Jitka Kojecká

Lineare zweidimensionale Räume von stetigen Funktionen mit stetigen ersten Ableitungen

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 14 (1974), No. 1, 17--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120030

1974 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 45

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

LINEARE ZWEIDIMENSIONALE RÄUME VON STETIGEN FUNKTIONEN MIT STETIGEN ERSTEN ABLEITUNGEN

JITKA KOJECKÁ

(Eingelangt am 20. 6. 1973.)

0. In Anlehnung an die Theorie von O. Borůvka über die Transformationen der Lösungen linearer zweidimensionaler Differentialgleichungen 2. Ordnung studierte K. Stach in seinen Arbeiten (1966, 1967) das Problem linearer zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. In der vorliegenden Arbeit werden die Grundeigenschaften linearer zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen mit stetiger erster Ableitung einer Untersuchung unterzogen. Ausser auf die schon zitierten Veröffentlichungen von K. Stach wird auch auf die Arbeit von S. Trávníček und J. Kojecká (1972) zurückgegriffen und die in dieser Veröffentlichung erzielten Ergebnisse sollen auch weiterhin zur Anwendung kommen.

Im Grunde genommen befassen wir uns in der gesamten Arbeit mit den Funktionen von $C_1(i)$. Falls nämlich $u, v \in C_1(i)$ sind und (u, v) die Basis eines im Intervall i definierten linearen zweidimensionalen Raumes S darstellt, ergibt sich offensichtlich $S \subset C_1(i)$. Die Menge der Ableitungen aller Funktionen von S bezeichnen wir mit S'; folglich ergibt sich $S' \subset C_0(i)$.

Lemma 0.1. Es seien $y_1, y_2 \in C_1(i)$ abhängig. Demzufolge sind ihre Ableitungen y'_1, y'_2 ebenfalls abhängig.

Der Beweis hierfür geht aus der Abhängigkeitsdefinition und aus der Ableitung der Gleichheit $ay_1 + by_2 = 0$ in i hervor.

Bemerkung 0.1. Sind $y_1, y_2 \in C_1(i)$ unabhängig, ergeben sich für ihre Ableitungen y'_1, y'_2 drei mögliche Fälle:

1. y'_1, y'_2 sind weder abhängig, noch unabhängig; z. B.

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{für } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \dfrac{(t-1)^3}{3} + 1, & \text{für } t \in (1, 2\rangle, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} t - 1 & \text{für } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \sin(t-1), & \text{für } t \in (1, 2\rangle, \end{cases}$$

2. y'_1, y'_2 sind unabhängig; z. B.

$$y_1 = \sin t, \quad y_2 = \cos t, \quad \text{für} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

3. y'_1, y'_2 sind abhängig; z. B.

$$y_1 = t^2, \quad y_2 = 5, \quad \text{für} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Fall 1 soll nicht weiter in Betracht gezogen werden. Als Hinweis seien nur zwei Sätze angeführt, deren Beweis ähnlich wie bei den Sätzen 1.1 und 1.2 geführt werden könnte.

Satz 0.1. Seien die Ableitungen der Funktionen von der Basis (u, v) des Raumes S weder abhängig noch unabhängig. Es folgt, dass die Ableitungen jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S weder abhängig noch unabhängig sind.

Satz 0.2. Die Ableitungen jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S sind genau dann weder abhängig noch unabhängig, wenn das Intervall $j \subset i$ $(j \neq i)$ und die Funktion $y \in S$ $(y \not\equiv \text{const})$. existieren, vorausgesetzt, dass y in j eine von Null verschiedene Konstante darstellt.

Der zweite Fall aus Bemerkung 0.1 wird im Absatz 1 und der dritte im Absatz 2 behandelt.

1. Räume von Funktionen, deren Ableitungen einen linearen zweidimensionalen Raum stetiger Funktionen bilden.

Satz 1.1. Die Ableitungen von Funktionen der Basis (u, v) des Raumes S mögen unabhängig sein. Folglich sind die Ableitungen jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S ebenfalls unabhängig.

