Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Jitka Kojecká; Horymír Netuka

Einige Bemerkungen über Nullpunkte im bestimmten dreidimensionalen Raume stetiger Funktionen

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 15 (1976), No. 1, 51--55

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120040`

1975 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 46

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER NULLPUNKTE IM BESTIMMTEN DREIDIMENSIONALEN RAUME STETIGER FUNKTIONEN

JITKA KOJECKÁ, HORYMÍR NETUKA

(Eigelangt am 2. 9. 1974)

M. Ráb untersucht in [1] oszillatorische Eigenschaften von Integralen einer selbstadjungierten linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir einen speziellen dreidimensionalen Raum S^3 stetiger Funktionen mit der Basis (u^2, uv, v^2) besonders die Nullpunktenverteilung. Es wird dadurch die Frage beantwortet in wie weit die Eigenschaft der Nullpunktenverteilung, wie in [1] untersucht, bloß von den Eigenschaften S^3, d. h. nicht von der Lösung der Differentialgleichung dritter Ordnung abhängt.

Unser besonderer Dank gilt Herrn RNDr. S. Trávníček, CSc., von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Palacky Universität in Olomouc, für seine wertvolle Ratschläge betreffend dieser Arbeit.

1. Definition des dreidimensionalen Raumes stetiger Funktionen

Vereinbarung 1.1. In der ganzen Arbeit bedeuten i, j offene Intervalle der reellen Zahlengerade.

Definition 1.1. Es seien u, v, w reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen, welche auf i definiert sind. Wir werden diese Funktionen als auf i (linear) abhängig bezeichnen falls es drei reelle Zahlen a, b, c gibt derart daß $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ und $au + bv + cw \equiv 0$ auf dem ganzen Intervalle i gilt. Dieselbe Funktionen sind auf i (linear) unabhängig wenn für kein Zahlentripel a, b, c, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ und kein Intervall $j \subset i$ die Identität $au + bv + cw \equiv 0$ auf j gilt.

Definition 1.2. Es seien u, v, w drei Funktionen die auf i stetig und unabhängig sind. Die Menge S^3 aller Funktionen der Form $y = c_1u + c_2v + c_3w$, wo c_1, c_2, c_3 beliebige reelle Zahlen bedeutet, heißt der lineare dreidimensionale Raum stetiger Funktionen, kurz der Raum S^3.

Vereinbarung 1.2. Den zweidimensionalen Raum stetiger Funktionen aus der Definition 1.2 [2] werden wir mit S^2 bezeichnen.

Bemerkung 1.1. Der Raum S^3 besitzt einige ähnliche Eigenschaften mit dem Raume S^2. Es ist möglich zu beweisen, daß die beliebige drei Funktionen $y_1, y_2, y_3 \in S^3$ entweder abhängig oder unabhängig sind (siehe S. 1.1, [2]), daß jede Funktion $y \in S^3$ in der Form $y = c_1 u_1 + c_2 v_1 + c_3 w_1$ geschrieben werden kann, wo u_1, v_1, w_1 unabhängige Funktionen aus S^3 sind und c_1, c_2, c_3 passende reelle Zahlen (siehe S. 1.2, [2]). Aus diesem Grunde heißt jedes geordnete Funktionentripel (u, v, w) mit unabhängigen u, v, w eine Basis dieses Raumes.

Lemma 1.1. Zu jedem Punkte $t_0 \in i$ gibt es mindestens zwei unabhängige Funktionen aus S^3 die t_0 für gemeinsamen Nullpunkt haben (hier ist die Unabhängigkeit laut D.1.1, [2] gemeint).

Beweis: Wir betrachten die Gleichung

$$u(t_0)\, c_1 + v(t_0)\, c_2 + w(t_0)\, c_3 = 0$$

für die Unbekannten c_1, c_2, c_3, wo (u, v, w) eine Basis in S^3 ist. Sind alle drei Koeffizienten gleich Null, ist t_0 Nullpunkt aller Funktionen der Basis. Ist aber mindestens einer der Koeffizienten von Null verschieden, so besitzt unsere Gleichung zwei unabhängige Lösungen $c_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$. Zu diesen Lösungen gehören zwei Funktionen $y^{(j)} = c_1^{(j)} u + c_2^{(j)} v + c_3^{(j)} w$ $(j = 1, 2)$ aus S^3, welche offenbar unabhängig sind.

