_{m+1}\} =$$
$$= (\{\alpha_0, s_0^m(s_{m+1})\} \prod_{j=0}^{m-1} s_j'^2[s_{j+1}^m(s_{m+1})] +$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\{s_j, s_{j+1}^m(s_{m+1})\}\prod_{k=j+1}^{m-1} s_k'^2[s_{k+1}^m(s_{m+1})])\, s_m'^2(s_{m+1}) + \{s_m, s_{m+1}\} =$$

$$= \{\alpha_0, s_0^{m+1}\}\, s_m'^2(s_{m+1})\prod_{j=0}^{m-1} s_j'^2(s_{j+1}^{m+1}) + \sum_{j=0}^{m-1}\{s_j, s_{j+1}^{m+1}\}\, s_m'^2(s_{m+1})\prod_{k=j+1}^{m-1} s_k'^2(s_{k+1}^{m+1}) +$$

$$+ \{s_m, s_{m+1}\} = \{\alpha_0, s_0^{m+1}\}\prod_{j=0}^{m} s_j'^2(s_{j+1}^{m+1}) + \sum_{j=0}^{m}\{s_j, s_{j+1}^{m+1}\}\prod_{k=j+1}^{m} s_k'^2(s_{k+1}^{m+1}).$$

Лемма 5 доказана.

Теорема 4. Пусть функции $u_i \in (V_i)$, $i \in P$ и дифференциальное уравнение (q_0) является специально, или строго несопряженным на интервале I_0. Если любые соседние члены последовательности дифференциальных уравнений $\{(q_n)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствуют теореме 1, то каждый член этой последовательности — дифференциальное уравнение с носителем q_n, $n \in P$ имеющим вид (6), является специально, или строго несопряженным уравнением на интервале I_n.

Доказательство. Для установления факта специальной несопряженности уравнения (q_n) достаточно доказать согласно лемме 2 существование главной параболической фазы этого уравнения на интервале I_n. По предположению, существует главная параболическая фаза α_0 дифференциального уравнения (q_0) на интервале I_0. Докажем, что сложная функция $\alpha_n(s_n) = \alpha_0(s_0^n)$ является главной параболической фазой дифференциального уравнения (q_n) на интервале I_n. Функция α_n обладает свойством (25), где $i = n$. Покажем, что на концах интервала $I_n = (a_n, b_n)$ функция α_n стремится к бесконечным пределам (19). Действительно из свойств функций s_i удовлетворяющих $(3°, V_{i+1})$ вытекает, что

$$\lim_{s_{i+1}\to a_{i+1}^+} s_i(s_{i+1}) = a_i, \qquad \lim_{s_{i+1}\to b_{i+1}^-} s_i(s_{i+1}) = b_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поскольку для главной параболической фазы α_0 имеем

$$\lim_{s_0\to a_0^+} \alpha_0(s_0) = -\infty \operatorname{sgn} \alpha_0', \qquad \lim_{s_0\to b_0^-} \alpha_0(s_0) = +\infty \operatorname{sgn} \alpha_0',$$

то

$$\lim_{s_n\to a_n^+} \alpha_0(s_0^n) = -\infty \operatorname{sgn} \alpha_0', \qquad \lim_{s_n\to b_n^-} \alpha_0(s_0^n) = +\infty \operatorname{sgn} \alpha_0'.$$

Далее нужно показать, что носитель дифференциального уравнения (q_n), выражаемый формулой (6), где $q_0(s_0^n) = \{\alpha_0, s_0^n\}$, т. е. носитель

$$q_n(s_n) = \{\alpha_0, s_0^n\}\prod_{j=1}^{n} u_j^{-4}(s_j^n) - \sum_{j=1}^{n} u_j''(s_j^n)\, u_j^{-1}(s_j^n)\prod_{k=j+1}^{n} u_k^{-4}(s_k^n) \tag{30}$$

равен носителю q_n который в силу $(0, q)$ принимает вид

$$q_n(s_n) = \{\alpha_n, s_n\} = \{\alpha_0(s_0^n), s_n\}. \tag{31}$$

Эта производная Шварца была вычислена в лемме 5. Производные функции s_i равны:

$$s_i'(s_{i+1}) = u_{i+1}^{-2}(s_{i+1}), \qquad s_i''(s_{i+1}) = -2u_{i+1}'(s_{i+1})\, u_{i+1}^{-3}(s_{i+1}),$$

