Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Lenka Poncová

Группы с мультиоператорами

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 16 (1977), No. 1, 29--53

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120050`

1977 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 53

Katedra metodiky matematiky a elementární matematiky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. Paed. Dr. Miloslav Zedek

ГРУППЫ С МУЛЬТИОПЕРАТОРАМИ

ЛЕНКА ПОНЦОВА

(*Поступило в редакцию 31. 3. 1976*)

Введение

Настоящая статья посвящена теории групп с мультиоператорами. В основу этой статьи положены работы [1], [3], [4], [7], указанные в списке литературы. Результаты статьи [7] здесь применены для групп с мультиоператорами. Также, как и в статье [7] теория построена на основании разбиений в множествах. В качестве результата статьи получаются три теоремы об изоморфизме Ω-групп, теорема о пяти Ω-группах, теоремы Цассенхауза, Шрейера и Жордана-Гельдера.

Система ссылок в статье достаточно ясна, определения обозначены символом **D**, теоремы символом **V**.

Содержание статьи не претендует на исчерпывающий характер.

Основой для этой статьи служила работа на получение докторской степени автора, которая была разработана под научным руководством товарища prof. Dr. L. Sedláčka CSc., которому автор приносит искренную благодаренность за это руководство и за сделаную им рецензию.

1. Основные понятия

D.1.1. Пусть $\mathscr{G}$ — Ω-группоид, аддитивный группоид которого является группой, пусть 0-нулевой элемент этой группы и пусть для всякой n-арной операции ω из Ω в силе

$$\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ раз}}\omega = 0. \tag{1.1.}$$

Тогда говорим, что $\mathscr{G}$ есть группа с множеством мультиоператоров Ω или Ω-группа. Обозначаем ее символом $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. Множество G называем полем Ω-группы $\mathscr{G}$, элемент 0, нулевым элементом Ω-группы $\mathscr{G}$.

Замечание. Группа $\mathscr{G}$ из D.1.1. называется аддитивной группой Ω-группы $\mathscr{G}$.

D.1.2. Пусть A — непустое подмножество Ω-группы $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. Если A является полем Ω-группы $\mathscr{A}$ с тем же множеством мультиоператоров Ω, то говорим, что A является полем Ω-подгруппы $\mathscr{A} = \langle A, +, \Omega \rangle$ Ω-группы $\mathscr{G}$.

V.1.1. Пусть A — непустое подмножество в Ω-группе $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. A является полем Ω-подгруппы в $\mathscr{G}$ тогда и только тогда, когда в силе:

a) если a_h, a_k два любых элемента из A, то элемент $a_h - a_k$ является элементом в A,

b) для $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ и для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$ в силе $A_1 A_2 \ldots A_n \omega \subset A$.

Доказательство. Условие a) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы подмножество A являлось полем подгруппы аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$. Элемент $0 \in A$. Условие b) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы элементы из A вместе с системой операций Ω образовали универсальную алгебру ([3] V.1/1). Так как $A \subset \mathscr{G}$ и $0 \in A$, то для всякой n-арной операции ω из Ω выполняется равенство $\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ раз}} \omega = 0$.

V.1.2. Пусть I — множество индексов, пусть $\mathscr{A}_i$ для $i \in I$ — Ω-подгруппы Ω-группы $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. Тогда пересечение $P = \bigcap_{i \in I} A_i$ их полей является полем Ω-подгруппы $\mathscr{P}$ в $\mathscr{G}$.
Доказательство очевидно.

V.1.3. Аддитивная группа Ω-подгруппы $\mathscr{A}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ является подгруппой аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$.
Доказательство очевидно.

D.1.3. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ — Ω-группа, пусть A — непустое подмножество в $\mathscr{G}$. Говорим, что A — поле идеала $\mathscr{A} = \langle A, +, \Omega \rangle$ в $\mathscr{G}$, если в силе:

a) A является полем инвариантной подгруппы в аддитивной группе Ω-группы $\mathscr{G}$,

b) для всякой n-членной последовательности элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из $\mathscr{G}$, всякой n-арной операции ω из Ω и всякого элемента a из A, при $i = 1, 2, \ldots, n$, справедливо, что

$$x_1 x_2 \ldots x_{i-1}(a + x_i)\, x_{i+1} \ldots x_n \omega \in x_1 x_2 \ldots x_n \omega + A. \tag{1.2.}$$

Замечание. Условие (1.2.) равносильно следующему условию: для всякого элемента $a \in A$, для всякой n-членной последовательности элементов $x_1, x_2,$

..., x_n из $\mathscr{G}$ и всякой n-арной операции ω из Ω существует в A элемент a' удовлетворяющий при $i = 1, 2, ..., n$ равенству $x_1 x_2 \ldots x_{i-1}(a + x_i)\, x_{i+1} \ldots x_n\omega = x_1 x_2 \ldots x_n\omega + a'$.

V.1.4. Пусть $\mathscr{A} = \langle A, +, \Omega\rangle$ — идеал Ω-группы $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$. Пусть ω — любая n-арная операция из Ω, $x_1, x_2, ..., x_n$ — любая n-членная последовательность элементов из $\mathscr{G}$, $a_1, a_2, ..., a_n$ — элементы из A. Тогда справедливо:

$$(a_1 + x_1)(a_2 + x_2) \ldots (a_n + x_n)\, \omega \in x_1 x_2 \ldots x_n \omega + A. \tag{1.3.}$$

Доказательство очевидно.

V.1.5. Каждый идеал $\mathscr{A}$ Ω-группы $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ является Ω-подгруппой в $\mathscr{G}$.

Доказательство. Множество A является полем инвариантной подгруппы в аддитивной группе Ω-группы $\mathscr{G}$ и поэтому содержит в качестве элемента нулевой элемент 0 Ω-группы $\mathscr{G}$. Принимая во внимание соотношение (1.3.) получим для всякой n-членной последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$ элементов из $\mathscr{A}$, для любой n-арной операции ω из Ω и для элементов $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, что $(a_1 + 0)(a_2 + 0) \ldots (a_n + 0)\, \omega \in 00 \ldots 0\, \omega + A$. Отсюда следует, что $a_1 a_2 \ldots a_n\, \omega \in 0 + A \subset A$, что и заканчивает доказательство.

V.1.6. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ — Ω-группа, 0 — нулевой элемент в $\mathscr{G}$. Тогда множества $\{0\}$ и G являются полями идеалов Ω-группы $\mathscr{G}$.

Доказательство. Множества $\{0\}$ и G являются полями инвариантных подгрупп в аддитивной группе Ω-группы $\mathscr{G}$. Далее справедливо, для всякой n-членной последовательности элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ из G и для всякой n-арной операции ω из Ω, во-первых равенство

$$x_1 x_2 \ldots x_{i-1}(0 + x_i)\, x_{i+1} \ldots x_n\omega = x_1 x_2 \ldots x_n\omega = x_1 x_2 \ldots x_n\omega + \{0\},$$

во-вторых следующее утверждение: элемент $a + x_i$ является для всякого a из G также элементом из G и поэтому при $i = 1,2,..., n$ в силе, что

$$x_1 x_2 \ldots x_{i-1}(a + x_i)\, x_{i+1} \ldots x_n\omega \in G \subset x_1 x_2 \ldots x_n\omega + G.$$

Последний результат ввиду D.1.3. доказывает теорему.

V.1.7. Если множества A и B являются полями идеалов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$, то множества $A \cap B$ и $A + B$ будут также полями идеалов в Ω-группе $\mathscr{G}$.

Доказательство. Множества A и B являются полями инвариантных подгрупп аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$. Следовательно также множества $A \cap B$ и $A + B$ являются полями инвариантных подгрупп Ω-группы $\mathscr{G}$. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — любая последовательность элементов из $\mathscr{G}$, пусть ω — любая n-арная операция из Ω, пусть $p \in A \cap B$. $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — идеалы в $\mathscr{G}$ и поэтому будет $-\ x_1x_2 \dots x_n\omega + x_1x_2 \dots x_{i-1}(p + x_i)\, x_{i+1} \dots x_n\omega \in A$ и современно $- x_1x_2 \dots x_n\omega + x_1x_2 \dots x_{i-1}(p + x_i)\, x_{i+1} \dots x_n\omega \in B$, т. е. при $i = 1, 2, \dots, n$ справедливо, что $- x_1x_2 \dots x_n\omega + x_1x_2 \dots x_{i-1}(p + x_i)\, x_{i+1} \dots x_n\omega \in A \cap B$ и ввиду того $A \cap B$ будет полем идеала в $\mathscr{G}$. Предположим теперь, что $s \in A + B$, т. е. $s = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Тогда в силу [1] 12.9.8. будет

$$\begin{aligned} & x_1x_2 \dots x_{i-1}(s + x_i)\, x_{i+1} \dots x_n\omega = \\ & = x_1x_2 \dots x_{i-1}[(a + b) + x_i]\, x_{i+1} \dots x_n\omega = \\ & = x_1x_2 \dots x_{i-1}[a + (b + x_i)]\, x_{i+1} \dots x_n\omega \in \\ & \in x_1x_2 \dots x_{i-1}(b + x_i)\, x_{i+1} \dots x_n\omega + A \subset (x_1x_2 \dots x_n\omega + B) + A = \\ & = x_1x_2 \dots x_n\omega + (B + A) = x_1x_2 \dots x_n\omega + (A + B) \end{aligned}$$

при $i = 1, 2, \dots, n$. Это значит, что $A + B$ является полем идеала в $\mathscr{G}$.

D.1.4. Пусть $\mathscr{A} = \langle A, +, \Omega\rangle$, $\mathscr{B} = \langle B, +, \Omega\rangle$ — идеалы в Ω-группе $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$. Идеал, полем которого есть множество $A + B$, назовем суммой идеалов $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и обозначим символом $\mathscr{A} + \mathscr{B} = \langle A + B, +, \Omega\rangle$, идеал, полем которого есть множество $A \cap B$, назовем пересечением идеалов $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и обозначим символом $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \langle A \cap B, +, \Omega\rangle$.

Замечание. Теорему V.1.7. можно обобщить для конечного числа идеалов Ω-группы $\mathscr{G}$.

V.1.8. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ — Ω-подгруппы Ω-группы $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{B}$ — идеал в $\mathscr{G}$. Тогда $\mathscr{B}$ есть идеал в $\mathscr{A}$.
Доказательство очевидно.

V.1.9. Пусть $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Пусть $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{B}$. Тогда подгруппа $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ является Ω-подгруппой в $\mathscr{G}$.

Доказательство. По предположениям теоремы и ввиду [1] 24.5.1. очевидно, что $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ является подгруппой в аддитивной группе Ω-группы $\mathscr{G}$ и справедливо

$$(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A} = \mathscr{A} + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B}). \tag{1.4.}$$

В силу V.1.2. $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ будет Ω-подгруппой в $\mathscr{G}$. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_n$ — элементы из $\mathscr{B}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — элементы из $\mathscr{A}$, ω — любая n-арная операция из Ω. Тогда ввиду V.1.4. справедливо:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)\, \omega \in b_1b_2 \dots b_n\omega + A, \tag{1.5.}$$

где A — поле Ω-группы $\mathscr{A}$. Пусть $p_1 + a_1$, $p_2 + a_2, \dots, p_n + a_n$ — любаяя n-членная последовательность элементов из $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$, где $p_i \in \mathscr{C} \cap \mathscr{B}$, $a_i \in \mathscr{A}$ при $i = 1, 2, \dots, n$, пусть ω — любая n-арная операция из Ω. Ввиду (1.4.)

можно выделить элементы $p'_i \in \mathscr{C} \cap \mathscr{B}$, т. е. $p'_i \in \mathscr{B}$ и элементы $a'_i \in \mathscr{A}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ так, что $p_i + a_i = a'_i + p'_i$. Ввиду того есть

$$(p_1 + a_1)(p_2 + a_2) \ldots (p_n + a_n)\,\omega =$$
$$= (a'_1 + p'_1)(a'_2 + p'_2) \ldots (a'_n + p'_n)\,\omega \in p'_1 p'_2 \ldots p'_n\omega + A, \qquad (1.6.)$$

причем $p = p'_1 p'_2 \ldots p'_n\omega \in \mathscr{C} \cap \mathscr{B}$. Таким образом существует элемент $a \in \mathscr{A}$ такой, что элемент $p + a \in (\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ удовлетворяет соотношению

$$(p_1 + a_1)(p_2 + a_2) \ldots (p_n + a_n)\,\omega = p + a. \qquad (1.7.)$$

Для нулевого элемента 0 Ω-группы $\mathscr{G}$ и для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$ справедливо: $\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ раз}}\,\omega = 0$. Ввиду того, что $0 \in (\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ и в силу (1.7.) является подгруппа $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$, Ω-группой, что и требовалось доказать.