Bemerkung 1.2. Es ist klar, daß wenn drei unabhängige Funktionen des Raumes S^3 einen gemeinsamen Nullpunkt $t_0 \in i$ haben, stellt t_0 gemeinsamen Nullpunkt aller Funktionen, die zu S^3 gehören (vgl. S. 1.3, [2]). In Übereinstimmung mit [2] bezeichnen wir gemeinsame Nullpunkte aller Funktionen aus S^3 als singuläre Punkte; Punkte die nicht singulär sind heißen regulär. Solcher Raum S^3, dessen Definitionsbereich nur reguläre Punkte besitzt heißt regulär; wenn es im Definitionsbereiche von S^3 mindestens einen singulären Punkt gibt, heißt S^3 singulär. Ferner sehen wir, daß wenn drei Funktionen einen gemeinsamen Nullpunkt haben, der regulär ist, müssen diese Funktionen abhängig sein (vgl. S. 1.4, [2]).

Lemma 1.2. Es seien $t_1 < t_2$ beliebige Zahlen aus i. Dann gibt es eine Funktion $y \in S^3$ so, daß t_1 und t_2 Nullpunkte von y sind.

Beweis: Das System

$$\begin{aligned} u(t_1)\, c_1 + v(t_1)\, c_2 + w(t_1)\, c_3 &= 0 \\ u(t_2)\, c_1 + v(t_2)\, c_2 + w(t_2)\, c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

für die drei Unbekannten c_1, c_2, c_3, wo (u, v, w) eine Basis von S^3 ist, besitzt eine nichttriviale Lösung dann, wenn mindestens einer der Koeffizienten von Null verschieden ist. Zu dieser nichttrivialen Lösung gehört die Funktion $y \not\equiv 0$ aus S^3, für welche offenbar $y(t_1) = y(t_2) = 0$ gilt. Sind alle Koeffizienten von (1) gleich Null, sind t_1, t_2 singuläre Punkte, d. h. Nullpunkte einer beliebigen Funktion aus S^3.

2. Ein Satz über die Verteilung der Nullpunkte der Funktionen aus S^3 mit der Basis (u^2, uv, v^2).

Satz 2.1. Es seien u, v reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen, die auf i definiert sein mögen. Die Funktionen u, v sind genau dann unabhängig, wenn auch die Funktionen u^2, uv, v^2 unabhängig sind.

Beweis: I. Die Funktionen u, v seien unabhängig. Seien die Funktionen u^2, uv, v^2 nicht unabhängig, so könnte man reelle Zahlen $a, b, c, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ und $j \subset i$ so finden, daß auf j die Identität

$$au^2 + buv + cv^2 \equiv 0 \tag{2}$$

gilt. Wenn mindestens eine der Zahlen a, b, c gleich Null ist, führt (2) auf einen Widerspruch zu der Unabhängigkeit von u, v. Wir können aus diesem Grunde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ voraussetzen. Aus der Unabhängigkeit von u, v folgt die Existenz eines Intervalls $j_1 \subset j$ auf dem $v(t) \neq 0$. Aus (2) folgt dann

$$a\left(\frac{u}{v}\right)^2 + b\frac{u}{v} + c = 0 \qquad \text{in } j_1$$

und also

$$\frac{u}{v} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{in } j_1 .$$

Hieraus folgt, daß $u = konst.\ v$ auf j_1 gilt, d. h. daß u, v nicht unabhängig sind. Die Identität (2) kann also in keinem $j \subset i$ gelten, womit die erste Behauptung des Satzes bewiesen ist.

II. Wenn die Funktionen u^2, uv, v^2 unabhängig sind, so sind offenbar im Sinne der Definition 1.1 [2] auch u^2 und v^2 unabhängig und somit auch u, v.

Vereinbarung 2.1. Im folgenden werden wir nur solche dreidimensionalen Räume S^3 betrachten, deren Basis das Funktionentripel (u^2, uv, v^2) darstellt, wobei (u, v) eine Basis des zweidimensionalen Raumes S^2 ist. Das Definitionsintervall von diesen Räumen wird mit i bezeichnet. Über S^2 werden wir weiter voraussetzen, daß er regulär und eines bestimmten Typus ist. Die Funktion $y \equiv 0$ schließen wir aus.