откуда получим, что

$$(s_i''/2s_i')' = -u_{i+1}''/u_{i+1} + (u_{i+1}'/u_{i+1})^2,$$
$$(s_i''/2s_i')^2 = (u_{i+1}'/u_{i+1})^2,$$

и производная Шварца

$$\{s_i, s_{i+1}\} = -u_{i+1}''(s_{i+1})\, u_{i+1}^{-1}(s_{i+1}).$$

Если при помощи данных выражений мы заменим функции s функциями u, то получим из (31), (29) формулу:

$$q_n(s_n) = \{\alpha_0, s_0^n\} \prod_{j=0}^{n-1} u_{j+1}^{-4}(s_{j+1}^n) -$$
$$-\sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}''(s_{j+1}^n)\, u_{j+1}^{-1}(s_{j+1}^n) \prod_{k=j+1}^{n-1} u_{k+1}^{-4}(s_{k+1}^n),$$

которая совпадает с (30). Теорема доказана.

В гиперболическом случае, т. е. тогда, когда дифференциальное уравнение (q_0) является строго несопряженным на интервале I_0, доказательство аналогичное. Не приводя его полностью, заметим, что тогда функция $\alpha_n = \alpha_0(s_0^n)$, где α_0 — главная гиперболическая фаза дифференциального уравнения (q_0) на интервале I_0, является главной гиперболической фазой дифференциального уравнения (q_n) с носителем выражаемым формулой, аналогичной (30):

$$q_n(s_n) = [\{\alpha_0, s_0^n\} - \alpha_0'^2(s_0^n)] \prod_{j=1}^{n} u_j^{-4}(s_j^n) - \sum_{j=1}^{n} u_j''(s_j^n)\, u_j^{-1}(s_j^n) \prod_{k=j+1}^{n} u_k^{-4}(s_k^n). \quad (32)$$

В этом случае вместо (31) получим формулу:

$$q_n(s_n) = \{\alpha_n, s_n\} - \alpha_n'^2 = \{\alpha_0(s_0^n), s_n\} - \alpha_0'^2(s_0^n) =$$
$$= [\{\alpha_0, s_0^n\} - \alpha_0'^2(s_0^n)] \prod_{j=0}^{n-1} s_j'^2(s_{j+1}^n) + \sum_{j=0}^{n-1} \{s_j, s_{j+1}^n\} \prod_{k=j+1}^{n-1} s_k'^2(s_{k+1}^n). \quad (33)$$

Следствие 1. Дифференциальное уравнение (q_n) с носителем (30), или (32) имеет на интервале I_n следующий главный базис решений:

$$y_{1np}(s_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n)\, \alpha_0(s_0^n)/\sqrt{|\dot\alpha_0(s_0^n)|},$$
$$y_{2np}(s_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n)/\sqrt{|\dot\alpha_0(s_0^n)|}, \quad (34)$$

или

$$y_{1nh}(s_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n)\,(\exp[\alpha_0(s_0^n)\, \mathrm{sgn}\, \dot\alpha_0])/\sqrt{|\dot\alpha_0(s_0^n)|},$$
$$y_{2nh}(s_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n)\,(\exp[-\alpha_0(s_0^n)\, \mathrm{sgn}\, \dot\alpha_0])/\sqrt{|\dot\alpha_0(s_0^n)|}, \quad (35)$$

где $\dot\alpha_0 = d\alpha_0/ds_0$. Если $\mathrm{sgn}\, \dot\alpha_0 = 1\ (-1)$, то $y_{2nh}(y_{1nh})$ является правым и $y_{1nh}(y_{2nh})$

левым главным решением на интервале I_n дифференциального уравнения (q_n) с носителем (32). Решение y_{2np} является главным решением на интервале I_n дифференциального уравнения (q_n) с носителем (30).

