Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Jiří Zeman

Eine Bemerkung zur WKB-Methode

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 17 (1978), No. 1, 61--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120068`

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1978

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

1978 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 57

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci

Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

EINE BEMERKUNG ZUR WKB-METHODE

JIŘÍ ZEMAN

(*Eingelangt am 15. März 1977*)

Das Wesentliche der klassischen Methode WKB liegt in folgendem: es liege eine Differentialgleichung

$$y'' - [\lambda^2 f(x) + g(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

vor, wo die Funktionen $f \neq 0$, g Ableitungen beliebiger Ordnung im Intervall R besitzen und λ einen Parameter darstellt. Die Transformation

$$y = \exp\,[\lambda \int u(x)\,\mathrm{d}x]$$

überführt die Gleichung (1) in die Riccatische Differentialgleichung

$$\lambda u' + \lambda^2 u^2 - (\lambda^2 f + g) = 0. \tag{2}$$

Lösen wir diese Gleichung formell durch die Reihe der Form

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\, \lambda^{-n}. \tag{3}$$

Setzen wir die Reihe (3) in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir für die Koeffizienten $u_n(x)$ der Reihe (3) folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} u_0 &= \varepsilon f^{1/2}, \qquad \varepsilon = \pm 1,\\ u_1 &= -(2u_0)^{-1}\, u_0',\\ u_2 &= -(2u_0)^{-1}\,(u_1' + u_1^2 - g),\\ u_{n+1} &= -(2u_0)^{-1}\,(u_n' + \sum_{p=1}^{n} u_p u_{n+1-p}) \qquad \text{für } n \geqq 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Die letzte Bedingung (4) lässt sich durch die folgenden Bedingungen ersetzen:

$$\begin{aligned} u_{2l-1} &= -(2u_0)^{-1}\,(u'_{2(l-1)} + 2u_1 u_{2(l-1)} + 2u_2 u_{2l-3} + \ldots + 2u_{l-1}u_l),\\ u_{2l} &= -(2u_0)^{-1}\,(u'_{2l-1} + 2u_1 u_{2l-1} + 2u_2 u_{2(l-1)} + \ldots + 2u_{l-1}u_{l+1} + u_l^2) \end{aligned} \tag{4'}$$

für $l \geqq 2$.

Auf Veranlassung des Herrn Prof. Dr. M. Laitoch betrachtete ich folgende Probleme: welche Bedingungen haben die Funktionen f und g in der Differentialgleichung (1) zu erfüllen, damit

1° die Reihe (3) eine endliche Zahl von Gliedern besitze

2° irgendeiner von den Koeffizienten u_n der Reihe (3) verschwinde.

Die Zielsetzung dieser Arbeit ist die Lösung gegebener Probleme. Satz 1 bringt die Lösung vom Problem 1° und Satz 2 die Lösung vom Problem 2° für $n \leqq 5$.

Satz 1. Im Intervall R seien die Funktionen $f \neq 0, g$ in der Differentialgleichung (1) mit Ableitungen beliebiger Ordnung gegeben und u_n möge für $n = 0, 1, 2, \ldots$ den Koeffizienten der formalen Reihe (3) bezeichnen.

a) Ist $u_3 \equiv 0$ in R, dann $u_n \equiv 0$ in R für jede ungerade Zahl $n \geqq 3$.

b) Ist $u_2 \equiv 0$ in R, dann $u_n \equiv 0$ in R für jedes $n \geqq 2$.

c) Die Reihe (3) besitzt eine endliche Zahl von Gliedern genau dann, wenn $u_n \equiv 0$ in R für $n \geqq 2$.

Beweis:

a) Es sei $u_3 \equiv 0$ in R. Dann nach (4)

$$u_4 = -(2u_0)^{-1} u_2^2,$$

$$u_5 = -(2u_0)^{-1}(u_4' + 2u_1u_4) = -(2u_0)^{-1}\{[-(2u_0)^{-1} u_2^2]' + 2u_1[-(2u_0)^{-1} u_2^2]\} = = -u_2u_3u_0^{-1},$$

was besagt, dass $u_5 \equiv 0$ in R.

