Jiří Zeman

Über eine Anwendung der Phasentheorie

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 16 (1977), No. 1, 137--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120043

1977 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 53

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ÜBER EINE ANWENDUNG DER PHASENTHEORIE

JIŘÍ ZEMAN

(*Eingelangt am 31. März 1976*)

Die vorliegende Arbeit löst folgendes Problem: Vorgelegt sei eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u'' + q(t) \,.\, u = 0, \tag{1}$$

wo die Funktion $q(t)$ stetig und positiv im Intervall j ist. Suchen wir alle Funktionen $q(t)$ für die eine solche Basis u_1, u_2 der DGl (1) besteht, daß die erste Phase $\alpha(t)$ von Integralen u_1, u_2 eine primitive Funktion zu $\sqrt{q(t)}$ im Intervall j darstellt.

Bemerkung. Auf die Gleichung (1), wo $q(t) = \lambda^2 - \varrho(t)$, lässt sich z. B. in der Quantenmechanik die Problemlösung der eindimensionalen Partikelbewegnung unter Potentialeinfluss, der (bis auf die multiplikative Konstante) gleich $\varrho(t)$ und (wiederum bis auf die multiplikative Konstante) Energie dieser Partikel ist, überführen. Die Partikelbewegung verläuft nur insoweit $\varrho(t) < \lambda^2$ ist. Falls in irgendeinem Punkt $t \in j$ $\varrho(t) \geqq \lambda^2$ ist, dann liegt im Intervall j ein solcher Punkt t_0 vor, dass $\varrho(t_0) = \lambda^2$. Nach den klassischen Vorstellungen ist im Punkt t_0 die gesamte Partikelenergie gleich ihrer potentiellen Energie und ihre kinetische Energie demnach verschwindet. Im nächstfolgenden Zeitpunkt ändert sich die Richtung der Partikelbewegung. In der Theorie der Differentialgleichungen werden diese Übergangspunkte genannt.

Wie bekannt ([4]), für $q(t) = \lambda^2 - \varrho(t) > 0$ für die Basis u_1, u_2 der DGl (1) gelten die Formeln:

$$u_1 \cong \frac{1}{\sqrt[4]{q(t)}} \,.\, \sin \int \sqrt{q(t)}\, \mathrm{d}t,$$

$$u_2 \cong \frac{1}{\sqrt[4]{q(t)}} \,.\, \cos \int \sqrt{q(t)}\, \mathrm{d}t,$$

aus denen wir schliessen, dass die erste Phase $\alpha(t)$ von Integralen u_1, u_2 eine Funktion im gewissen Sinne „nahe" der primitiven Funktion zu $\sqrt{q(t)}$ ist.

Satz. *Damit eine Basis u_1, u_2 der DGl (1) im Intervall j derart existieren möge, dass die erste Phase $\alpha(t)$ von Integralen u_1, u_2 eine primitive Funktion zu $\sqrt{q(t)}$ in j ist, wird es notwendig und genügend, wenn die (positive) Funktion $q(t)$ im Intervall j der nichtlinearen DGl 2. Ordnung*

$$4zz'' - 5z'^2 = 0 \tag{2}$$

genügt.

Beweis: a) Die Funktion $\alpha(t)$ als eine erste Phase genügt in j der nichtlinearen DGl 3. Ordnung

$$-\{\alpha, t\} - \alpha'^2 = -q(t).$$

Es gilt

$$\alpha'(t) = \sqrt{q}, \qquad \alpha''(t) = \frac{q'}{2\sqrt{q}}, \qquad \alpha'''(t) = \frac{1}{2}\frac{q''}{\sqrt{q}} - \frac{1}{4}\frac{q'^2}{q\sqrt{q}},$$

und somit identisch in j

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{q''}{q} - \frac{1}{4}\frac{q'^2}{q^2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{q'}{2q}\right)^2 - q = -q,$$

also

$$4qq'' - 5q'^2 = 0.$$

b) Es sei die Funktion $q(t)$ eine Lösung der DGl (2) in j. Dann die Funktion

$$\alpha(t) = \int \sqrt{q(t)}\,\mathrm{d}t$$

genügt in j der nichtlinearen DGl

$$-\{\alpha, t\} - \alpha'^2 = -q(t),$$

und ist damit eine Phase der DGl (1) bei gewisser Basis u_1, u_2, wie zu beweisen war.

Alle positiven Lösungen der DGl (2) kann man durch die Formel ([3], 6.162)

$$z = \frac{1}{(at + b)^4}, \tag{3}$$

ausdrücken, wo a, b beliebige Konstanten darstellen, $a^2 + b^2 > 0$. Für solche a, b ist es möglich j so zu wählen, dass $at + b \neq 0$ für $t \in j$ ist, z. B. $j = \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$.

Demnach die DGl (1) mit der Funktion $q(t) = \frac{1}{(at + b)^4}$ besitzt die in unserer Einleitung geforderte Eigenschaft. Diese Tatsache ist direkt verifizierbar:

1. Wenn $a = 0$, so hat diese Gleichung die Basis $u_1 = \sin \frac{t}{b^2}$, $u_2 = \cos \frac{t}{b^2}$. Es gilt $\frac{u_1}{u_2} = \operatorname{tg} \frac{t}{b^2}$ und für die Phase α dieser Basis ergibt sich die Formel

$$\alpha(t) = \frac{t}{b^2} + k\pi.$$

Also α ist eine primitive Funktion zu $\sqrt{q} = \frac{1}{b^2}$ in j.

2. Wenn $a \neq 0$, so hat diese Gleichung die Basis $u_1 = -(at + b) \sin \frac{1}{a(at + b)}$, $u_2 = (at + b) \cos \frac{1}{a(at + b)}$. Es gilt $\frac{u_1}{u_2} = -\operatorname{tg} \frac{1}{a(at + b)}$ und für die Phase α, dieser Basis ergibt sich die Formel

$$\alpha(t) = -\frac{1}{a(at + b)} + k\pi.$$

Also wiederum α ist eine primitive Funktion zu $\sqrt{q(t)} = \frac{1}{(at + b)^2}$ in j.

Bemerkung. Das eben bewiesene Ergebnis ermöglicht uns z. B. zu behaupten, dass die Bedingungen (8.7) in [2], Kap. XI, § 8 nicht nötig sind.

Literaturverzeichnis

[1] *Borůvka, O.*: Lineare Diferentialtransformationen 2. Ordnung. DWV, Berlin 1967.

[2] *Hartman, P.*: Ordinary differential equations. New York—London—Sydney 1964 (russische Auflage 1970).

[3] *Kamke, E.*: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Leipzig 1959 (russische Auflage 1965).

[4] *Mors, P.—Feshbach, H.*: Methods of theoretical physics II. New York—Toronto—London 1953 (russische Auflage 1960).

Shrnutí

O JEDNOM POUŽITÍ TEORIE FÁZÍ

Jiří Zeman

V práci je nalezena nutná a postačující podmínka k tomu, aby existovala taková báze u_1, u_2 diferenciální rovnice

$$u'' + q(t)\, u = 0 \tag{1}$$

v intervalu j, že první fáze $\alpha(t)$ této báze je primitivní funkce k funkci $\sqrt{q(t)}$ v j.

Резюме

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ФАЗ

Иржи Земан

В работе найдено необходимое и достаточное условие для существования такого базиса u_1, u_2 дифференциального уравнения

$$u'' + q(t)\, u = 0 \tag{1}$$

в промежутке j, первая фаза которого является первообразной функцией для функци $\sqrt{q(t)}$ в j.