Доказательство. Из леммы 1 и выражения (7) следует, что функции (34), или (35) суть решения дифференциального уравнения (q_n) на интервале I_n с носителем (30) или (32) соответственно. Очевидно, что они составляют базис. Остается доказать, что они представляют собой главный базис. Докажем это в параболическом случае. Для этого нужно установить, что решение y_{2np} из (34) удовлетворяет (22). Действительно, для всех $s_n \in I_n$ имеем $y_{2np} \neq 0$. Полагая далее

$$z = s_0^n, \qquad dz = (s_0^n)'\, ds_n = \prod_{j=0}^{n-1} s_j'(s_{j+1}^n)\, ds_n = \prod_{j=0}^{n-1} u_{j+1}^{-2}(s_{j+1}^n)\, ds_n$$

получим для всех $s_{n0} \in I_n$:

$$\int_{a_n}^{s_{n0}} y_{2np}^{-2}(s_n)\, ds_n = \int_{a_n}^{s_{n0}} \prod_{j=1}^{n} u_j^{-2}(s_j^n)\, |\dot{\alpha}_0(s_0^n)|\, ds_n = \int_{a_0}^{s_{00}} |\dot{\alpha}_0(z)|\, dz = +\infty,$$

где $s_{00} = s_0^{n-1}(s_{n0})$. Точно также получим, что

$$\int_{s_{n0}}^{b_n} y_{2np}^{-2}(s_n)\, ds_n = +\infty.$$

Так как доказательство в гиперболическом случае аналогичное, следствие 1 доказано.

При $n = 1$ параболический и гиперболический случай был исследован в работе [15] а гиперболический случай, если гиперболическая фаза $\alpha_0(s_0) = s_0$ на полуоткрытом бесконечном интервале $\langle a, +\infty)$ был исследован в работе [20] (см. теорема 9, стр. 207).

Используем теперь теорему 3 или теорему 4 и следствие 1 в специальном случае, когда в качестве дифференциального уравнения (q_0) примем уравнение с постоянными коэффициентами $y'' = 0$, или $y'' - y = 0$ на интервале $I_0 = (-\infty, +\infty)$ с главной параболической, или гиперболической фазой $\alpha_0(s_0) = s_0$. Тогда справедливо

Следствие 2. Дифференциальное уравнение (q_n), $n \in P$, с носителем $q_n \in C_0(I_n)$, $I_n = (e_{n-2}, +\infty)$, определенным формулой

$$q_{np} = \sum_{j=1}^{n} \left(2 \prod_{k=0}^{j-1} l_k(s_n)\right)^{-2}, \tag{36}$$

или

$$q_{nh} = \sum_{j=1}^{n} \left(2 \prod_{k=0}^{j-1} l_k(s_n)\right)^{-2} - \prod_{j=0}^{n-1} l_j^{-2}(s_n), \tag{37}$$

имеет на интервале I_n главную параболическую, или гиперболическую фазу

$\alpha_n = l_n(s_n)$ и главный базис

$$y_{1np} = \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{l_j(s_n)}\, l_n(s_n), \qquad y_{2np} = \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{l_j(s_n)}, \tag{38}$$

или

$$y_{1nh} = \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{l_j(s_n)}\, l_{n-1}(s_n), \qquad y_{2nh} = \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{l_j(s_n)}\, l_{n-1}^{-1}(s_n). \tag{39}$$

Справедливость этого следствия вытекает из того, что y_{2np} является главным решением на интервале I_n и $y_{1nh}(y_{2nh})$ является левым (правым) главным решением на интервале I_n.

В случае $n = 1$ получим из (36) носитель

$$q_{1p}(s_1) = 1/4s_1^2 \tag{40}$$

дифференциального уравнения Эйлера. Таким образом члены последовательности $\{(q_{np})\}_{n=1}^{\infty}$ с носителем вида (36) можем рассматривать как специально несопряженные обобщенные линейные дифференциальные уравнения Эйлера на интервале $I_n = (e_{n-2}, +\infty)$, (см. [14]).

Заметим, что логарифмическая шкала Хилле-Хартмана используется при анализе неколеблемости решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка (см. [6, 8, 19, 20, 21]).