2. Ω-фактор-группы

V.2.1. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ — Ω-группа и пусть $\mathscr{A}$ — подгруппа аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$. Левосторонее разложение в смежные классы $\mathscr{G}/_l\mathscr{A}$ аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ по подгруппе $\mathscr{A}$ совпадает с ее правосторонним разложением и является образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{G}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \langle A, +, \Omega \rangle$ — идеал в $\mathscr{G}$. Ввиду D.1.3. $\mathscr{A}$ является инвариантной подгруппой аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$, поэтому $\mathscr{G}/_l\mathscr{A} = \mathscr{G}/_p\mathscr{A} = \mathscr{G}/\mathscr{A}$. Пусть $\mathscr{A} + x_1$, $\mathscr{A} + x_2$ — элементы из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, $x_1, x_2 \in \mathscr{G}$. Пусть $y \in (\mathscr{A} + x_1) + (\mathscr{A} + x_2)$. Тогда существуют элементы $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$ удовлетворяющие соотношению вида $y = (a_1 + x_1) + (a_2 + x_2)$. Далее, по предположениям, существуют элементы $a_3 \in \mathscr{A}$ и $x_3 \in \mathscr{G}$, удовлетворяющие равенству $x_1 + a_2 = a_3 + x_3$. Следовательно

$$y = (a_1 + x_1) + (a_2 + x_2) = a_1 + (x_1 + a_2) + x_2 =$$
$$= a_1 + (a_3 + x_3) + x_2 = (a_1 + a_3) + (x_3 + x_2),$$

где $a_1 + a_3 \in \mathscr{A}$, $x_3 + x_2 = x \in \mathscr{G}$, т. е. $y \in \mathscr{A} + x$.
В силу того

$$(\mathscr{A} + x_1) + (\mathscr{A} + x_2) \subset \mathscr{A} + x. \qquad (2.1.)$$

Пусть $\mathscr{A} + x_1, \mathscr{A} + x_2, \ldots, \mathscr{A} + x_n$ — n-членная последовательность элементов из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, пусть ω — любая n-арная операция из Ω. Пусть

$$y \in (\mathscr{A} + x_1)(\mathscr{A} + x_2) \ldots (\mathscr{A} + x_n)\,\omega,$$

т. е. $y = (a_1 + x_1)(a_2 + x_2) \dots (a_n + x_n)\,\omega$, $a_i \in \mathscr{A}$, $x_i \in \mathscr{G}$ при $i = 1, 2, \dots, n$. $\mathscr{A}$ является идеалом в $\mathscr{G}$ и поэтому справедливо:

$$y = (a_1 + x_1)(a_2 + x_2) \dots (a_n + x_n)\,\omega \in x_1 x_2 \dots x_n \omega + \mathscr{A} = \\ = \mathscr{A} + x_1 x_2 \dots x_n \omega, \; x_1 x_2 \dots x_n \omega \in \mathscr{G}.$$

В силу того

$$(\mathscr{A} + x_1)(\mathscr{A} + x_2) \dots (\mathscr{A} + x_n)\,\omega \subset \mathscr{A} + x_1 x_2 \dots x_n \omega \in \mathscr{G}/\mathscr{A} \tag{2.2.}$$

Наконец из соотношений (2.1.) и (2.2.) вытекает, что разложение $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ является образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{G}$.

С другой стороны, если $\mathscr{G}/_l\mathscr{A}$ — образующее разбиение Ω-группы $\mathscr{G}$, то нулевой элемент $0 \in \mathscr{G}$ принадлежит множеству A. Если далее x_1, x_2 — элементы из $\mathscr{G}$, то в $\mathscr{G}$ содержится элемент r, удовлетворяющий соотношению вида $(x_1 + \mathscr{A}) + (x_2 + \mathscr{A}) \subset r + \mathscr{A}$. Рассмотрим элемент $x_1 + x_2 = (x_1 + x_2) + 0 \in (x_1 + x_2) + \mathscr{A}$. Справедливо, что $x_1 = x_1 + 0 \in x_1 + \mathscr{A}$, т. е. $x_1 + (x_2 + \mathscr{A}) \subset r + \mathscr{A}$, $x_2 = x_2 + 0 \in x_2 + \mathscr{A}$ и ввиду того $x_1 + x_2 = x_1 + (x_2 + 0) \in r + \mathscr{A}$. Принимая во внимание свойства смежных классов разложения $\mathscr{G}/_l\mathscr{A}$, получаем $(x_1 + x_2) + \mathscr{A} = r + \mathscr{A}$ и в силу того

$$(x_1 + \mathscr{A}) + (x_2 + \mathscr{A}) \subset (x_1 + x_2) + \mathscr{A}. \tag{2.3.}$$

Если $x \in (x_1 + x_2) + \mathscr{A}$, то в $\mathscr{A}$ содержится элемент a удовлетворяющий соотношению $x = (x_1 + x_2) + a = x_1 + (x_2 + a) = (x_1 + 0) + (x_2 + a) \in (x_1 + \mathscr{A}) + (x_2 + \mathscr{A})$ и следовательно

$$(x_1 + x_2) + \mathscr{A} \subset (x_1 + \mathscr{A}) + (x_2 + \mathscr{A}). \tag{2.4.}$$

Из соотношений (2.3.) и (2.4.) вытекает, что

$$(x_1 + \mathscr{A}) + (x_2 + \mathscr{A}) = (x_1 + x_2) + \mathscr{A}. \tag{2.5.}$$

Ввиду того будет $(x + \mathscr{A}) + (-x + \mathscr{A}) = (x - x) + \mathscr{A} = \mathscr{A}$ и поэтому $x + \mathscr{A} - x = (x + \mathscr{A}) + (-x + 0) \subset (x + \mathscr{A}) + (-x + \mathscr{A}) = \mathscr{A}$, т. е.

$$x + \mathscr{A} - x \subset \mathscr{A}. \tag{2.6.}$$

Аналогично получается, что

$$-x + \mathscr{A} + x \subset \mathscr{A}. \tag{2.7.}$$

Далее в силе

$$\mathscr{A} = (x - x) + \mathscr{A} + (x - x) = x + (-x + \mathscr{A} + x) + (-x) \subset x + \mathscr{A} - x. \tag{2.8.}$$

Принимая во внимание (2.6.) и (2.8.) можно утверждать, что $x + \mathscr{A} - x = \mathscr{A}$, т. е.

$$x + \mathscr{A} = \mathscr{A} + x \tag{2.9.}$$

и поэтому $\mathscr{A}$ является инвариантной подгруппой аддитивной группы Ω-группы

$\mathscr{G}$. Пусть далее $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любая n-членная последовательность элементов из $\mathscr{G}$. ω — любая n-арная операция из Ω. Тогда, в силу предположений, содержится в $\mathscr{G}$ элемент z, такой, что $(x_1 + \mathscr{A})(x_2 + \mathscr{A}) \ldots (x_n + \mathscr{A})\, \omega \subset z + \mathscr{A}$. Для $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем $x_i = x_i + 0 \in x_i + \mathscr{A}$ и поэтому

$$(x_1 + 0)(x_2 + 0) \ldots (x_n + 0)\, \omega = x_1 x_2 \ldots x_n \omega \in z + \mathscr{A}.$$

Принимая во внимание свойства элементов разбиения, имеем

$$z + \mathscr{A} = x_1 x_2 \ldots x_n \omega + \mathscr{A},$$

т. е.

$$(x_1 + \mathscr{A})(x_2 + \mathscr{A}) \ldots (x_n + \mathscr{A})\, \omega \subset x_1 x_2 \ldots x_n \omega + \mathscr{A}. \tag{2.10.}$$

Так как имеет место (2.9.), то $x_i + \mathscr{A} = \mathscr{A} + x_i$, для $i = 1, 2, \ldots, n$ и $x_i \in \mathscr{G}$, и поэтому

$$(x_1 + \mathscr{A})(x_2 + \mathscr{A}) \ldots (x_n + \mathscr{A})\, \omega = (\mathscr{A} + x_1)(\mathscr{A} + x_2) \ldots (\mathscr{A} + x_n)\, \omega \tag{2.11.}$$

Пусть a — любой элемент из $\mathscr{A}$. Тогда справедливо, что

$$\begin{aligned} &x_1 x_2 \ldots x_{i-1}(a + x_i)\, x_{i+1} \ldots x_n \omega = \\ &= (0 + x_1)(0 + x_2) \ldots (0 + x_{i-1})(a + x_i)(0 + x_{i+1}) \ldots (0 + x_n)\omega \in \\ &\in (\mathscr{A} + x_1)(\mathscr{A} + x_2) \ldots (\mathscr{A} + x_n)\, \omega = \\ &= (x_1 + \mathscr{A})(x_2 + \mathscr{A}) \ldots (x_n + \mathscr{A})\omega \subset x_1 x_2 \ldots x_n \omega + \mathscr{A}. \end{aligned} \tag{2.12.}$$

Таким образом $\mathscr{A}$ является идеалом в Ω-группе $\mathscr{G}$.

D.2.1. Образующее разбиение из теоремы V.2.1. называется разложением Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ или разложением Ω-группы $\mathscr{G}$, образованным идеалом $\mathscr{A}$.

Следствие теоремы V.2.1. Пусть $\mathscr{A}$ — идеал в Ω-группе $\mathscr{G}$. Разложение $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ является полем Ω-фактороида на $\mathscr{G}$, правило сложения которого определим так, что всякой паре элементов $x_h + \mathscr{A}$, $x_k + \mathscr{A}$ из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ поставлен в соответствие в качестве суммы тот элемент из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, в котором содержится множество $(x_h + \mathscr{A}) + (x_k + \mathscr{A})$. Этим элементом ввиду (2.5.) является элемент $(x_h + x_k) + \mathscr{A}$. Пишем, что

$$(x_h + \mathscr{A}) \oplus (x_k + \mathscr{A}) = (x_h + x_k) + \mathscr{A}. \tag{2.13.}$$

После определим множество мультиоператоров $\bar{\Omega}$ так, что каждая n-арная операция $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ всякой n-членной последовательности элементов $x_1 + \mathscr{A}$, $x_2 + \mathscr{A}, \ldots, x_n + \mathscr{A}$ из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ ставит в соответствие тот элемент из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, который удовлетворяет соотношению (2.10.). Записываем это:

$$(x_1 + \mathscr{A})(x_2 + \mathscr{A}) \ldots (x_n + \mathscr{A})\, \bar{\omega} = x_1 x_2 \ldots x_n \omega + \mathscr{A}. \tag{2.14.}$$

V.2.2. Образующими разбиениями Ω-группы $\mathscr{G}$ являются все разложения Ω-группы $\mathscr{G}$, образованные отдельными идеалами в $\mathscr{G}$ и только те разложения.

Доказательство. Всякое образующее разбиение Ω-группы $\mathscr{G}$ является образующим разбиением ее аддитивной группы. Ввиду [1] 24.3.2. все образующие разбиения группы есть разложения группы $\mathscr{G}$ по отдельным инвариантным полгруппам этой группы и других образующих разбиений в группе нет. В силу V.2.1. всякое разложение $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ является образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{G}$.

V.2.3. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ — Ω-группа, пусть $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{G}$. Тогда Ω-фактороид $\bar{\mathscr{G}}$ на $\mathscr{G}$, полем которого является разложение $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ — Ω-группа. Нулевым элементом этой Ω-группы будет поле A идеала $\mathscr{A}$.