Beweis: Es seien $y_1 = c_{11}u + c_{12}v$ und $y_2 = c_{21}u + c_{22}v$ unabhängige Funktionen des Raumes S. Es seien des weiteren c, d beliebige reelle Zahlen, sodass $c^2 + d^2 \neq 0$ ist. Aus der Unabhängigkeit der Funktionen u' und v' in i ergibt sich $cy'_1 + dy'_2 = c(c_{11}u' + c_{12}v') + d(c_{21}u' + c_{22}v') \not\equiv 0$ in jedem $j \subset i$, denn das System

$$\begin{aligned} cc_{11} + dc_{21} &= 0 \\ cc_{12} + dc_{22} &= 0 \end{aligned}$$

hat wegen der Unabhängigkeit der Funktionen y_1, y_2 lediglich eine triviale Lösung.

Satz 1.2. Die Ableitungen jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S sind unabhängig genau dann, wenn keine Funktion $y \in S$ in keinem Intervall $j \subset i$ einer von Null verschiedenen Konstante gleich ist.

Beweis: I. Es seien die Ableitungen der Funktionen der Basis (u, v) unabhängig und $y = c_1 u + c_2 v$ $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$. Folglich ist $y' = c_1 u' + c_2 v' \not\equiv 0$ hinsichtlich der Unabhängigkeit der Funktionen u' und v' in jedem $j \subset i$, woraus sich der erste Teil der Behauptung ergibt.

II. Es sei nun umgekehrt keine Funktion $y \in S$ in keinem Intervall $j \subset i$ einer von Null verschiedenen Konstante gleich. Dann gilt für jede zwei Zahlen c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$ in jedem Intervall $j \subset i$ $0 \not\equiv y' = c_1 u' + c_2 v'$, hinsichtlich des Satzes 1.1 ergibt sich hieraus der zweite Teil der Behauptung.

Satz 1.3. Es sei S ein Raum, dessen jegliche zwei unabhängigen Funktionen unabhängige Ableitungen haben und (u, v) ist seine Basis. Dann ist S ein linearer zweidimensionaler Raum stetiger Funktionen mit der Basis (u', v').

Beweis: Jede Funktion $y' \in S'$ stellt eine Ableitung einer gewissen Funktion $y \in S$, $y = c_1 u + c_2 v$ dar. Somit ist $y' = c_1 u' + c_2 v'$ und da u', v' unabhängig sind, ist S' die Menge aller linearen Kombinationen $c_1 u' + c_2 v'$. S' ist dann nach der Definition 1.2 (Stach 1966), ein linearer zweidimensionaler Raum und (u', v') seine Basis.

Vereinbarung 1.1. In diesem Abschnitt werden lediglich zweidimensionale Räume von Funktionen betrachtet, deren Ableitungen einen zweidimensionalen Raum bilden.

Lemma 1.1. Es sei $y \in S$ und $y' \in S'$ seine Ableitung. Hierbei ist y die einzige primitive Funktion zur Funktion y', die in S' liegt.

Beweis: Seien $y \in S$ und $\bar{y} \in S$ zwei primitive Funktionen zur Funktion y'. Dann ist $y - \bar{y} = c \in S$, wobei c eine Konstante darstellt. Das ist jedoch nach Satz 1.2 nur für $c = 0$ möglich, folglich ist $y \equiv \bar{y}$.

Satz 1.4. Die durch den Operator $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (= ')$ definierte Transformation von S auf S' stellt einen Isomorphismus von S auf S' dar.

Beweis: Nach der Definition S' ist $DS = S'$. Nach Lemma 1.1 ist diese Transformation schlicht und der Rest der Behauptung folgt aus den Regeln für die Ableitung der Summe von Funktionen und des konstanten Produkts der Funktion.

Definition 1.1. Es sei $y_1, y_2 \in C_1(i)$ ein geordnetes Funktionenpaar. Die im Intervall i durch die Vorschrift

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

definierte Funktion w nennen wir die Wronskische Determinante der Funktionen y_1, y_2.