§ 4. Достаточные условия несопряженности дифференциальных уравнений

В настоящем параграфе рассмотрим достаточные признаки несопряженности дифференциальных уравнений

$$y'' + A_n(s_n)\, y = 0, \tag{A_n}$$

на интервале $J_n = (c_n, d_n) \subset I_n$, $A_n \in C_0(J_n)$, $n \in P_0$. Справедлива

Теорема 5. Если функции $u_i \in (V_i)$, $i \in P$ и функция $\alpha_0 \in C_3(I_0)$, $\alpha_0' \neq 0$ для всех $s_0 \in I_0$ такова, что

$$\lim_{s_0 \to a_0+} \alpha_0(s_0) = -\infty \operatorname{sgn} \dot\alpha_0, \qquad \lim_{s_0 \to b_0-} \alpha_0(s_0) = +\infty \operatorname{sgn} \dot\alpha_0, \qquad \dot{} = d/ds_0$$

и если для всех $s_n \in J_n$, $n \in P_0$ имеет место неравенство

$$A_n(s_n) \leqq \{\alpha_0, s_0^n\} \prod_{j=1}^{n} u_j^{-4}(s_j^n) - \sum_{j=1}^{n} u_j''(s_j^n)\, u_j^{-1}(s_j^n) \prod_{k=j+1}^{n} u_k^{-4}(s_k^n), \tag{41}$$

то дифференицальное уравнение (A_n) является несопряженным на интервале J_n.

Доказательство. Дифференциальное уравнение (q_n) с носителем (30), равным правой части неравенства (41), имеет главную параболическую фазу $\alpha_0(s_0^*)$ на интервале I_n. Поэтому это дифференциальное уравнение является в силу теоремы 4 специально несопряженным на интервале I_n. Отсюда и из известной теоремы справнения Штурма заключаем, что дифференциальное уравнение (A_n) является несопряженным на интервале J_n.

Положим далее $\alpha_0(s_0) = s_0$ и $u_i = \sqrt{s_i}$. Тогда из следствия 2 и выражения (36) получим

Следствие 3. Если для всех $s_n \in J_n \subset (e_{n-2}, +\infty)$, $n \in P$, имеет место неравенство

$$A_n(s_n) \leqq \sum_{j=1}^{n} \left(2 \prod_{k=0}^{j-1} l_k(s_n)\right)^{-2}, \tag{42}$$

то дифференциальное уравнение (A_n) является несопряженным на интервале J_n.

Из последнего следствия в случае $n = 1$ получаем модификацию известного критерия неколеблемости Кнезера [9]:

Если $A_1(s_1) \leqq 1/4s_1^2$ для всех $s_1 \in J_1 \subset (0, +\infty)$, то дифференциальное уравнение (A_1) является несопряженным на интервале J_1.

В случае $n \geqq 2$ получаем модификацию критерия неколеблемости Беллмана [2], выведенную другим путем в [10].

Выбирая в качестве главной параболической фазы α_0 и функции u_i в теореме 5 какие-либо функции, можно получить те или иные достаточные признаки несопряженности дифференциальных уравнений вида (A_n). Таким образом можно сказать, что наши результаты указывают на общий метод конструирования достаточных условий несопряженности дифференциальных уравнений (A_n) осуществляемый при помощи фаз и теоремы сравнения Штурма. Подобный подход в случае неколеблемости применен в [7].

В заключение отметим, что аналогичные вопросы, но с помощью других методов исследуются в [6, 16, 17, 22]. Заметим также, что основная идея данной работы была использована для анализа решений нелинейных дифференциальных уравнений амплитуд в [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Barvínek, E.: *Quadratic phases of differential equations $y'' = q(t)y$.* Arch. Math. 2, Brno, 1972, 63—78.

[2] Bellman, R.: *Stability theory of differential equations* (ruský preklad IL Moskva 1954).

[3] Borůvka, O.: *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung.* Berlin 1967.

[4] Борувка О.: *Теория глобальных свойств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Дифф. уравнения, т. XII. № 8 (1976), 1347—1383.

[5] Feťková, J.: *O niektorých prípadoch, v ktorých možno diferenciálne rovnice amplitúd explicitne riešiť.* Práce a štúdie VŠD (v tlači).

[6] Hille, E.: *Non oscillation theorems.* Trans. Amer. Math. Soc. 64, 1948, 234—252.

[7] Каменев, И. В.: *К вопросу неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.* Матем. заметки Т. 18, № 1 (1975) 51—56.

[8] Каменев, И. В.: *О проблеме неколеблемости решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Труды МИЭМ В 30, (1974) 126—143.