Доказательство. Полем Ω-фактороида $\bar{\mathscr{G}}$ является образующее разбиение $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ — Ω-группы $\mathscr{G}$. Элементы этого разбиения есть смежные классы разложения аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ по ее инвариантной подгруппе $\mathscr{A}$. Ввиду [1] 25.1. образуют элементы разложения $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ вместе со сложением, определенным выше, группу, нулевым элементом которой есть поле A инвариантной подгруппы $\mathscr{A}$ и обратным элементом к элементу $x + \mathscr{A}$ — элемент $- x + \mathscr{A}$, т. е. имеет место равенство

$$(x + \mathscr{A}) \oplus (- x + \mathscr{A}) = (x - x) + \mathscr{A} = 0 + \mathscr{A} = A, \qquad (2.15.)$$

причем 0-нулевой элемент Ω-группы $\mathscr{G}$. Ввиду (2.14.) и (2.15.) справедливо, для всякой n-арной операции $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$, равенство

$$\underbrace{AA \ldots A}_{n \text{ раз}}\bar{\omega} = (0 + \mathscr{A})(0 + \mathscr{A}) \ldots (0 + \mathscr{A})\,\omega = \underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ раз}}\omega + \mathscr{A} = 0 + \mathscr{A} = A.$$

В силу D.1.1. Ω-фактороид $\bar{\mathscr{G}} = \langle \mathscr{G}/\mathscr{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ — Ω-группа. Поле A идеала $\mathscr{A}$ является нулевым элементом этой Ω-группы.

D.2.2. Ω-фактороид $\bar{\mathscr{G}}$ Ω-группы $\mathscr{G}$, полем которого есть разложение $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$, называется Ω-фактор-группой Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$. Обозначаем ее символом $\mathscr{G}/\mathscr{A}$.

V.2.4. Ω-фактороидами Ω-группы $\mathscr{G}$ являются все ее Ω-фактор-группы по отдельным идеалам и только они.

Доказательство. Утверждение теоремы справедливо в силу V.2.2., V.2.3., и D.2.2.

V.2.5. Пусть $\mathscr{G}$ — Ω-группа, $\mathscr{B}$ — идеал в $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{B}_1$ — идеал Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{B}$, пусть $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/\mathscr{B}_1$ — Ω-фактор-группа на $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ по идеалу $\mathscr{B}_1$. Тогда покрытием Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$, вынужденным Ω-фактор-группой $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/\mathscr{B}_1$ является Ω-фактор-группа $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$, причем поле идеала $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$ является суммой всех элементов Ω-группы

$\mathscr{G}/\mathscr{B}$, содержащихся в идеале $\mathscr{B}_1$ в $\mathscr{G}/\mathscr{B}$. Идеал $\mathscr{B}_1$ является Ω-фактор-группой $\mathscr{A}/\mathscr{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — идеал в Ω-группе $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}_1$ — идеал в Ω-фактор-группе $\mathscr{G}/\mathscr{B}$. Элементами идеала $\mathscr{B}_1$ являются смежные классы разложения Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{B}$. Среди этих элементов содержится поле B идеала $\mathscr{B}$, так-как B являетея нулевым элементом Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ [V.2.3.] и ввиду того содержится во всех идеалах Ω-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$. Суммой всех элементов идеала $\mathscr{B}_1$ является какое-нибудь надмножество A на B, содержащее нулевой элемент $0 \in \mathscr{G}$. Идеал $\mathscr{B}_1$ образует на $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ Ω-фактор-группу $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/\mathscr{B}_1$. $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/\mathscr{B}_1$ вынуждает покрытие $\bar{\mathscr{A}}$ Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$. $\bar{\mathscr{A}}$ — Ω-фактороид на $\mathscr{G}$ [7] V.2.7. Всякий элемент этого Ω-фактороида является суммой всех элементов Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$, содержащихся в том же элементе Ω-фактор-группы $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/\mathscr{B}_1$. Множество A является элементом поля $\bar{A}$ Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}}$. В силу [1] 25.5.1. A является полем инвариантной подгруппы $\mathscr{A}$ в аддитивной группе Ω-группы $\mathscr{G}$ и $\bar{A}$ полем фактор-группы аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ по инвариантной подгруппе $\mathscr{A}$. Так как разбиение $\bar{A}$ есть образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{G}$, является $\mathscr{A}$ идеалом в $\mathscr{G}$ [V.2.1.] и Ω-фактороид $\bar{\mathscr{A}}$ является Ω-фактор-группой $\mathscr{G}/\mathscr{A}$. Так как $\mathscr{B}$ есть идеал в $\mathscr{G}$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, то $\mathscr{B}$ является идеалом тоже в $\mathscr{A}$ [V.1.8.] и имеет место равенство $\mathscr{B}_1 = \mathscr{A}/\mathscr{B}$.

V.2.6. Пусть $\mathscr{G}$ — Ω-группа, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — подгруппы аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$. Тогда левосторонние разложения $\mathscr{G}/_l\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}/_l\mathscr{B}$ ее аддитивной группы будут образующими разбиениями Ω-группы $\mathscr{G}$ и будет в силе: разбиение $\mathscr{G}/_l\mathscr{A}$ $(\mathscr{G}/_l\mathscr{B})$ является покрытием (подразбиением) разбиения $\mathscr{G}/_l\mathscr{B}$ $(\mathscr{G}/_l\mathscr{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются идеалами в $\mathscr{G}$ и когда $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$.

Доказательство. Утверждение справедливо в силу теорем V.2.1. и [1] 21.3.

V.2.7. Пусть $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ — любые Ω-фактор-группы Ω-группы $\mathscr{G}$. Тогда Ω-фактор-группа $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ $(\mathscr{G}/\mathscr{B})$ будет покрытием (подразбиением) Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ $(\mathscr{G}/\mathscr{A})$ тогда и только тогда, когда идеалы $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ выполняют соотношение вида $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$.

Доказательство. Полем Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ $(\mathscr{G}/\mathscr{B})$ есть образующее разбиение Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ $(\mathscr{B})$, причем разбиение $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ будет покрытием $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$.

V.2.8. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — подгруппы группы $\mathscr{G}$, пусть подгруппы $\mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ и $\mathscr{A}$ перестановочны. Тогда имеют место равенства

a) $$\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/_l\mathscr{A} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/_l\mathscr{A} \tag{2.16.}$$

b) $$\mathscr{B}/_l\mathscr{A} \sqcap \mathscr{C} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/_l(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) \tag{2.17.}$$

Доказательство. [1] 21.2.1.

Следствие теоремы V.2.8. Если в частности $\mathscr{B} = \mathscr{G}$, имеет место:

a) $$\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{G}/_l\mathscr{A} = (\mathscr{C} + \mathscr{A})/_l\mathscr{A} \tag{2.18.}$$

b) $$\mathscr{G}/_l\mathscr{A} \sqcap \mathscr{C} = \mathscr{C}/_l(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) \tag{2.19.}$$

V.2.9. Пусть $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}, \mathscr{C}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{B}$. Тогда левосторонние разложения из теоремы V.2.8. будут образующими разбиениями в Ω-группе $\mathscr{G}$ и справедливо, что

a) $$\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/\mathscr{A} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/_l\mathscr{A} \tag{2.20.}$$

b) $$\mathscr{C} \sqcap \mathscr{B}/\mathscr{A} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/_l(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) \tag{2.21.}$$

Доказательство. $\mathscr{A}$ является идеалом в Ω-группе $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ и поэтому разложение $\mathscr{B}/_l\mathscr{A}$ аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ по инвариантной подгруппе $\mathscr{A}$ ввиду теоремы V.2.1. является образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{B}$ и имеет место равенство

$$\mathscr{B}/_l\mathscr{A} = \mathscr{B}/_p\mathscr{A} = \mathscr{B}/\mathscr{A} \tag{2.22.}$$

Это разбиение служит полем Ω-фактороида в $\mathscr{G}$ и в силу [7] V.2.6. оболочка $\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/\mathscr{A}$ и сечение $\mathscr{C} \sqcap \mathscr{B}/\mathscr{A}$ будут Ω-фактороидами в $\mathscr{G}$. Так как $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — подгруппы аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$, причем $\mathscr{A}$ является инвариантной подгруппой в $\mathscr{B}$, то подгруппы $\mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ и $\mathscr{A}$ являются ввиду [1] 24.5.1. перестановочными подгруппами и в силу того справедливы равенства (2.16.) и (2.17.). Так как имеет место (2.22.), справедливо тоже (2.20.) и (2.21.) и ввиду того разложения $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/_l\mathscr{A}$ и $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}/_l(\mathscr{C} \cap \mathscr{A})$ будут образующими разбиениями в Ω-групре $\mathscr{G}$.

V.2.10. Пусть $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{B}$. Тогда

a) Ω-подгруппа $\mathscr{C} \cap \mathscr{A}$ есть идеал в Ω-группе $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$,

b) $\mathscr{A}$ есть идеал в Ω-группе $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$,

c) Ω-фактороиды $\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/\mathscr{A}$ и $\mathscr{C} \sqcap \mathscr{B}/\mathscr{A}$ есть Ω-фаткор-группы вида

$$\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/\mathscr{A} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/\mathscr{A} \tag{2.23.}$$

$$\mathscr{C} \sqcap \mathscr{B}/\mathscr{A} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) \tag{2.24.}$$

Доказательство. $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \cap \mathscr{A}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, т. е. Ω-группы (V.1.2.) Левостороннее разложение $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/_l(\mathscr{C} \cap \mathscr{A})$ аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ по ее подгруппе $\mathscr{C} \cap \mathscr{A}$ является ввиду V.2.9. образующим разбиением, следовательно $\mathscr{C} \cap \mathscr{A}$ будет идеалом в Ω-группе $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ и поэтому выполняется равенство:

$$(\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/_l(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) = (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/_p(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) = (\mathscr{C} \cap \mathscr{B}/(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}). \tag{2.25.}$$

Ввиду этого $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/(\mathscr{C} \cap \mathscr{A})$ является Ω-фактор-группой Ω-группы $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ по идеалу $\mathscr{C} \cap \mathscr{A}$ и в силу (2.21.) и (2.25.) имеет место равенство (2.24.). Это значит, что Ω-фактороид $\mathscr{C} \sqcap \mathscr{B}/\mathscr{A}$ является Ω-фактор-группой. Заметим, что $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ является ввиду V.1.9. Ω-подгруппой Ω-группы $\mathscr{G}$, т. е. Ω-группой. Левостороннее разложение $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/_l\mathscr{A}$ ее аддитивной группы по подгруппе $\mathscr{A}$ является в силу V.2.9. образующим разбиением и поэтому $\mathscr{A}$ служит идеалом в Ω-группе $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ и выполняется равенство:

$$[(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/_l\mathscr{A} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/_p\mathscr{A} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/\mathscr{A}. \quad (2.26.)$$

Следовательно $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/\mathscr{A}$ будет Ω-фактор-группой Ω-группы $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}$ по идеалу $\mathscr{A}$. В силу соотношений (2.20.) и (2.26.) имеет место равенство (2.23.) итак, Ω-факторoид $\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/\mathscr{A}$ является Ω-фактор-группой.

Следствие теоремы V.2.10. Если в частности $\mathscr{B} = \mathscr{G}$, то справедливо:

a) $\mathscr{A}$ является идеалом в Ω-группе $\mathscr{C} + \mathscr{A}$,

b) $\mathscr{C} \cap \mathscr{A}$ является идеалом в Ω-группе $\mathscr{C}$,

c) Ω-факторoиды $\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{G}/\mathscr{A}$ и $\mathscr{C} \sqcap \mathscr{G}/\mathscr{A}$ являются Ω-фактор-группами вида

$$\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{G}/\mathscr{A} = (\mathscr{C} + \mathscr{A})/\mathscr{A} \quad (2.27.)$$

$$\mathscr{G}/\mathscr{A} \sqcap \mathscr{C} = \mathscr{C}/(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) \quad (2.28.)$$

V.2.11. Пусть $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — идеалы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Пусть $\bar{A}(\bar{B})$ — разбиение Ω-группы $\mathscr{G}$, образованное идеалом $\mathscr{A}(\mathscr{B})$. Тогда наибольшее общее подразбиение $(\bar{A}, \bar{B})$ разбиений $\bar{A}$, $\bar{B}$ есть разбиение, образованное идеалом $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$.

Доказательство. В силу D.2.1. и V.2.1. разбиение $\bar{A}(\bar{B})$ является образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{G}$ вида $\bar{A} = \mathscr{G}/_l\mathscr{A}$, $\bar{B} = \mathscr{G}/_l\mathscr{B}$, где $\mathscr{G}/_l\mathscr{A}$ $(\mathscr{G}/_l\mathscr{B})$ есть левостороннее разложение аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ по подгруппе $\mathscr{A}(\mathscr{B})$. Наибольшее общее подразбиение $(\bar{A}, \bar{B}) = (\mathscr{G}/_l\mathscr{A}, \mathscr{G}/_l\mathscr{B})$ разбиений $\bar{A}$, $\bar{B}$ является ввиду [7] V.2.9. тоже образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{G}$. Это разбиение ввиду V.2.2. образовано каким-нибудь идеалом $\mathscr{C}$ Ω-группы $\mathscr{G}$. В силу [1] 21.4. для наибольшего общего подразбиения левосторонних разложений аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ по подгруппам $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, имеет место равенство

$$(\mathscr{G}/_l\mathscr{A}, \mathscr{G}/_l\mathscr{B}) = \mathscr{G}/_l(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \quad (2.29.)$$

итак, $\mathscr{C} = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$.