Bemerkung 2.1. Aus der Regularität von S^2 folgt unmittelbar die Regularität von S^3 und umgekehrt.

Satz 2.2. a) Es seien $u, v \in S^2$ unabhängige Funktionen derart, daß $u(t_0) = 0$ und besitze $y \in S^3$ den Nullpunkt t_0. Die Funktion y läßt sich nun schreiben in der Form

$$y = c_1 u^2 + c_2 uv, \tag{3}$$

wo c_1, c_2 geeignete Konstanten sind.

b) Wenn wir noch weiter voraussetzen, daß u in t_0 monoton ist, dann ist $y \in S^3$ gerade dann im Punkte t_0 monoton (ändert nicht ihr Zeichen in t_0) genau dann, wenn in der Formel (3) $c_2 \neq 0$ ($c_2 = 0$).

Beweis: *a*) Da die Funktionen u, v aus der Voraussetzung des Satzes eine Basis bilden, gibt es Konstanten c_1, c_2, c_3 so, daß $y(t) = c_1u^2(t) + c_2u(t)\,v(t) + c_3v^2(t)$. Für $t = t_0$ erhält man somit $c_3 = 0$; folglich gilt (3).

b) Wir werden beweisen, daß y ihr Zeichen in t_0 dann und nur dann nicht ändert, wenn $c_2 = 0$. Zuerst sehen wir unmittelbar, daß die Funktion $y = c_1u^2$, wo $u(t_0) = 0$ ist, in t_0 einen Nullpunkt besitzt, in dem sie ihr Zeichen behält. Andererseits, wenn $y \in S^3$ einen Nullpunkt t_0 besitzt (in welchem sie ihr Zeichen behält), kann sie nach *a*) in der Form $y = c_1u^2 + c_2uv$ geschrieben werden, wo $u(t_0) = 0$ ist. Falls $c_2 \neq 0$, sind die Funktionen u und $\bar{y} = c_1u + c_2v$ unabhängig, folglich $\bar{y} \neq 0$ in gewisser Umgebung von t_0. Die Funktion $y = u(c_1u + c_2v)$ ist sodann monoton im Punkt t_0, womit sich ein Widerspruch ergibt, so daß $c_2 = 0$.

Der Rest des Beweises liegt auf der Hand.

Korollar 2.1. Jede Funktion $y \in S^3$, welche mindestens einen Nullpunkt t_0 besitzt, kann in der Form

$$y = u\bar{y} \tag{4}$$

geschrieben werden, wo $u, \bar{y} \in S^2$ geeignete Funktionen sind und $u(t_0) = 0$ gilt.

Bemerkung 2.2. Aus den Ergebnissen von [4] folgt: Ist die Phase $\alpha(t)$ von S^2 im Intervall $j \subset i$ monoton, dann ändert jede Funktion von S^2 ihr Zeichen in allen Nullpunkten in j. Daraus ergibt sich weiter in bezug auf Satz 2.2: Ist die Phase $\alpha(t)$ im ganzen Intervall i monoton und besitzt die Funktion $y \in S^3$ einen Nullpunkt wo ihr Zeichen nicht geändert wird, so hat sie alle Nullpunkte von dieser Eigenschaft.

Vereinbarung 2.2. Bei der Bestimmung der Anzahl der Nullpunkte von Funktionen, werden wir solche Nullpunkte in den die Funktion monoton ist einfach und solche in den die Funktion ihr Zeichen behält zweifach zählen.

Satz 2.3. Es seien $y_1, y_2 \in S^3$ beliebige Funktionen, die Nullpunkte besitzen. Die Phase $\alpha(t)$ des Raumes S^2 sei monoton auf i. Wenn wir mit $t_{i-1} \leqq t_i \leqq t_{i+1}$ drei benachbarte Nullpunkte von y_1 bezeichnen, dann liegen im Intervalle $(t_{i-1}, t_{i+1}\rangle$ gerade zwei Nullpunkte von y_2.