[9] Kneser, A.: *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen.* Math. Annalen 42, 1893, 409—435.

[10] Кондратьев, В. А.: *Элементарный вывод необходимого условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.* У. М. Н., Т. XII. 3 (75), 1957, 159—160.

[11] Krbiľa, J.: *Pure disconjugate homogeneous linear differential equations of the second order.* Zborník ved. prác DF VŠLD, 1972, 241—248.

[12] Krbiľa, J.: *Applikation von parabolischen Phasen der Differentialgleichung $y'' = q(t)\,y$.* Sborník prací VŠD a VÚD, 1973, IV. ved. konf. 1. sekcia, 67—74.

[13] Krbiľa, J.: *Diferenciálne rovnice druhého rádu a kvadratické funkcionály.* Habilitačná práca, 1974.

[14] Krbiľa, J.: *Zovšeobecnené Eulerove lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu.* Čas. pěst. mat. 96, 1971, 361—366.

[15] Krbiľa, J.: *Istá trieda rýdze a špeciálne diskonjugovaných diferenciálnych rovníc $y'' + qy = 0$.* Práce a štúdie VŠD (v tlači).

[16] Laitoch, M.: *Sur une théorie des critères comparatifs sur l'oscillation des intégrales l'équation differentielle $u'' = P(x)\,u$.* Spisy přír. fak. MU, 365, 1955, 1—12.

[17] Laitoch, M.: *Über die Nullstellenanzahl der Lösungen der Differentialgleichung $y'' = Q(t)\,y$.* Acta Universitatis Olomucensis FRN, T 3, 1960, 5—9.

[18] Leighton, W., Morse, M.: *Singular quadratic functionals.* Trans. Amer. Math. Soc., 40, 1936, 252—286.

[19] Николенко Л. Д.: *Об одном достаточном условии неколебательности решений уравнения $y'' + p(x)\,y = 0$.* ДАН СССР, 110, 1956, 929—931.

[20] Ráb, M.: *Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + q(x)\,y = 0$.* Czech. Math. J. 14 (89), 1964, 203—221.

[21] Ráb, M.: *Poznámka k otázke o oscilačných vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y'' + A(x)y = 0$.* Čas pěst. mat. 82, 1957, 342—348.

[22] Wintner, A.: *On the nonexistence of conjugate points.* Amer. J. Math. 73, N° 2, 1951, 368—380.

Адрес автора: 01088 Žilina, Marxa-Engelsa 25, (Katedra matematiky fakulty SET VŠD).

Resumé

POSTUPNOSŤ RÝDZE A ŠPECIÁLNE DISKONJUGOVANÝCH LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC DRUHÉHO RÁDU

JAROSLAV KRBIĽA

V práci sa študuje postupnosť $\{(q_n)\}_{n=0}^{\infty}$ diferenciálnych rovníc

$$y_n'' + q_n(s_n)\, y_n = 0, \qquad ' = d/ds_n, \tag{q_n}$$

$q_n \in C_0(I_n)$, $I_n = (a_n, b_n)$, konštruovaná pomocou funkcií u_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, ktoré majú vlastnosti

$$u_i \in C_2(I_i), \qquad I_i = (a_i, b_i), \qquad u_i > 0 \qquad \text{pre všetky } s_i \in I_i,$$
$$s_{i-1} = a_{i-1} + \int_{a_i}^{s_i} u_i^{-2}(t)\, dt, \qquad \int_{a_i}^{b_i} u_i^{-2}(t)\, dt = b_{i-1} - a_{i-1}.$$

Dokazuje sa, že pre nosiče a riešenia každých dvoch susedných členov uvažovanej postupnosti platia vzťahy (Veta 1):

$$q_{i+1}(s_{i+1}) = q_i[s_i(s_{i+1})]\, u_{i+1}^{-4}(s_{i+1}) - u_{i+1}''(s_{i+1})\, u_{i+1}^{-1}(s_{i+1}), \qquad ' = d/ds_{i+1},$$
$$y_{i+1}(s_{i+1}) = u_{i+1}(s_{i+1})\, y_i(s_i),$$

a pre n-tý člen platí (Veta 2):