V.2.12. Пусть $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — идеалы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Тогда Ω-фактор-группа $\mathscr{G}/(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})$ Ω-группы G по идеалу $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ является наибольшим общим подразбиением $(\mathscr{G}/\mathscr{A}, \mathscr{G}/\mathscr{B})$ Ω-фактор-групп $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}/\mathscr{B}$.

Доказательство. Полем Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ есть разложение $\bar{A}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$, полем Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ есть разложение $\bar{B}$ Ω-группы $\mathscr{G}$, образованное идеалом $\mathscr{B}$. В силу V.2.11. $(\bar{A}, \bar{B})$ является разложением Ω-группы $\mathscr{G}$, образованным идеалом $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ итак, имеет место равенство $(\mathscr{G}/\mathscr{A}, \mathscr{G}/\mathscr{B}) = \mathscr{G}/(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})$.

V.2.13. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — идеалы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Пусть $\bar{A}$ $(\bar{B})$ разложение Ω-группы $\mathscr{G}$, образованное идеалом $\mathscr{A}(\mathscr{B})$. Тогда наименьшее общее покрытие $[\bar{A}, \bar{B}]$ разбиений $\bar{A}, \bar{B}$ есть разложение Ω-группы $\mathscr{G}$, образованное идеалом $\mathscr{A} + \mathscr{B}$.

Доказательство. Ввиду D.2.1. и V.2.1. разложения $\bar{A}$ и $\bar{B}$ являются образующими разбиениями Ω-группы $\mathscr{G}$ и справедливы равенства $\bar{A} = \mathscr{G}/_l\mathscr{A}$ и $\bar{B} = \mathscr{G}/_l\mathscr{B}$, причем $\mathscr{G}/_l\mathscr{A}$ $(\mathscr{G}/_l\mathscr{B})$ — левостороннее разложение аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{G}$ по подгруппе $\mathscr{A}(\mathscr{B})$. В силу [1] 21.5. для наименьшего общего покрытия $[\bar{A}, \bar{B}] = [\mathscr{G}/_l\mathscr{A}, \mathscr{G}/_l\mathscr{B}]$ выполняется равенство

$$[\mathscr{G}/_l\mathscr{A}, \mathscr{G}/_l\mathscr{B}] = \mathscr{G}/_l(\mathscr{A} + \mathscr{B}). \tag{2.30.}$$

В силу [7] V.2.8. разбиение $[\bar{A}, \bar{B}]$ является образующим разбиением Ω-группы $\mathscr{G}$, итак оно ввиду V.2.1. и (2.30.) образовано идеалом $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$.

V.2.14. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — идеалы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Тогда наименьшим общим покрытием $[\mathscr{G}/\mathscr{A}, \mathscr{G}/\mathscr{B}]$ Ω-фактор-групп $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ будет Ω-фактор-группа $\mathscr{G}/(\mathscr{A} + \mathscr{B})$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A} + \mathscr{B}$.

Доказательство. Полем Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ $(\mathscr{G}/\mathscr{B})$ является разложение $\bar{A}(\bar{B})$, образованное идеалом $\mathscr{A}(\mathscr{B})$. Ввиду V.2.13. $[\bar{A}, \bar{B}]$ есть разложение Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, итак наименьшим общим покрытием $[\mathscr{G}/\mathscr{A}, \mathscr{G}/\mathscr{B}]$ Ω-фактор-групп $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}/\mathscr{B}$ будет Ω-фактор-группа Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, т. е. имеет место равенство $[\mathscr{G}/\mathscr{A}, \mathscr{G}/\mathscr{B}] = \mathscr{G}/(\mathscr{A} + \mathscr{B})$.

V.2.15. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — подгруппы в группе $\mathscr{G}$. Пусть группы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ перестановочны. Пусть $\mathscr{U}$ — подгруппа в $\mathscr{G}$, удовлетворяющая соотношению $\mathscr{A} \cap \mathscr{C} \supset \mathscr{U} \supset [(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})]$, пусть пары подгрупп $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}, \mathscr{B}$; $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}, \mathscr{D}$; $\mathscr{U}, \mathscr{B}$; $\mathscr{U}, \mathscr{D}$ есть пары перестановочных подгрупп. Тогда справедливо, что левостороние разложения $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{B})$ и $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{D})$ сопряжены и выполняется равенство

$$[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}] \cap (\mathscr{U} + \mathscr{D}) = \mathscr{U} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}] \cap (\mathscr{U} + \mathscr{B}).$$

Доказательство. [1] 23.3.

V.2.16. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Пусть $\mathscr{B}$ является идеалом в $\mathscr{A}$ и Ω-подгруппа $\mathscr{D}$ — идеалом в $\mathscr{C}$, пусть $\mathscr{U}$ — идеал в Ω-подгруппе $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, удовлетворяющий соотношению вида

$$(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) \supset \mathscr{U} \supset [(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})].$$

Тогда справедливо:

a) Ω-подгруппы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ являются идеалами в $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$,

b) левосторонние разложения

$$[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{B}),\ [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{D}) \tag{2.31.}$$

аддитивных групп $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$ по подгруппам $\mathscr{U} + \mathscr{B}$ и $\mathscr{U} + \mathscr{D}$ сопряжены,

c) Ω-подгруппа $\mathscr{U} + \mathscr{B}$ является идеалом в Ω-группе $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и Ω-подгруппа $\mathscr{U} + \mathscr{D}$ является идеалом в Ω-группе $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$,

d) $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}] \cap (\mathscr{U} + \mathscr{D}) = \mathscr{U} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}] \cap (\mathscr{U} + \mathscr{B})$.

Доказательство. Ввиду V.2.10. Ω-подгруппы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ — идеалы в Ω-группе $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, т. е. имеет место утверждение a). В силу этого аддитивные группы Ω-групп $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$ и $\mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ перестановочны. Так как $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$ и $\mathscr{U}$ являются одновременно Ω-подгруппами в $\mathscr{A}$ и в $\mathscr{C}$, причем $\mathscr{B}$ есть идеал в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{D}$ служит идеалом в $\mathscr{C}$, то пары аддитивных групп Ω-групп $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}, \mathscr{B}$; $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}, \mathscr{D}$; $\mathscr{U}, \mathscr{B}$; $\mathscr{U}, \mathscr{D}$ являются парами перестановочных групп. В силу теоремы V.2.15. левосторонние разложения $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{B})$ и $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{D})$ аддитивных групп соответствующих Ω-групп по их подгруппам являются сопряженными разбиениями. Эти разбиения были построены следующим способом. Пологая $\mathscr{A}' = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$, $\mathscr{C}' = (\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$, $\bar{A} = \mathscr{A}'/_l\mathscr{B}$, $\bar{C} = \mathscr{C}'/_l\mathscr{D}$, получаем в силу [1] 23.2., что $\mathscr{A}' \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C}' \supset \mathscr{D}$, $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$ и что разбиения $\bar{A} \sqcap \mathscr{C}'$ и $\bar{C} \sqcap \mathscr{A}'$ удовлетворяют равенству:

$$\bar{A} \sqcap \mathscr{C}' = \mathscr{A}'/_l\mathscr{B} \sqcap \mathscr{C}' = (\mathscr{A}' \cap \mathscr{C}')/_l(\mathscr{C}' \cap \mathscr{B}) = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C})/_l(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) \tag{2.32.}$$

$$\bar{C} \sqcap \mathscr{A}' = \mathscr{C}'/_l\mathscr{D} \sqcap \mathscr{A}' = (\mathscr{C}' \cap \mathscr{A}')/_l(\mathscr{A}' \cap \mathscr{D}) = (\mathscr{C} \cap \mathscr{A})/_l(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}). \tag{2.33.}$$

Пусть $\bar{B}$ — общее покрытие разбиений $\bar{A} \sqcap \mathscr{C}'$ и $\bar{C} \sqcap \mathscr{A}'$. Ввиду [1] 23.2. сопряженные разбиения являются покрытиями разбиений $\bar{A}$, $\bar{C}$, вынужденными разбиением $\bar{B}$ и ввиду того в силе:

$$A^\circ = [(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{B}) \tag{2.34.}$$

$$C^\circ = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/_l(\mathscr{U} + \mathscr{D}) \tag{2.35.}$$

и $\bar{B} = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C}/_l\mathscr{U}$. В силу теоремы V.1.9. аддитивные группы $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$ являются Ω-подгруппами в Ω-группе $\mathscr{G}$ и ввиду V.2.10. $\mathscr{B}$ будет идеалом в Ω-группе $\mathscr{A}' = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$ — идеалом в Ω-группе $\mathscr{C}' = (\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$. В силу V.2.1. левостороннее разложение $\bar{A} = \mathscr{A}'/_l\mathscr{B}$ $(\bar{C} = \mathscr{C}'/_l\mathscr{D})$ аддитивной группы Ω-группы $\mathscr{A}'(\mathscr{C}')$ по ее подгруппе $\mathscr{B}$ $(\mathscr{D})$ является образующим разбиением в Ω-группе $\mathscr{G}$ и далее ввиду того, что $\mathscr{U}$ — идеал в $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, разбиение $\bar{B}$ является образующим разбиением в Ω-группе $\mathscr{G}$. В силу утверждения теоремы [7] V.2.10. разбиения A° и C° будут образующими. Так как справедливы равенства (2.34.) и (2.35.), то Ω-группа $\mathscr{U} + \mathscr{B}$ является, в силу V.2.1., идеалом в Ω-группе $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и Ω-подгруппа $\mathscr{U} + \mathscr{D}$ — идеалом в Ω-группе $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$. Справедливость утверждения d) получается из теоремы V.2.15.

V.2.17. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{B}$ — идеал в $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ — идеал в $\mathscr{C}$. Тогда справедливо, что

a) Ω-подгруппы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ являются идеалами в $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$,

b) левосторонние разложения $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/_l[(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + \mathscr{B}]$ и $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/_l[(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{D}]$ аддитивных групп Ω-групп $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$ по подгруппам $(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + \mathscr{B}$ и $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{D}$, соответственно, сопряжены,

c) Ω-подгруппа $(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + \mathscr{B}$ является идеалом в Ω-группе $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и $(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{D}$ является идеалом в $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$,

d) выполняется равенство: $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}] \cap [(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{D}] =$
$= (\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}] \cap [(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + \mathscr{B}]$.

Доказательство. В силу V.2.10. Ω-подгруппы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$ и $\mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ являются идеалами в Ω-подгруппе $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, ввиду V.1.7. Ω-подгруппа $(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{B} \cap \mathscr{C})$ – идеал в $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$ и справедливо соотношение: $(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \subset (\mathscr{A} \cap \mathscr{C})$. Пологая $\mathscr{U} = (\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})$ заметим, что

$$\mathscr{U} + \mathscr{D} = (\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{D}$$

и $\mathscr{U} + \mathscr{B} = (\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B} = (\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + \mathscr{B}$. В силу теоремы V.2.16., утверждение справедливо.

V.2.18. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ – подгруппы в группе $\mathscr{G}$, $A \supset B$, $C \supset D$ их поля. Тогда левосторонние разложения $\mathscr{A}/_l\mathscr{B}$, $\mathscr{C}/_l\mathscr{D}$ присоединены относительно B, D тогда и только тогда, когда погруппы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ перестановочны. Это значит, что равенство $s(\bar{D} \sqsubset \mathscr{A}/_l\mathscr{B} \sqcap C) = s(B \sqsubset \mathscr{C}/_l\mathscr{D} \sqcap A)$ имеет место тогда и только тогда, когда подгруппы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ перестановочны.

Доказательство. [1] 23.3.

V.2.19. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ – Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{B}$ – идеал в $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ – идеал в $\mathscr{C}$. Тогда Ω-фактор-группы $\mathscr{A}/\mathscr{B}$, $\mathscr{C}/\mathscr{D}$ будут присоединенными относительно $\mathscr{B}$, $\mathscr{D}$.