Beweis: Es sei $y_1 = u_1\bar{y}_1$, $y_2 = u_2\bar{y}_2$ mit $u_1(t_{i-1}) = 0$. Falls $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$, dann folgt aus Satz 7 [4], daß t_{i+1} der rechtsbenachbarte konjugierte Punkt zu t_{i-1} ist, d. h. $u(t_{i+1}) = 0, \bar{y}_1 = 0$. Falls t_{i-1} der zweimalige Nullpunkt von y_1 ist, dann sind $u_1, \bar{y}_1$ abhängig und $t_i = t_{i-1}$ oder $t_i = t_{i+1}$ so daß wiederum t_{i+1} der rechtsbenachbarte konjugierte Punkt zu t_{i-1} ist. Jede der Funktionen $u_2, \bar{y}_2$ besitzt also in $(t_{i-1}, t_{i+1}\rangle$ genau einen Nullpunkt (wieder nach Satz 7 [4]), was nach der Vereinbarung 2.2 bedeutet, daß y_2 im angeführten Intervall genau zwei Nullpunkte besitzt.

Satz 2.4. Es seien S_1^3 bzw. S_2^3 dreidimensionale Räume mit den Basen (u_1^2, u_1v_1, v_1^2) bzw. (u_2^2, u_2v_2, v_2^2) und S_1^2 bzw. S_2^2 seien die Räume mit den Basen (u_1, v_1) bzw. (u_2, v_2). Die Phase $\alpha_1(t)$ des Raumes S_1^2 möge in i monoton sein. Wenn noch eine vollständige Transformation $T(z, x)$ von S_1^2 auf S_2^2 existiert, so haben die Nullpunkte jeder zwei Funktionen aus S_1^3 und die Nullpunkte jeder zwei Funktionen aus S_2^3 gleichzeitig die Eigenschaft der Nullpunktenverteilung, die im Satze 2.3 beschrieben ist.

Beweis: Es sei nun die Phase $\alpha_1(t)$ vom Raum S_1^2, die im Intervall i monoton ist, folglich die Funktionen aus S_1^3 haben die Eigenschaft der Nullpunktenverteilung aus Satz 2.3. Dann nach den Sätzen 10 und 7 [4] ergibt sich aus der Existenz einer vollständigen Transformation $T(z, x)$ die Monotonie der Phase $\alpha_2(t)$ von S_2^2 und somit haben auch die Funktionen aus S_2^3 die Eigenschaft der Nullpunktenverteilung.

Satz 2.5. Es sei $Q(t)$ eine stetige Funktion auf dem Intervall i und besitze sie auf i eine Ableitung. Alle Lösungen der linearen selbstadjungierten Differentialgleichung dritter Ordnung in der Form

$$y''' + 2Qy' + Q'y = 0 \tag{5}$$

bilden einen linearen dreidimensionalen Raum stetiger Funktionen S^3.

Beweis: Von der Differentialgleichung (5) ist es bekannt, daß das Fundamentalsystem der Lösungen von der Form u^2, uv, v^2 ist, wo u, v unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{2}Qy = 0 \tag{6}$$

sind. Unter der Stetigkeitsvoraussetzung von $Q(t)$ auf i ergibt sich aus der Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung, daß die Lösungen der Differentialgleichung (6) den Raum S^2 (siehe [5]) bilden, und in bezug auf Satz 2.1 bilden die Lösungen der Differentialgleichung (5) den Raum S^3.

Bemerkung 2.3. Unter den Voraussetzungen von [1] bilden die Lösungen der Differentialgleichung (6) einen regulären Raum bestimmten Typus mit einer monotonen Phase. Alle Eigenschaften der Funktionen von S^3, die in den Sätzen der vorliegenden Arbeit bewiesen wurden, gelten also auch für den Raum der Lösungen der Differentialgleichung (5). Dies im konkreten Sinne bedeutet, daß die Folgerung 2 aus Satz 3 die charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichung (5) eigentlich nicht behandelt, sondern die Folgerung der allgemeinen Eigenschaften der Funktionen von S^3 ist. Ähnlich vergleiche etwa Lemmas 4 und 5 [6] mit Satz 2.2 und Folgerung 2.1 der vorliegenden Arbeit.