Es folge nun aus der Bedingung $u_3 \equiv 0$ in R, dass $u_5 \equiv 0, u_7 \equiv 0, \ldots, u_{2l-1} = 0$ in R für ein gewisses $l > 2$. Dann nach (4')

$$u_{2l} = -(2u_0)^{-1} \sum_{j=1}^{l-1} u_{2j}u_{2(l-1)} \tag{5}$$

und weiter

$$u_{2l+1} = -(2u_0)^{-1}(u_{2l}' + 2u_1u_{2l}). \tag{6}$$

Setzen wir die Beziehungen aus (5) in (6) ein, so erhalten wir

$$u_{2l+1} = (2u_0)^{-1} \sum_{j=1}^{l-1} u_{2j}(u_{2(l-j)}' + 2u_1u_{2(l-j)}). \tag{7}$$

Die Ausdrücke $u_{2(l-1)}' + 2u_1u_{2(l-j)}$ für $j = 1, 2, \ldots, l-1$ in (7) stellen bis auf den Faktor $-(2u_0)^{-1}$ die Koeffizienten $u_{2l-1}, u_{2l-3}, \ldots, u_3$ der Reihe (3) dar, worin die Glieder identisch Null in R nicht geschrieben sind. Diese Koeffizienten sind jedoch identisch Null in R und mithin es folgt aus (7), dass $u_{2l+1} = 0$ in R.

b) Es sei $u_2 \equiv 0$ in R. Dann nach (4)

$$u_3 = -(2u_0)^{-1}(u_2' + 2u_1u_2) \equiv 0$$

in R.

Es folge nun aus der Bedingung $u_2 \equiv 0$ in R, dass $u_j \equiv 0$ in R für $2 < j \leqq n$. Dann nach (4)

$$u_{n+1} = -(2u_0)^{-1} (u'_n + \sum_{p=1}^{n} u_p u_{n+1-p}) \equiv 0$$

in R, denn jeder Summand in der Klammer mindestens einen Faktor enthält, der identisch Null in R ist.

c) Ist $u_n \equiv 0$ in R für $n \geqq 2$, dann besitzt die Reihe (3) eine endliche Zahl von Gliedern.

Es gelte umgekehrt für ein gewisses $l \geqq 2$

$$u_{l+1} \equiv 0, u_{l+2} \equiv 0, u_{l+3} \equiv 0, \ldots \tag{8}$$

in R. Dann nach (4′) gilt

$$u_{2l} = -(2u_0)^{-1} (u'_{2l-1} + 2u_1 u_{2l-1} + \ldots + 2u_{l-1} u_{l+1} + u_l^2).$$

Hiervon als Folgerung von (8) ergibt sich, dass gleichfalls $u_l \equiv 0$ in R.

Ist $u_3 \equiv 0$, $u_4 \equiv 0$, $u_5 \equiv 0, \ldots$ in R, dann gleichfalls $u_2 \equiv 0$ in R, denn nach (4)

$$u_4 = -(2u_0)^{-1} (u'_3 + 2u_1 u_3 + u_2^2)$$

ist.

Satz 2. Der Koeffizient u_n der Reihe (3) ist identisch Null im Intervall R für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ genau dann, wenn $I_n(x) \equiv 0$ in R, wo

$$I_1 = f', \tag{6}$$

$$I_2 = 4ff'' - 5f'^2 + 16gf^2, \tag{10}$$

$$I_3 = 4f^2f''' - 18ff'f'' + 15f'^3 - 16gf^2f' + 16g'f^3, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} I_4 = {} & 64f^3f^{(4)} - 448f^2f'f''' + 1768ff'^2f'' - 304f^2f''^2 - 1105f'^4 - 384gf^3f'' + \\ & + 800gf^2f'^2 - 256g^2f^4 - 640g'f^3f' + 256g''f^4, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} I_5 = {} & 16f^4f^{(5)} - 160f^3f'f^{(4)} + 900f^2f'^2f''' - 272f^3f''f''' - 3390ff'^3f'' + \\ & + 1224f^2f'f''^2 + 1695f'^5 + 864gf^3f'f'' - 960gf^2f'^3 - 128gf^4 + 256g^2f^4f' - \\ & - 256gg'f^5 + 720g'f^3f'^2 - 228g'f^4f'' - 288g''f^4f' + 64g'''f^5. \end{aligned} \tag{13}$$

Beweis: Aus (4) ergibt sich, dass in R

$u_1 \equiv 0$ genau dann, wenn $u'_0 \equiv 0$,

$u_2 \equiv 0$ genau dann, wenn $u'_1 + u_1^2 - g \equiv 0$,

$u_3 \equiv 0$ genau dann, wenn $u'_2 + 2u_1u_2 \equiv 0$,

$u_4 \equiv 0$ genau dann, wenn $u'_3 + 2u_1u_3 + u_2^2 \equiv 0$,

$u_5 \equiv 0$ genau dann, wenn $u'_4 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 \equiv 0$.