Доказательство. В силу V.2.17. Ω-подгруппы $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$ и $\mathscr{B} \cap \mathscr{C}$ являются идеалами в Ω-группе $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, итак, их аддитивные группы перестановочны. Ввиду V.2.18. левосторонние разложения $\mathscr{A}/_l\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}/_l\mathscr{D}$ аддитивных групп $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$ по подгруппам $\mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$ являются присоединенными относительно полей B, D Ω-подгрупп $\mathscr{B}$, $\mathscr{D}$. Обозначая символами A и C поля Ω-групп $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$, получаем ввиду V.2.18. равенство: $s(D \sqsubset \mathscr{A}/_l\mathscr{B} \sqcap C) = s(B \sqsubset \mathscr{C}/_l\mathscr{D} \sqcap A)$, причем $\mathscr{A}/_l\mathscr{B}$ ($\mathscr{C}/_l\mathscr{D}$) есть поле Ω-фактор-группы $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ ($\mathscr{C}/\mathscr{D}$) Ω-группы $\mathscr{A}$ ($\mathscr{C}$) по идеалу $\mathscr{B}$ ($\mathscr{D}$). В силу V.2.4. и [7] D.2.8. доказательство теоремы завершено.

V.2.20. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ – Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{B}$ – идеал в $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ – идеал в $\mathscr{C}$. Тогда сопряженные Ω-фактороиды $\mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}^\circ$, которые есть покрытиями Ω-фактор-групп $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]/\mathscr{B}$ и $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]/\mathscr{D}$ – Ω-фактор-группы вида

$$\mathscr{A}^\circ = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]/[(\mathscr{D} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}] \tag{2.36.}$$

$$\mathscr{C}^\circ = [(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]/[(\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}] \tag{2.37.}$$

Доказательство. a) Требуется доказать существование сопряженных покрытий Ω-фактор-групп $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]/\mathscr{B}$ и $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]/\mathscr{D}$. В силу V.2.19. Ω-фактор-группы $\mathscr{A}/\mathscr{B}$, $\mathscr{C}/\mathscr{D}$, присоединены относительно Ω-подгрупп $\mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$. Обозначая $\overline{\mathscr{A}}_1 = \mathscr{C} \sqsubset \mathscr{A}/\mathscr{B}$, $\overline{\mathscr{C}}_1 = \mathscr{A} \sqsubset \mathscr{C}/\mathscr{D}$, $\overline{\mathscr{A}}_2 = \mathscr{D} \sqsubset \mathscr{A}/\mathscr{B}$, $\overline{\mathscr{C}}_2 = \mathscr{B} \sqsubset \mathscr{C}/\mathscr{D}$, применим конструкцию сопряженных Ω-фактороидов из теоремы [7] V.2.11. Ввиду V.2.10. Ω-фактороиды $\overline{\mathscr{A}}_1, \overline{\mathscr{C}}_1, \overline{\mathscr{A}}_2, \overline{\mathscr{C}}_2$ — Ω-фактор-группы и справедливо:

$$\overline{\mathscr{A}}_1 = \mathscr{C} \sqsubset \mathscr{A}/\mathscr{B} = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]/\mathscr{B}, \quad \overline{\mathscr{C}}_1 = \mathscr{A} \sqsubset \mathscr{C}/\mathscr{D} = [(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]/\mathscr{D}$$
$$\overline{\mathscr{A}}_2 = \mathscr{D} \sqsubset \mathscr{A}/\mathscr{B} = [(\mathscr{D} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]/\mathscr{B}, \quad \overline{\mathscr{C}}_2 = \mathscr{B} \sqsubset \mathscr{C}/\mathscr{D} = [(\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]/\mathscr{D},$$

причем $\mathscr{B}$ является идеалом в Ω-группах $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}$ и $(\mathscr{D} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$ идеалом в Ω-группах $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}$ и $(\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}$. Обозначая $\mathscr{A}_1 = (\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}$, $\mathscr{A}_2 = (\mathscr{D} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}$, $\mathscr{C}_1 = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}$, $\mathscr{C}_2 = (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}$, рассмотрим сечения $\mathscr{A}_1 \sqcap \overline{\mathscr{C}}_1 = \mathscr{A}_1 \sqcap \mathscr{C}_1/\mathscr{D}$ и $\mathscr{C}_1 \sqcap \overline{\mathscr{A}}_1 = \mathscr{C}_1 \sqcap \mathscr{A}_1/\mathscr{B}$. В силу V.2.10. Ω-фактороиды $\mathscr{A}_1 \sqcap \overline{\mathscr{C}}_1$ и $\mathscr{C}_1 \sqcap \overline{\mathscr{A}}_1$ есть Ω-фактор-группы и имеют место равенства $\mathscr{A}_1 \sqcap \overline{\mathscr{C}}_1 = \mathscr{A}_1 \sqcap \mathscr{C}_1/\mathscr{D} = (\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{C}_1)/(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{D})$, $\mathscr{C}_1 \sqcap \overline{\mathscr{A}}_1 = \mathscr{C}_1 \sqcap \mathscr{A}_1/\mathscr{B} = (\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{A}_1)/$ $/(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{B}) = (\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{C}_1/(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{B})$. В силу предположений теоремы справедливы равенства $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{C}_1 = \mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{D} = \mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{D} = \mathscr{B} \cap \mathscr{D}$. Следовательно $\mathscr{A}_1 \sqcap \overline{\mathscr{C}}_1 = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C})/(\mathscr{A} \cap \mathscr{D})$ и $\mathscr{C}_1 \sqcap \overline{\mathscr{A}}_1 = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C})/(\mathscr{C} \cap \mathscr{B})$ причем $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}$, $\mathscr{C} \cap \mathscr{B}$ являются идеалами в $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$. Ввиду V.2.14. наименьшим общим покрытием Ω-фактор-групп $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C})/(\mathscr{A} \cap \mathscr{D})$ и $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C})/(\mathscr{C} \cap \mathscr{B})$ есть Ω-фактор-группа $\overline{\mathscr{U}}^* = (\mathscr{A} \cap \mathscr{C})/[(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})]$ и в силу [7] V.2.11. существуют сопряженные Ω-фактороиды $\mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}^\circ$, которые являются покрытиями Ω-фактор-групп $\overline{\mathscr{A}}_1 = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]/\mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{C}}_1 = [(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]/\mathscr{D}$, вынужденными Ω-фактор-группой $\overline{\mathscr{U}}^*$, обладающие следующими свойствами: $\mathscr{A}_2 \in \mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}_2 \in \mathscr{C}^\circ$ и $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{C}_2$ инциденты.

b) Требуется доказать, что Ω-фактороидами $\mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}^\circ$ будут Ω-фактор-группы (2.36.) и (2.37.). Так как Ω-фактороиды $\mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}^\circ$ являются покрытиями Ω-фактор-групп $\overline{\mathscr{A}}_1, \overline{\mathscr{C}}_1$, вынужденными Ω-фактор-группой $\overline{\mathscr{U}}^*$, то из доказательства теоремы V.2.16. вытекает, что их полями являются образующие разбиения $A^\circ = [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]/_l[(\mathscr{D} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{B}]$, $C^\circ = [(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]/_l[(\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{D}]$, т. е. $\mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}^\circ$ — Ω-фактор-группы вида (2.36.) и (2.37.).

3. Цепи Ω-фактор-групп

D.3.1. Пусть α — натуральное число, пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ — какие-нибудь Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Рядом Ω-подгрупп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, кратко рядом от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ называем $(\alpha + 1)$ — членную последовательность Ω-подгрупп $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_\alpha$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, обладающую следующими свойствами.

a) $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}$, $\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{B}$,

b) для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ Ω-подгруппа $\mathscr{A}_\gamma$ является Ω-подгруппой в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$. Ряд обозначаем символом

$$(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_\alpha. \tag{3.1.}$$

D.3.2. Пусть $(\mathscr{A})$ – ряд Ω-подгрупп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Тогда

a) Ω-подгруппы $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_2$ члены ряда. $\mathscr{A}_0$ – первый, $\mathscr{A}_\alpha$ – концевой член ряда $(\mathscr{A})$.

b) Длиной ряда $(\mathscr{A})$ называется число $\alpha + 1$ их членов.

c) Любой член $\mathscr{A}_\gamma$ ряда $(\mathscr{A})$ называется существенным членом, если он является или первым членом или собственной Ω-подгруппой в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$, при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$. Член ряда, который не является существенным членом, называется несущественным.

d) Если ряд $(\mathscr{A})$ содержит хотя бы одного несущественного члена, то говорим, что $(\mathscr{A})$ – ряд с повторением, если все члены ряда существенные, то $(\mathscr{A})$ является рядом без повторения.

e) Число α' существенных членов ряда, называется укороченной длиной ряда.

D.3.3. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ – Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть

$$(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_\alpha$$

ряд Ω-подгрупп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Говорим, что $(\mathscr{A})$ есть нормальный ряд Ω-подгрупп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, если для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ Ω-подгруппа $\mathscr{A}_\gamma$ является идеалом в Ω-группе $\mathscr{A}_{\gamma-1}$.

Замечание. Если $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ – Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$ и $\mathscr{B}$ является идеалом в $\mathscr{A}$, то существует хотя бы один нормальный ряд от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Этим рядом является ряд $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A} \supset \mathscr{B} = \mathscr{A}_1$.

Условие. Говоря о нормальном ряде Ω-подгрупп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, мы будем предполагать, что $\mathscr{B}$ есть идеал в $\mathscr{A}$.

V.3.1. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ – Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть

$$(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_\alpha$$

нормальный ряд от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Тогда α-членная последовательность Ω-фактор-групп

$$\mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_1/\mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_\alpha \tag{3.2.}$$

является цепью Ω-фактороидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$.

Доказательство. Во-первых, $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}$, $\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{B}$. Далее справедливо:

a) $\mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1$ – Ω-фактор-группа, т. е. ввиду V.2.4. она есть Ω-фактороид на $\mathscr{A}_0$.

b) Для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ $\mathscr{A}_\gamma/\mathscr{A}_{\gamma+1}$ является Ω-фактор-группой Ω-группы $\mathscr{A}_\gamma$ по идеалу $\mathscr{A}_{\gamma+1}$, т. е. Ω-фактороидом на $\mathscr{A}_\gamma$, причем $\mathscr{A}_\gamma$ является идеалом в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$. Ввиду V.2.3. поле A_γ идеала $\mathscr{A}_\gamma$ является нулевым элементом Ω-фактор-группы $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$. Следовательно, ввиду [7] D.4.1., последовательность (3.2.) является цепью Ω-факторондов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$.

D.3.4. Последовательность (3.2.) из теоремы V.3.1. называется цепью Ω-фактор-групп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, короче, цепью от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Обозначаем ее символом $[\overline{\mathscr{A}}] = \mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_{\alpha}$.

V.3.2. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть

$$\mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_{\alpha} -$$

нормальный ряд от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{B}_0 \supset \mathscr{B}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{B}_{\beta}$ — нормальный ряд от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$. Пусть $[\overline{\mathscr{A}}] = \mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_{\alpha}$ — цепь Ω-фактор-групп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, пусть $[\overline{\mathscr{B}}] = \mathscr{B}_0/\mathscr{B}_1 \to \ldots \to \mathscr{B}_{\beta-1}/\mathscr{B}_{\beta}$ — цепь Ω-фактор-групп от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$, пусть справедливо, что $\mathscr{A} = \mathscr{C}$, $\mathscr{B} = \mathscr{D}$. Тогда цепи $[\overline{\mathscr{A}}]$ и $[\overline{\mathscr{B}}]$ присоединены.