$$q_n(s_n) = q_0(s_0^n) \prod_{j=1}^{n} u_j^{-4}(s_j^n) - \sum_{j=1}^{n} u_j''(s_j^n)\, u_j^{-1}(s_j^n) \prod_{k=j+1}^{n} u_k^{-4}(s_k^n),$$
$$y_n(s_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n)\, y_0(s_0^n),$$

kde $s_i^n = s_i(s_{i+1}^n)$ pre $0 \leqq i < n$ a $s_n^n = s_n$. Ďalej sa aplikuje, na vyššie uvedené, špeciálna voľba funkcií $u_i = \sqrt{s_i}$ (Veta 3). Pomocou hyperbolických a parabolických fáz sa dokazuje (Veta 4), že ak diferenciálna rovnica (q_0) je rýdze, resp. špeciálne diskonjugovaná na intervale I_0, že potom každá diferenciálna rovnica (q_n) uvažovanej postupnosti je taká istá na intervale I_n. V špeciálnom prípade, z Vety 3, pri voľbe hlavnej hyperbolickej, resp. parabolickej fázy $\alpha_0(s_0) = s_0$ dostávame zovšeobecnené Eulerove diferenciálne rovnice. Z práce vyplýva všeobecná metóda na konštruovanie postačujúcich podmienok pre diskonjugovanosť diferenciálnych rovníc pomocou Šturmovej vety a je uvedená (Veta 5) postačujúca podmienka pre diskonjugovanosť diferenciálnych rovníc, ktorá je modifikovaným zovšeobecnením Kneserovho a Bellmanovho kritéria.

Summary

A SEQUENCE OF PURELY AND SPECIALLY DISCONJUGATE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

JAROSLAV KRBIĽA

We study a sequence $\{(q_n)\}_{n=0}^{\infty}$ of differential equations

$$y_n'' + q_n(s_n)\, y_n = 0, \qquad ' = d/ds_n, \tag{q_n}$$

$q_n \in C_0(I_n)$, $I_n = (a_n, b_n)$, constructed by means of functions u_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, such that $u_i \in C_2(I_i)$, $I_i = (a_i, b_i)$, $u_i > 0$ for all $s_i \in I_i$,

$$s_{i-1} = a_{i-1} + \int_{a_i}^{s_i} u_i^{-2}(t)\, dt, \qquad \int_{a_i}^{b_i} u_i^{-2}(t)\, dt = b_{i-1} - a_{i-1}.$$

We prove (Theorem 1) that the carriers and the solutions of the two consecutive terms of the sequence satisfy

$$q_{i+1}(s_{i+1}) = q_i[s_i(s_{i+1})]\, u_{i+1}^{-4}(s_{i+1}) - u_{i+1}''(s_{i+1})\, u_{i+1}^{-1}(s_{i+1}), \qquad ' = d/ds_{i+1}$$
$$y_{i+1}(s_{i+1}) = u_{i+1}(s_{i+1})\, y_i(s_i),$$

and for the n-th term we have (Theorem 2)

$$q_n(s_n) = q_0(s_0^n) \prod_{j=1}^{n} u_j^{-4}(s_j^n) - \sum_{j=1}^{n} u_j''(s_j^n)\, u_j^{-1}(s_j^n) \prod_{k=j+1}^{n} u_k^{-4}(s_k^n),$$
$$y_n(s_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j(s_j^n)\, y_0(s_0^n),$$

where $s_i^n = s_i(s_{i+1}^n)$ for $0 \leq i < n$, and $s_n^n = s_n$. Further, the above theory is applied to the special case $u_i = \sqrt{s_i}$ (Theorem 3). Using hyperbolic and parabolic phases we prove (Theorem 4) that if the differential equation (q_0) is purely, resp. specially, disconjugate on the interval I_0, then each differential equation (q_n) of the sequence is purely, resp. specially, disconjugate on the interval I_n. As a special case of Theorem 3, when the principal hyperbolic, resp. parabolic, phase has the form $\alpha_0(s_0) = s_0$, we obtain the generalized Euler differential equations. Our results suggest a general method of constructing sufficient conditions for differential equations to be disconjugate via Sturm theorem. Finally, we give (Theorem 5) a sufficient condition for differential equations to be disconjugate which is a modified generalization of the Kneser's and Bellman's criterions.