Ist

$$u_1 = -(2u_0)^{-1} u'_0, \tag{14}$$

und folglich

$$u_1' = -\frac{1}{2} u_0'' u_0^{-1} + \frac{1}{2} u_0'^2 u_0^{-2}.$$

Dann ergibt sich, dass

$$u_2 = -(2u_0)^{-1}(u_1' + u_1^2 - g) = -(2u_0)^{-1}\left(\frac{3}{4} u_0'^2 u_0^{-2} - \frac{1}{2} u_0'' u_0^{-1} - g\right). \quad (15)$$

Weiter ist

$$u_2' = \frac{1}{4} u_0''' u_0^{-2} - \frac{5}{4} u_0' u_0'' u_0^{-3} + \frac{9}{8} u_0'^3 u_0^{-4} + \frac{1}{2} g' u_0^{-1} - \frac{1}{2} g u_0' u_0^{-2},$$

und demnach

$$u_3 = -(2u_0)^{-1}(u_2' + 2u_1u_2) =$$

$$= -(2u_0)^{-1}\left(\frac{1}{4} u_0''' u_0^{-2} - \frac{3}{2} u_0' u_0'' u_0^{-3} + \frac{3}{2} u_0'^3 u_0^{-4} + \frac{1}{2} g' u_0^{-1} - g u_0' u_0^{-2}\right). \quad (16)$$

Weiter gilt

$$u_3' = -\frac{1}{8} u_0^{(4)} u_0^{-3} + \frac{9}{8} u_0' u_0''' u_0^{-4} - \frac{21}{4} u_0'^2 u_0'' u_0^{-5} + \frac{15}{4} u_0'^4 u_0^{-6} +$$

$$+ \frac{3}{4} u_0''^2 u_0^{-4} - \frac{3}{2} g u_0'^2 u_0^{-4} + \frac{1}{2} g u_0'' u_0^{-3} + g' u_0' u_0^{-3} - \frac{1}{4} g'' u_0^{-2}$$

und somit

$$u_4 = -(2u_0)^{-1}(u_3' + 2u_1u_3 + u_2^2) =$$

$$= -(2u_0)^{-1}\left(-\frac{1}{8} u_0^{(4)} u_0^{-3} + \frac{5}{4} u_0' u_0''' u_0^{-4} - \frac{99}{16} u_0'^2 u_0'' u_0^{-5} + \right.$$

$$+ \frac{297}{64} u_0'^4 u_0^{-6} + \frac{13}{16} u_0''^2 u_0^{-4} - \frac{19}{8} g u_0'^2 u_0^{-4} + \frac{3}{4} g u_0'' u_0^{-3} +$$

$$\left. + \frac{1}{4} g^2 u_0^{-2} + \frac{5}{4} g' u_0' u_0^{-3} - \frac{1}{4} g'' u_0^{-2}\right). \quad (17)$$

Schliesslich

$$u_4' = \frac{1}{16} u_0^{(5)} u_0^{-4} - \frac{7}{8} u_0' u_0^{(4)} u_0^{-5} + \frac{199}{32} u_0'^2 u_0''' u_0^{-6} - \frac{23}{16} u_0'' u_0''' u_0^{-5} -$$

$$- \frac{891}{32} u_0'^3 u_0'' u_0^{-7} + \frac{263}{32} u_0' u_0''^2 u_0^{-6} + \frac{2079}{128} u_0'^5 u_0^{-8} - \frac{95}{16} g u_0'^3 u_0^{-6} +$$

$$+ \frac{31}{8} g u_0' u_0'' u_0^{-5} - \frac{3}{8} g u_0''' u_0^{-4} + \frac{3}{8} g^2 u_0' u_0^{-4} - \frac{1}{4} g g' u_0^{-3} +$$