Доказательство. Во-первых имеет место равенство $\mathscr{A}_0 = \mathscr{B}_0 = \mathscr{A} = \mathscr{C}$ и $\mathscr{A}_{\alpha} = \mathscr{B}_{\beta} = \mathscr{B} = \mathscr{D}$. Пусть $\overline{\mathscr{A}}_{\gamma} = \mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$ ($\overline{\mathscr{B}}_{\delta} = \mathscr{B}_{\delta-1}/\mathscr{B}_{\delta}$) — любой член цепи $[\overline{\mathscr{A}}]$ ($[\overline{\mathscr{B}}]$), при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$. Тогда $s\overline{\mathscr{A}}_{\gamma+1} = \mathscr{A}_{\gamma}$, $s\overline{\mathscr{B}}_{\delta+1} = \mathscr{B}$ $s\overline{\mathscr{A}}_{\alpha+1} = s(\overline{\mathscr{A}_{\alpha}/\mathscr{A}_{\alpha+1}}) = \mathscr{B}$, $s\overline{\mathscr{B}}_{\beta+1} = s(\mathscr{B}_{\beta}/\mathscr{B}_{\beta+1}) = \mathscr{D}$, причем в качестве $\mathscr{A}_{\alpha+1}$ ($\mathscr{B}_{\beta+1}$) выберем любой идеал в A_{α} ($\mathscr{B}_{\beta}$). По предположениям есть $\mathscr{A}_{\gamma-1} \supset \mathscr{A}_{\gamma}$, $\mathscr{B}_{\delta-1} \supset \mathscr{B}_{\delta}$ и $\mathscr{A}_{\gamma}$ является идеалом в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$, $\mathscr{B}_{\delta}$ — идеалом в $\mathscr{B}_{\delta-1}$. Ввиду V.2.19. Ω-фактор-группы $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$ и $\mathscr{B}_{\delta-1}/\mathscr{B}_{\delta}$ присоединены относительно идеалов $\mathscr{A}_{\gamma}$ и $\mathscr{B}_{\delta}$ и ввиду [7] D.4.8. $[\overline{\mathscr{A}}]$ и $[\overline{\mathscr{B}}]$ присоединенные цепи Ω-факторондов, где соответствующие Ω-фактороиды являются Ω-фактор-группами.

V.3.3. Пусть $[\overline{\mathscr{A}}] = \mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_{\alpha}$,

$[\overline{\mathscr{B}}] = \mathscr{B}_0/\mathscr{B}_1 \to \ldots \to \mathscr{B}_{\beta-1}/\mathscr{B}_{\beta}$ — цепи Ω-фактор-групп в Ω-группе $\mathscr{G}$ от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ и от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$. Пусть $\mathscr{A} = \mathscr{C}$, $\mathscr{B} = \mathscr{D}$. Тогда цепи $[\overline{\mathscr{A}}]$ и $[\overline{\mathscr{B}}]$ обладают сопраженными уплотнениями $[\mathscr{A}^{\circ}]$, $[\mathscr{B}^{\circ}]$, определенными конструкцией, описаной в доказательстве теоремы.

Доказательство. Имеют место равенства: $\mathscr{A}_0 = \mathscr{B}_0 = \mathscr{A} = \mathscr{C}$ и $\mathscr{A}_{\alpha} = \mathscr{B}_{\beta} = \mathscr{B} = \mathscr{D}$. Обозначим:

$$\overline{\mathscr{A}}_{\gamma,\nu} = \mathscr{B}_{\nu} \sqsubset \mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}, \qquad \overline{\mathscr{A}}_{\gamma} = \mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma},$$
$$\overline{\mathscr{B}}_{\delta,\mu} = \mathscr{A}_{\mu} \sqsubset \mathscr{B}_{\delta-1}/\mathscr{B}_{\delta}, \qquad \overline{\mathscr{B}}_{\delta} = \mathscr{B}_{\delta-1}/\mathscr{B}_{\delta}$$

при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$, $\mu = 0, 1, \ldots, \alpha$, $\nu = 0, 1, \ldots, \beta$. Цепь $[\overline{\mathscr{A}}]$ соответствует нормальному ряду $\mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_{\alpha}$ от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, $[\overline{\mathscr{B}}]$ соответствует нормальному ряду $\mathscr{B}_0 \supset \mathscr{B}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{B}_{\beta}$ от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$. Ввиду V.2.10. справедливы равенства:

$$\overline{\mathscr{A}}_{\gamma,\nu} = \mathscr{B}_{\nu} \sqsubset \mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma} = [(\mathscr{B}_{\nu} \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}_{\gamma}]/\mathscr{A}_{\gamma},$$
$$\overline{\mathscr{B}}_{\delta,\mu} = \mathscr{A}_{\mu} \sqsubset \mathscr{B}_{\delta-1}/\mathscr{B}_{\delta} = [(\mathscr{A}_{\mu} \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_{\delta}]/\mathscr{B}_{\delta}$$

и $\overline{\mathscr{A}}_{\gamma,\nu}$ ($\overline{\mathscr{B}}_{\delta,\mu}$) — Ω-фактор-группа Ω-группы $\mathscr{A}_{\gamma,\nu}$ ($\mathscr{B}_{\delta,\mu}$) по идеалу $\mathscr{A}_\gamma$ ($\mathscr{B}_\delta$), где $\mathscr{A}_{\gamma,\nu} = (\mathscr{B}_\nu \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}_\gamma$, $\mathscr{B}_{\delta,\mu} = (\mathscr{A}_\mu \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_\delta$. Далее справедливо:

$$\overline{\mathscr{A}}_{\gamma,0} = [(\mathscr{B}_0 \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}_\gamma]/\mathscr{A}_\gamma = [(\mathscr{A}_0 \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}_\gamma]/\mathscr{A}_\gamma = \mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_\gamma = \overline{\mathscr{A}}_\gamma,$$
$$\overline{\mathscr{B}}_{\delta,0} = [(\mathscr{A}_0 \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_\delta]\mathscr{B}_\delta = [(\mathscr{B}_0 \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_\delta]/\mathscr{B}_\delta = \mathscr{B}_{\delta-1}/\mathscr{B}_\delta = \overline{\mathscr{B}}_\delta,$$
$$\mathscr{A}_{\gamma,\beta} = (\mathscr{B}_\beta \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}_\gamma = (\mathscr{A}_\alpha \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}_\gamma = \mathscr{A}_\gamma,$$
$$\mathscr{B}_{\delta,\alpha} = (\mathscr{A}_\alpha \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_\delta = (\mathscr{B}_\beta \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_\delta = \mathscr{B}_\delta.$$

Ввиду V.3.2. и [7] V.4.8. существуют сопряженные уплотнения $[\mathscr{A}^\circ]$, $[\mathscr{B}^\circ]$, цепей $[\mathscr{A}]$, $[\mathscr{B}]$ с той же длиной, следующего вида

$$[\mathscr{A}^\circ] = \mathscr{A}^\circ_{1,0} \to \ldots \to \mathscr{A}^\circ_{1,\beta-1} \to \mathscr{A}^\circ_{2,0} \to \ldots \to \mathscr{A}^\circ_{2,\beta-1} \to \ldots \to \mathscr{A}^\circ_{\alpha,0} \to \ldots \to \mathscr{A}^\circ_{\alpha,\beta-1} \quad (3.3.)$$
$$[\mathscr{B}^\circ] = \mathscr{B}^\circ_{1,0} \to \ldots \to \mathscr{B}^\circ_{1,\alpha-1} \to \mathscr{B}^\circ_{2,0} \to \ldots \to \mathscr{B}^\circ_{2,\alpha-1} \to \ldots \to \mathscr{B}^\circ_{\beta,0} \to \ldots \to \mathscr{B}^\circ_{\beta,\alpha-1} \quad (3.4.)$$

причем $\mathscr{A}^\circ_{\gamma,\delta-1}$ и $\mathscr{B}^\circ_{\delta,\gamma-1}$ — Ω-фактороиды являющиеся покрытиями Ω-фактор-групп $\overline{\mathscr{A}}_{\gamma,\delta-1}$ и $\overline{\mathscr{B}}_{\delta,\gamma-1}$, и обладающие следующим свойством: $\overline{\mathscr{A}}_{\gamma,\delta} \in \mathscr{A}^\circ_{\gamma,\delta-1}$, $\overline{\mathscr{B}}_{\delta,\gamma} \in \mathscr{B}^\circ_{\delta,\gamma-1}$ при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$. В силу V.2.20. Ω-фактороиды $\mathscr{A}^\circ_{\gamma,\delta-1}$ и $\mathscr{B}^\circ_{\delta,\gamma-1}$ будут Ω-фактор-группами вида

$$\mathscr{A}^\circ_{\gamma,\delta-1} = [(\mathscr{B}_{\delta-1} \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}_\gamma]/[(\mathscr{B}_\delta \cap \mathscr{A}_{\gamma-1}) + \mathscr{A}\gamma] = \mathscr{A}_{\gamma,\delta-1}/\mathscr{A}_{\gamma,\delta} \quad (3.5.)$$
$$\mathscr{B}^\circ_{\delta,\gamma-1} = [(\mathscr{A}\gamma_{-1} \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_\delta]/[(\mathscr{A}_\gamma \cap \mathscr{B}_{\delta-1}) + \mathscr{B}_\delta] = \mathscr{B}_{\delta,\gamma-1}/\mathscr{B}_{\delta,\gamma}, \quad (3.6.)$$

т. е. $\mathscr{A}^\circ_{\gamma,\delta-1}$ ($\mathscr{B}^\circ_{\delta,\gamma-1}$) есть Ω-фактор-группа Ω-группы $\mathscr{A}_{\gamma,\delta-1}$ ($\mathscr{B}_{\delta,\gamma-1}$) по идеалу $\mathscr{A}_{\gamma,\delta}(\mathscr{B}_{\delta,\gamma})$.

V.3.4. Пусть $\mathscr{A}$ — идеал в Ω-группе $\mathscr{G}$. Ω-фактор-группа $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ проста тогда и только тогда, когда для всякого ее покрытия $\mathscr{G}/\mathscr{C}$ в силе или

a) $\mathscr{G}/\mathscr{C} = \mathscr{G}/\mathscr{G}$, т. е. $\mathscr{C} = \mathscr{G}$ или

b) $\mathscr{G}/\mathscr{C} = \mathscr{G}/\mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{C} = \mathscr{A}$.

Доказательство. Пусть $\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{G}/\mathscr{C}$ — любое покрытие Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$. Тогда $\mathscr{G}/\mathscr{C}$ есть Ω-фактор-группа Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{C}$ и имеет место: $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}$, причем $\mathscr{A}$ является идеалом в $\mathscr{C}$. Ввиду теоремы V.2.4. и ввиду [7] V.3.5. Ω-фактор-группа $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ проста тогда и только тогда, когда или

a) $\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{G}/\mathscr{C}$ есть наибольшая Ω-фактор-группа на $\mathscr{G}$, т. е. $\mathscr{G}/\mathscr{C} = \mathscr{G}/\mathscr{G}$ следовательно $\mathscr{G} = \mathscr{C}$, или

b) $\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{G}/\mathscr{C} = \mathscr{G}/\mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A} = \mathscr{C}$.

D.3.5. Пусть $\mathscr{G}$ — Ω-группа, пусть $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{G}$. Говорим, что идеал $\mathscr{A}$ является максимальным в $\mathscr{G}$, когда для того идеала $\mathscr{C}$ в $\mathscr{G}$, удовлетворяющего соотношению $\mathscr{G} \supset \mathscr{C} \supset \mathscr{A}$ будет $\mathscr{C} = \mathscr{A}$ или $\mathscr{C} = \mathscr{G}$.

V.3.5. Пусть $(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_\alpha$ — нормальный ряд от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$. Пусть $[\mathscr{A}] = \mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_\alpha$ — цепь Ω-фактор-групп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Цепь $[\mathscr{A}]$ относительно проста тогда и только тогда, когда для всякого $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ идеал $\mathscr{A}_\gamma$ максимальный в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$.

Доказательство

а) Пусть цепь $[\overline{\mathscr{A}}]$ относительно проста. Ω-фактор-группы $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$, $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, являются Ω-фактороидами в Ω-группе $\mathscr{G}$ и ввиду [7] D.4.6. справедливо, что Ω-фактор-группа $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$ проста относительно поля A_{γ} идеала $\mathscr{A}_{\gamma}$. Если $\mathscr{A}_{\gamma-1} = \mathscr{A}_{\gamma}$, то справедливо, что идеал $\mathscr{A}_{\gamma}$ максимальный в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$. Предположим, что $\mathscr{A}_{\gamma}$ есть собственный идеал в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$. Тогда ввиду V.3.4. единственным покрытием Ω-фактор-группы $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$, отличным от нее, является Ω-фактор-группа $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma-1}$ и поэтому идеал $\mathscr{A}_{\gamma}$ является максимальным в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$.

Пусть $\mathscr{A}_{\gamma}$ — максимальный в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$ при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$. Тогда в силу D.3.5. и V.2.7. справедливо, что Ω-фактор-группа $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma-1}$ является единственным покрытием Ω-фактор-группы $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$, отличным от нее. Ввиду теоремы V.3.4. Ω-фактор-группа $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$ проста, следовательно, она проста относительно поля A_{γ} идеала $\mathscr{A}_{\gamma}$. Таким образом цепь $[\overline{\mathscr{A}}]$ относительно проста.

V.3.6. Пусть $(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_{\alpha}$ — нормальный ряд от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $[\overline{\mathscr{A}}] = \mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_{\alpha}$ — цепь Ω-фактор-групп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Цепь $[\overline{\mathscr{A}}]$ будет цепью без повторения тогда и только тогда, если для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ идеал $\mathscr{A}_{\gamma}$ будет собственным идеалом в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}_{\alpha+1} = \mathscr{B}$. Пусть для всякого γ, $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, справедливо, что $\mathscr{A}_{\gamma-1} \supset \mathscr{A}_{\gamma}$, $\mathscr{A}_{\gamma-1} \neq \mathscr{A}_{\gamma}$. Заметим, что $s(\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}) = \mathscr{A}_{\gamma-1}$, $s(\mathscr{A}_{\gamma}/\mathscr{A}_{\gamma+1}) = \mathscr{A}_{\gamma}$. В силу того и ввиду [7] D.4.2. справедливо, что $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$ является собственным членом цепи $[\overline{\mathscr{A}}]$.

Пусть с другой стороны $\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$ — собственный член цепи $[\overline{\mathscr{A}}]$ при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$. Тогда $\mathscr{A}_{\gamma-1} = s(\mathscr{A}_{\gamma-1}/\mathscr{A}_{\gamma}) \neq s(\mathscr{A}_{\gamma}/\mathscr{A}_{\gamma+1}) = \mathscr{A}_{\gamma}$.

V.3.7. Пусть $\mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{A}_{\alpha}$ — нормальный ряд от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $[\overline{\mathscr{A}}] = \mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_{\alpha}$ — цепь от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Цепь $[\overline{\mathscr{A}}]$ является композиционной цепью Ω-подгруппы $\mathscr{A}$ относительно Ω-подгруппы $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$, тогда и только тогда, когда для всякого γ, $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, идеал $\mathscr{A}_{\gamma}$ является максимальным и собственным идеалом в $\mathscr{A}_{\gamma-1}$.

Доказательство. Утверждение теоремы справедливо на основании теорем V.3.6. и V.3.5. и определения [7] D.4.9.

4. Изоморфизм и гомоморфизм Ω-групп

Условие. В этой главе мы будем рассматривать Ω-группы того же типа.

V.4.1. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ — Ω-группа и пусть существует гомоморфизм φ Ω-группы $\mathscr{G}$ на группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega \rangle$. Тогда $\mathscr{G}^*$ будет Ω-группа и гомоморфизм φ сопоставляет нулевому элементу 0 Ω-группы $\mathscr{G}$ нулевой элемент 0^* Ω-группы $\mathscr{G}^*$.

Доказательство. Утверждение справедливо в силу [1] 26.1.1. и [7] V.5.8.

V.4.2. Пусть $\mathcal{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ — Ω-группоид, пусть существует изоморфизм ψ Ω-группоида $\mathcal{G}$ на Ω-группоид $\mathcal{G}^* = \langle G^*, +, \Omega \rangle$. Тогда справедливо: если один из Ω-группоидов $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ — Ω-группа, то другой является тоже Ω-группой.

Доказательство теоремы предоставляется читателю.

V.4.3. Пусть φ — гомоморфизм Ω-группоида $\mathcal{G}$ на Ω-группу $\mathcal{G}^*$. Тогда Ω-фактороид $\bar{\mathcal{D}}$ на $\mathcal{G}$, соответствующий гомоморфизму φ, ялвется Ω-группой. Нулевым элементом Ω-группы $\bar{\mathcal{D}}$ является множество A, всех тех элементов из $\mathcal{G}$, которым гомоморфизм φ сопоставляет нулевой элемент 0^* Ω-группы $\mathcal{G}^*$.

Доказательство. Поле $\bar{D}$ Ω-фактороида $\bar{\mathcal{D}}$ есть деформационное разбиение на $\mathcal{G}$. В силу [7] V.5.10. Ω-фактороид $\bar{\mathcal{D}}$ является изоморфным образом Ω-группы $\mathcal{G}^*$ и следовательно, ввиду V.4.2. он является Ω-группой. В силу [7] V.5.9. множество A в $\mathcal{G}$, содержащее элементы из $\mathcal{G}$, удовлетворяющие равенству $\varphi a = 0^*$, где 0^* есть нулевой элемент в $\mathcal{G}^*$ и только те элементы, является нулевым элементом в $\bar{\mathcal{D}}$.

V.4.4. Пусть φ — гомоморфизм Ω-группы $\mathcal{G}$ на Ω-группу $\mathcal{G}^*$. Тогда множество A всех тех элементов из $\mathcal{G}$, которым гомоморфизм φ сопоставляет нулевой элемент 0^* Ω-группы $\mathcal{G}^*$, представляет собой поле идеала $\mathcal{A}$ в $\mathcal{G}$ и Ω-фактор-группа $\mathcal{G}/\mathcal{A}$ является изоморфным образом Ω-группы $\mathcal{G}^*$.

Доказательство. Ω-фактороид $\bar{\mathcal{D}}$, соответствующий гомоморфизму φ является изоморфным образом Ω-группы $\mathcal{G}^*$. Следовательно $\bar{\mathcal{D}}$ — Ω-группа и ее нулевым элементом служит множество $A \subset \mathcal{G}$, всех тех элементов из $\mathcal{G}$, которым гомоморфизм φ сопоставляет нулевой элемент $0^* \in \mathcal{G}^*$. Поле $\bar{D}$ Ω-факторoида $\bar{\mathcal{D}}$ есть образующее разбиение на $\mathcal{G}$ и поэтому оно образовано каким-нибудь идеалом в $\mathcal{G}$. Полем этого идеала служит тот элемент из $\bar{\mathcal{D}}$, в котором содержится нулевой элемент 0 Ω-группы $\mathcal{G}$. Так как элементу $0 \in \mathcal{G}$ гомоморфизм φ ставит в соответствие нулевой элемент $0^* \in \mathcal{G}^*$, то полем этого идеала будет множество всех тех элементов из $\mathcal{G}$, которым гомоморфизм φ сопоставляет элемент $0^* \in \mathcal{G}^*$, т. е. множество A. Таким образом Ω-фактороид $\bar{\mathcal{D}}$ является Ω-фактор-группой $\mathcal{G}/\mathcal{A}$.

V.4.5. Пусть $\mathcal{A}$ — идеал Ω-группы $\mathcal{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. Отображение ν, сопоставляющее всякому элементу из $\mathcal{G}$ тот смежный класс Ω-фактор-группы $\mathcal{G}/\mathcal{A} = \langle \mathcal{G}/\mathcal{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$, Ω-группы $\mathcal{G}$ по идеалу $\mathcal{A}$, в котором содержится этот элемент, является гомоморфизмом $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}/\mathcal{A}$.

Доказательство. Определим отображение ν, $\mathcal{G}$ в $\mathcal{G}/\mathcal{A}$,

$$\nu x = x + \mathcal{A}, \tag{4.1.}$$

причем $x \in \mathcal{G}$. Если $x \neq y$, то $x + \mathcal{A} \neq y + \mathcal{A}$ и ν будет отображением $\mathcal{G}$ на

$\mathscr{G}/\mathscr{A}$, сопоставляющим всякому элементу x из $\mathscr{G}$ смежный класс из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, его содержащий. Пусть x_h, x_k — любая пара элементов из $\mathscr{G}$ в определенном порядке, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любая n-членная последовательность элементов из $\mathscr{G}$. Пусть, для $i = 1, 2, \ldots, n, h, k$, элементы $\nu x_i = x_i + \mathscr{A}$ являются элементами из $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ и пусть ω ($\bar{\omega}$) есть любая n-арная операция из Ω ($\bar{\Omega}$). Тогда в силе:

$$\nu x_h \oplus \nu x_k = (x_h + \mathscr{A}) \oplus (x_k + \mathscr{A}) = (x_h + x_k) + \mathscr{A} = \nu(x_h + x_k), \tag{4.2.}$$

$$(\nu x_1)(\nu x_2)\ldots(\nu x_n)\bar{\omega} = (x_1 + \mathscr{A})(x_2 + \mathscr{A})\ldots(x_n + \mathscr{A})\bar{\omega} =$$
$$= x_1 x_2 \ldots x_n \omega + \mathscr{A} = \nu(x_1 x_2 \ldots x_n \omega), \tag{4.3.}$$

что и доказывает теорему.

D.4.1. Гомоморфизм ν из теоремы V.4.5. называем естественным гомоморфизмом или естественной деформацией Ω-группы $\mathscr{G}$ на Ω-фактор-группу $\mathscr{G}/\mathscr{A}$.

V.4.6. Пусть существует гомоморфизм φ Ω-группы $\mathscr{G}$ на Ω-группу $\mathscr{G}^*$ и пусть A — множество всех тех элементов из $\mathscr{G}$, которые при гомоморфизме φ отобразятся на нулевой элемент 0^* Ω-группы $\mathscr{G}^*$. Пусть ν — естественный гомоморфизм Ω-группы $\mathscr{G}$ на Ω-фактор-группу $\mathscr{G}/\mathscr{A}$. Тогда существует изоморфизм ψ Ω-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ на Ω-группу $\mathscr{G}^*$ так, что имеет место равенство $\varphi = \psi\nu$.

Доказательство. Пусть $\varphi x = x^*$, $x \in \mathscr{G}$, $x^* \in \mathscr{G}^*$, где φ есть гомоморфизм $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$. Ввиду V.4.4. множество A всех элементов из $\mathscr{G}$, отображающихся на нулевой элемент $0^* \in \mathscr{G}^*$, представляет собой поле идеала в $\mathscr{G}$ и Ω-фактор-группа $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ является изоморфным образом Ω-группы $\mathscr{G}^*$. Изоморфизм ψ, $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ на $\mathscr{G}^*$, сопоставляет всякому элементу $x + \mathscr{A} \in \mathscr{G}/\mathscr{A}$ тот элемент $x^* \in \mathscr{G}^*$, который удовлетворяет равенству $\varphi x = x^*$, следовательно

$$\psi(x + \mathscr{A}) = x^* = \varphi x. \tag{4.4.}$$

Пусть ν — естественный гомоморфизм $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}/\mathscr{A}$. Образом каждого элемента из $\mathscr{G}$ при отображении ν является смежный класс Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, в котором этот элемент содержится, т. е.

$$\nu x = x + \mathscr{A}. \tag{4.5.}$$

Сложное отображение $\psi\nu$ ставит всякому элементу из $\mathscr{G}$ в соответствие какой-нибудь элемент из $\mathscr{G}^*$. Это отображение является гомоморфизмом и справедливо, что $\psi\nu x = \psi(\nu x) = \psi(x + \mathscr{A}) = x^* = \varphi x$.

V.4.7. Пусть Ω-группа $\mathscr{G}^*$ является изоморфным образом Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ Ω-группы $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$. Тогда существует гомоморфизм φ Ω-группы $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$, такой, что идеал $\mathscr{A}$ содержит все те элементы из $\mathscr{G}$, которым гомоморфизм φ сопоставляет нулевой элемент $0^* \in \mathscr{G}^*$.

Доказательство. Пусть Ω-группа $\mathscr{G}^*$ является изоморфным образом Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ на $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$, т. е. пусть существует изоморфизм

ψ Ω-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ на $\mathscr{G}^*$. Всякому элементу $x + \mathscr{A} \in \mathscr{G}/\mathscr{A}$ изоморфизм ψ сопоставляет какой-нибудь элемент $x^* \in \mathscr{G}^*$. Справедливо равенство

$$\psi(x + \mathscr{A}) = x^*. \tag{4.6.}$$

Отображение ν Ω-группы $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, определенное соотношением (4.5.), является естественным гомоморфизмом Ω-группы $\mathscr{G}$ на Ω-фактор-группу $\mathscr{G}/\mathscr{A}$. Поле идеала $\mathscr{A}$ служит нулевым элементом Ω-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ (V.2.3.). Изоморфизм ψ отображает на нулевой элемент $0^* \in \mathscr{G}^*$ только нулевой элемент Ω-группы $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, это значит, $\psi A = 0^*$. Сложное отображение $\varphi = \psi\nu$ является гомоморфизмом $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$ и для всякого элемента $a \in \mathscr{A}$ имеет место $\varphi a = \psi(\nu a) = \psi A = 0^*$, пока для любого элемента $x \in \mathscr{G}$, $x \notin A$, в силе $\varphi x = \psi(\nu x) = \psi(x + \mathscr{A}) = x^* \neq 0^* \in \mathscr{G}^*$. Видно, что A является множеством элементов из $\mathscr{G}$, отображающихся при φ на нулевой элемент 0^* Ω-группы $\mathscr{G}^*$ и только таких элементов. В силу теорем V.4.4. и V.4.7. можно формулировать первую теорему об изоморфизме — V.4.8.