$$+ \frac{59}{16} g' u_0'^2 u_0^{-5} - g' u_0'' u_0^{-4} - g'' u_0' u_0^{-4} + \frac{1}{8} g''' u_0^{-3},$$

und gleichzeitig

$$u_5 = -(2u_0)^{-1}(u_4' + 2u_1u_4 + 2u_2u_3) =$$

$$= -(2u_0)^{-1}\Bigl(\frac{1}{16}u_0^{(5)}u_0^{-4} - \frac{15}{16}u_0'u_0^{(4)}u_0^{-5} + \frac{111}{16}u_0'^2u_0'''u_0^{-6} -$$

$$-\frac{3}{2}u_0''u_0'''u_0^{-5} - \frac{255}{8}u_0'^3u_0''u_0^{-7} + 9u_0'u_0''^2u_0^{-6} + \frac{153}{8}u_0'^5u_0^{-8} -$$

$$-\frac{33}{4}gu_0'^3u_0^{-6} + \frac{21}{4}gu_0'u_0''u_0^{-5} - \frac{1}{2}gu_0'''u_0^{-4} + g^2u_0'u_0^{-4} - \frac{1}{2}gg'u_0^{-3} +$$

$$+\frac{9}{2}g'u_0'^2u_0^{-5} - \frac{9}{8}g'u_0''u_0^{-4} - \frac{9}{8}g''u_0'u_0^{-4} + \frac{1}{8}g'''u_0^{-3}\Bigr). \tag{18}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \varepsilon f^{1/2},\\
u_0' &= \frac{\varepsilon}{2}f^{-1/2}f',\\
u_0'' &= \frac{\varepsilon}{4}f^{-3/2}(2ff'' - f'^2),\\
u_0''' &= \frac{\varepsilon}{8}f^{-5/2}(4f^2f''' - 6ff'f'' + 3f'^3),\\
u_0^{(4)} &= \frac{\varepsilon}{16}f^{-7/2}(8f^3f^{(4)} - 16f^2f'f''' + 36ff'^2f'' - 12f^2f''^2 - 15f'^4), \qquad (19)\\
u_0^{(5)} &= \frac{\varepsilon}{32}f^{-9/2}(16f^4f^{(5)} - 40f^3f'f^{(4)} + 120f^2f'^2f''' - 80f^3f''f''' -\\
&\quad - 300ff'^3f'' + 180f^2f'f''^2 + 105f'^5).
\end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes erhalten wir durch Einsetzen von (19) in (14)–(18).

Satz 3. In R gelten die Formeln $\left(' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$:

$$I_3 \equiv fI_2' - 3I_1I_2, \tag{20}$$

$$I_4 \equiv 16fI_3' - 72I_1I_3 - I_2^2, \tag{21}$$

$$4I_5 \equiv fI_4' - 6I_1I_4 - 2I_2I_3. \tag{22}$$

Beweis: Die Formeln (20)–(22) werden durch Anwendung der Definition I_n mittels den Formeln (9)–(13) direkt verifiziert.

Bemerkungen:

1° Es sei $u_3 \equiv 0$ in R. Dann auch $I_3 \equiv 0$ in R und aus (20) folgt, dass in diesem Falle $fI_2' - 3I_1I_2 \equiv 0$ in R ist. Hieraus erhalten wir, dass $I_2 \equiv Cf^3$, d. h.

$$4ff'' - 5f'^2 + 16f^2g \equiv Cf^3 \tag{10'}$$

in R, wo C eine beliebige Konstante darstellt. Es braucht also $I_2 \equiv 0$, d. h. $u_2 \equiv 0$ in R nicht zu sein.

2° Wählen wir eine der Funktionen f, g in der Differentialgleichung (1) fest, dann ist es möglich die zweite von ihnen so festzustellen, damit ein gewisser Koeffizient u_n der Reihe (3) identisch Null in R wäre. Dazu ist es notwendig und genügend, dass diese Funktion eine Lösung der Differentialgleichung $I_n(x) = 0$ im Intervall R ist, wo I_n (für $n \leqq 5$) durch die Formeln (9)–(13) gegeben wird. Dabei, wenn in R die Funktion f festgewählt wird, so ist bei demselben n die entsprechende Differentialgleichung einer niedrigeren Ordnung als im zweiten Falle.