V.4.8. Если существует гомоморфизм φ Ω-группы $\mathscr{G}$ на Ω-группу $\mathscr{G}^*$, то множество A всех тех элементов из $\mathscr{G}$, образом которых при φ является нулевой элемент 0^* Ω-группы $\mathscr{G}^*$, служит полем идеала $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$ и Ω-фактор-группа на $\mathscr{G}$ по идеалу $\mathscr{A}$ изоморфна Ω-группе $\mathscr{G}^*$.

Если Ω-группа $\mathscr{G}^*$ является изоморфным образом Ω-фактор-группы на $\mathscr{G}$ по какому-нибудь идеалу $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$, то существует гомоморфизм φ Ω-группы $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$, такой, что $\mathscr{A}$ содержит все элементы из $\mathscr{G}$, которым φ сопоставляет нулевой элемент 0^* Ω-группы $\mathscr{G}^*$ и только те элементы.

V.4.9. Вторая теорема об изоморфизме.
Пусть $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — Ω-подгруппы Ω-группы $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{A}$ — идеал в $\mathscr{B}$. Тогда Ω-фактор-группа $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{A}]/\mathscr{A}$ будет изоморфна Ω-фактор-группе$(\mathscr{C} \cap \mathscr{B})/(\mathscr{C} \cap \mathscr{A})$, причем изоморфизм определен инцидентностью элементов.

Доказательство. Ввиду V.2.10. Ω-фактороиды $\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/\mathscr{A}$ и $\mathscr{C} \sqcap \mathscr{B}/\mathscr{A}$ есть Ω-фактор-группы в $\mathscr{G}$ определенные отношениями (2.23.) и (2.24.). В силу теоремы V.5.14. Ω-фактороиды $\mathscr{C} \sqsubset \mathscr{B}/\mathscr{A}$ и $\mathscr{C} \sqcap \mathscr{B}/\mathscr{A}$ изоморфны и изоморфизм определен инцидентностью єлементов.

Следствие. Если в частности $\mathscr{B} = \mathscr{G}$, то Ω-фактор-группа $(\mathscr{C} + \mathscr{A})/\mathscr{A}$ является изоморфным образом Ω-фактор-группы $\mathscr{C}/(\mathscr{C} \cap \mathscr{A})$, причем изоморфизм определен инцидентностью элементов.

V.4.10. Третья теорема об изоморфизме. Пусть $\mathscr{B}$ — идеал в Ω-группе $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}_1$ — идеал в Ω-фактор-группе $\mathscr{G}/\mathscr{B}$. Тогда суммой элементов Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$, содержащихся в $\mathscr{B}_1$, является поле какого-нибудь идеала $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$ и справедливо: Ω-фактор-группа $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ будет изоморфным образом $\mathscr{G}/\mathscr{A}$, причем изоморфизм всякому элементу $\bar{b}$ Ω-фактор-группы $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ сопоставляет сумму всех элементов $\bar{b}$ Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$, содержащихся в $\bar{\bar{b}}$.

Доказательство. В силу V.5.15. Ω-фактор-группа $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/\mathscr{B}_1$ является изоморфным образом покрытия $\overline{\mathscr{A}}$ Ω-фактор-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$, вынужденного Ω-фактор-группой $(\mathscr{G}/\mathscr{B})/\mathscr{B}_1$ и образом всякого элемента $\bar{\bar{b}} \in (\mathscr{G}/\mathscr{B})\mathscr{B}_1$ при изоморфизме φ служит тот элемент $\bar{a} \in \overline{\mathscr{A}}$, который является суммой всех элементов $\bar{b} \in \mathscr{G}/\mathscr{B}$, содержащихся в $\bar{\bar{b}}$. Ввиду V.2.5. сумма всех элементов Ω-группы $\mathscr{G}/\mathscr{B}$, содержащихся в $\mathscr{B}_1$, будет полем какого-нибудь идеала $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$ и $\overline{\mathscr{A}}$ будет Ω-фактор-группой $\mathscr{G}/\mathscr{A}$. Кроме того справедливо, что $\mathscr{B}_1 = \mathscr{A}/\mathscr{B}$.

V.4.11. Теорема о пяти Ω-группах.
Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$. Пусть $\mathscr{B}$ — идеал в $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ — идеал в $\mathscr{C}$. Пусть $\mathscr{U}$ идеал в Ω-подгруппе $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, удовлетворяющий соотношению вида

$$(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) \supset \mathscr{U} \supset [(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})].$$

Тогда Ω-фактор-группы $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/(\mathscr{U} + \mathscr{B})$ и $[(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/(\mathscr{U} + \mathscr{D})$ изоморфны.

Доказательство. Ввиду V.2.16. и V.2.1. левосторонние разложения (2.34.) и (2.35.) аддитивных групп Ω-групп $(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}$ и $(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}$ по подгруппам $\mathscr{U} + \mathscr{B}$ и $\mathscr{U} + \mathscr{D}$ являются образующими разбиениями и поэтому они являются полями Ω-фактор-групп

$$[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/(\mathscr{U} + \mathscr{B}) \text{ и } [(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/(\mathscr{U} + \mathscr{D}). \qquad (4.7.)$$

Ввиду V.2.16. Ω-фактор-группы (4.7.) будут сопряженными и в силу [7] V.5.13. они изоморфны.

V.4.12. Теорема Цассенхауза.
Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппы в Ω-группе $\mathscr{G}$, пусть $\mathscr{B}$ — идеал в $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ — идеал в $\mathscr{C}$. Тогда Ω-фактор-группы $[(\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) + \mathscr{B}]/[(\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + \mathscr{B}]$ и

$$[(\mathscr{C} \cap \mathscr{A}) + \mathscr{D}]/[(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}) + \mathscr{D}]$$

изоморфны.

Доказательство. Теорема является частным случаем теоремы V.4.11. при $\mathscr{U} = (\mathscr{A} \cap \mathscr{D}) + (\mathscr{C} \cap \mathscr{B})$.

V.4.13. Всякие две цепи $[\mathscr{A}]$ и $[\mathscr{B}]$ Ω-фактор-групп от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$ обладают изоморфными уплотнениями $[\mathscr{A}^\circ]$, $[\mathscr{B}^\circ]$ и при сильном отображении соответствующие Ω-фактор-группы изоморфны.

Доказательство. Ввиду теоремы V.3.3., цепи $[\mathscr{A}]$ и $[\mathscr{B}]$ обладают сопряженными уплотнениями $[\mathscr{A}^\circ]$, $[\mathscr{B}^\circ]$, вида (3.3.) и (3.4.). Отдельные члены этих уплотнений являются Ω-фактор-группами вида (3.5.) и (3.6.). Так как цепи $[\mathscr{A}^\circ]$, $[\mathscr{B}^\circ]$ сопряжены, то они в силу [7] V.5.18. изоморфны, причем соответствующими элементами при сильном отображении являются Ω-фактор-группы $\mathscr{A}^\circ_{\gamma,\delta-1} =$

$= \mathscr{A}_{\gamma,\delta-1}/\mathscr{A}_{\gamma}$ и $\mathscr{B}^{\circ}_{\delta,\gamma-1}/\mathscr{B}_{\delta,\gamma}$, определенные соотношениями (3.5.) и (3.6.) при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$.

V.4.14. Пусть в Ω-группе $\mathscr{G}$ существуют композиционные цепи Ω-подгруппы $\mathscr{A}$ относительно Ω-подгруппы $\mathscr{B}$. Тогда всякие две композиционные цепи $[\overline{\mathscr{A}}]$ и $[\overline{\mathscr{B}}]$ Ω-подгруппы $\mathscr{A}$ относительно $\mathscr{B}$ изоморфны.

Доказательство. Пусть $[\overline{\mathscr{A}}] = \mathscr{A}_0/\mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_{\alpha-1}/\mathscr{A}_{\alpha}$ и $[\overline{\mathscr{B}}] = \mathscr{B}_0/\mathscr{B}_1 \to \ldots \to \mathscr{B}_{\beta-1}/\mathscr{B}_{\beta}$ — композиционные цепи Ω-подгруппы $\mathscr{A}$ относительно Ω-подгруппы $\mathscr{B}$ в Ω-группе $\mathscr{G}$. Справедливо, что $\mathscr{A}_0 = \mathscr{B}_0 = \mathscr{A}$, $\mathscr{A}_{\alpha} = \mathscr{B}_{\beta} = \mathscr{B}$. Ввиду V.3.2. цепи $[\overline{\mathscr{A}}]$ и $[\overline{\mathscr{B}}]$ будут присоединенными и следовательно в силу [7] V.5.20. изоморфными.

V.4.15. Теорема Шрейера
Всякие две цепи Ω-фактор-групп от $\mathscr{G}$ до $\mathscr{O} = \langle\{0\}, +, \Omega\rangle$ в Ω-группе $\mathscr{G}$ обладают изоморфными уплотнениями.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы V.5.13. при $\mathscr{A} = \mathscr{G}$ и $\mathscr{B} = \mathscr{O}$.

V.4.16. Теорема Жордана-Гельдера
Пусть в Ω-группе $\mathscr{G}$ существуют композиционные цепи Ω-группы $\mathscr{G}$ относительно Ω-подгруппы $\mathscr{O} = \langle\{0\}, +, \Omega\rangle$. Тогда всякие две композиционные цепи Ω-группы $\mathscr{G}$ относительно $\mathscr{O}$ изоморфны.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы V.4.14. при $\mathscr{A} = \mathscr{G}$ и $\mathscr{B} = \mathscr{O}$.

Библиография

[1] *Borůvka, O.*: Základy teorie grupoidů a grup, ČSAV, Praha 1962.
[2] *Sedláček, D.*: Grupoidy a grupy s operátory, AUPO, T 7 (1961), 33—66.
[3] *Sedláček, L.*: Universální algebry, AUPO, T 15 (1964), 39—68.
[4] *Kuroš, A. G.*: Kapitoly z obecné algebry, ČSAV, Praha 1968, 89—113.
[5] *Курош, А. Г.*: Теория групп, НАУКА, Москва 1967, 90—94, 447—449.
[6] *Кон, П.*: Универсальнмя алгебра, МИР, Москва 1968, 62—77.
[7] *Poncová, L.*: Группоиды с мультиоператорами, AUPO, T 53 (1977) s.

Summary

GROUPS WITH MULTIOPERATORS

Lenka Poncová

This paper is dealing with the theory of groups with multioperators and topically follows the author's article "Groupoids with multioperators". The theory of Ω-groups here is being built on the

theory of decompositions in a set and the results achieved in the above cited article have been applied to Ω-groups. There are proved three theorems on isomorphism of Ω-groups and a five-Ω-group theorem which is a generalization of the five-group theorem in [1] whose special case is the theorem of Zassenhaus. From the chain theory of Ω-factoroids in groupoids with multioperators treated in [7] we obtain some considerations on chains of Ω-groups which constitute the content of the fourth and last part of this paper. This part is concluded by the theorems of Schreier and by Jordan—Hölder.

Shrnutí

GRUPY S MULTIOPERÁTORY

Lenka Poncová

Práce obsahuje teorii grup s multioperátory a tematicky navazuje na článek „L. Poncová: Grupoidy s multioperátory". Teorie Ω-grup je zde budována na základě teorie rozkladů v množině a výsledky dosažené ve výše citovaném článku jsou zde aplikovány na Ω-grupy. V práci jsou dokázány tři věty o izomorfismu Ω-grup, věta o pěti Ω-grupách, která je zobecněním věty o pěti grupách z práce [1], jejímž speciálním případem je věta Zassenhausova. Z teorie řetězců Ω-faktoroidů v grupoidech s multioperátory, uvedené v práci [7], vyplývají úvahy o řetězcích Ω-grup, které jsou obsahem poslední ze čtyř částí, do nichž je článek rozčleněn. Tuto část uzavírá věta Schreierova a věta Jordan—Hölderova. Práce si nečiní nárok na úplnost.