Fall $g(x) \equiv 0$ *in* R. Aus Satz 2 ergibt sich, dass $u_2 \equiv 0$ in R genau dann, wenn die Funktion f in R der Differentialgleichung

$$4zz'' - 5z'^2 = 0, \tag{23}$$

die im [3] untersucht wied, entspircht. Alle (nichttrivialen) Lösungen dieser Gleichung lassen sich durch die Formel

$$z = \varepsilon(ax + b)^{-4}$$

erklären, wo a, $b(a^2 + b^2 > 0)$ beliebige Konstanten sind und $\varepsilon = \pm 1$ ([2], 6.162).

Weiter $u_3 \equiv 0$ in R genau dann, wenn die Funktion f in R der Differentialgleichung

$$4z^2z''' - 18zz'z'' + 15z'^3 = 0 \tag{24}$$

entspricht. Ist $u_2 \equiv 0$, dann nach Satz 1 auch $u_3 \equiv 0$ in R ist. In Bemerkung 1° wird gezeigt, dass die umgekehrte Behauptung nicht gilt. Man kann daher erwarten, dass die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung (23) eine Untermenge in der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung (24) ist. Tatsächlich, alle Lösungen der Differentialgleichung (24) lassen sich durch die Formel

$$z = \varepsilon(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^{-2}$$

erklären, wo α, β, $\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0)$ beliebige Konstanten sind ([2], 7.8). Also nur die von den Lösungen der Differentialgleichungen (24), für welche der Ausdruck in der Klammer ein Quadrat, d. h. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (ax + b)^2$ ist, bilden gleichzeitig die Lösungen der Differentialgleichung (23).

Jede Differentialgleichung der Form

$$y'' - \lambda^2 f(x)\, y = 0 \tag{1'}$$

mit solcher Eigenschaft, dass die Koeffizienten der Reihe (3) für $n \geqq 2$ identisch Null im Intervall $R = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$, resp. $R = \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$ sind, ist eine Differentialgleichung mit der Funktion

$$f(x) = \varepsilon(ax + b)^{-4},$$

falls $a \neq 0$. Ist $a = 0$, dann $f(x) \equiv C$ im Intervall $R = (-\infty, +\infty)$. In diesem Falle sogar $u_n \equiv 0$ in R für $n \geqq 1$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Cesari L.: *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations.* Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959. (Russian translation 1964.)

[2] Kamke E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen.* Leipzig, 1959. (Russische Übersetzung 1965.)

[3] Zeman J.: *Über eine Anwendung der Phasentheorie.* Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 53, 1977.

SOUHRN

POZNÁMKA K METODĚ WKB

JIŘÍ ZEMAN

V práci je studována diferenciální rovnice

$$y'' - [\lambda^2 f(x) + g(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

v intervalu R, která transformací $y = \exp[\lambda \int u(x)\, dx]$ přechází v Riccatiho rovnici

$$\lambda u' + \lambda^2 u^2 + (\lambda^2 f + g) = 0. \tag{2}$$

Rovnici (2) řešíme formálně řadou

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\, \lambda^{-n} \tag{3}$$

podle záporných mocnin parametru λ.

Jsou řešeny následující problémy: jaké podmínky musí splňovat funkce f a g v rovnici (1), aby

1° řada (3) měla konečný počet členů

2° vymizel identicky v R jistý koeficient u_n řady (3).

Věta 1 podává řešení problému 1° a věta 2 řešení problému 2° pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

РЕЗЮМЕ

ЗАМЕЧАНИЕ К МЕТОДУ ВКБ

ИРЖИ ЗЕМАН

В работе изучается дифференциальное уравнение

$$y'' - [\lambda^2 f(x) + g(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

в промежутке R, которое преобразование $y = \exp[\lambda \int u(x)\,\mathrm{d}x]$ переводит в уравнение Риккати

$$\lambda u' + \lambda^2 u^2 + (\lambda^2 f + g) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) может быть формально решено при помощи ряда вида

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,\lambda^{-n} \qquad (3)$$

по отрицательным степеням параметра λ.

Решены следующие проблемы: каким условиям должны удовлетворять функции f и g в уравнении (1), чтобы

1° ряд (3) обладал конечным числом членов

2° некоторый из коэффицентов u_n ряда (3) был в R тождественно равным нулю.

В теореме 1 дается решение проблемы 1° и в теореме 2 решение проблемы 2° для $n = 1, 2, 3, 4, 5$.