Satz 1.5. (über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems). Es sei $t_0 \in i$ und für die Wronskische Determinante der Funktionen der

Basis (u, v) gelte $w(t_0) \neq 0$. Es seien weiter y_0, y_0' beliebige Zahlen. Dann gibt es genau eine Funktion $y \in S$, wobei $y(t_0) = y_0$ und $y'(t_0) = y'_0$ ist.

Beweis: Das System der Gleichungen

$$y_0 = c_1 u(t_0) + c_2 v(t_0)$$

$$y_0' = c_1 u'(t_0) + c_2 v'(t_0)$$

hat unter der Voraussetzung $w(t_0) \neq 0$ genau eine Lösung c_1, c_2. Dieses Zahlenpaar c_1, c_2 bestimmt genau eine Funktion $y = c_1 u + c_2 v$, für welche $y \in S$, $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ gilt.

Satz 1.6. Die Funktionen y_1, $y_2 \in S$ sind abhängig genau dann, wenn für ihre Wronskische Determinante w die Beziehung $w \equiv 0$ gilt.

Beweis: I. Es seien y_1, $y_2 \in S$ abhängige Funktionen. Ist $y_2 \equiv 0$, so ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Ist $y_2 \not\equiv 0$, gibt es eine reelle Zahl c derart, dass $y_1 = cy_2$ ist, folglich auch $y_1' = cy_2'$, d. h. $w \equiv 0$.

II. Gilt für die Funktionen y_1, $y_2 \in S$ die Beziehung $w \equiv 0$, so können zwei Fälle eintreten:

a) $y_1 \equiv 0$ oder $y_2 \equiv 0$, woraus die Behauptung folgt.

b) $y_1 \not\equiv 0$ und $y_2 \not\equiv 0$. Wegen ihren Stetigkeit gibt es ein Intervall $j \subset i$ derart, dass $y_1 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$ in j ist, woraus sich $y_2'/y_2 = y_1'/y_1$ in j ergibt. Es gibt also eine Zahl $c \neq 0$ mit $y_2 = cy_1$ in j und mithin auch in i.

Folgerung. Gilt für die Wronskische Determinante der Funktionen y_1, $y_2 \in S$ die Beziehung $w = 0$ in $j \subset i$, so ist $w = 0$ in i.

Lemma 1.2. Sei $t_0 \in i$ und für die Wronskische Determinante der Funktionen der Basis (u, v) des Raumes S gelte $w(t_0) = 0$. Dann ist die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen des Raumes S im Punkt t_0 gleich Null.

Beweis: Ist $y_1 = c_{11}u + c_{12}v$, $y_2 = c_{21}u + c_{22}v$ und $\bar{w}$ die Wronskische Determinante der Funktionen y_1, y_2, so ist offensichtlich $\bar{w}(t_0) = (c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22})\, w(t_0)$, woraus sich die Behauptung ergibt.

Satz 1.7. Sei $t_0 \in i$. Die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen des Raumes S ist im Punkt t_0 gleich Null genau dann, wenn eine Funktion $y \in S$ $(y \not\equiv 0)$ existiert, wobei $y(t_0) = 0$ und $y'(t_0) = 0$ ist.

Beweis: Sei w die Wronskische Determinante der Funktionen der Basis (u, v) des Raumes S.

I. Es sei die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen (also auch der Funktionen der Basis) des Raumes S im Punkt t_0 gleich Null. Aus der Gleichheit $u(t_0)\, v'(t_0) - u'(t_0)\, v(t_0) = 0$ ergeben sich folgende Möglichkeiten:

a) $u(t_0) = u'(t_0) = 0$ $(v(t_0) = v'(t_0) = 0)$ was die Behauptung darstellt.

b) $u(t_0) = v(t_0) = 0$ $(u'(t_0) = v'(t_0) = 0)$ was besagt, dass t_0 ein singulärer Punkt des Raumes $S(S')$ ist. Nach Lemma 1 (Trávníček, Kojecká 1972) erhält man die Behauptung.

c) Keine der Zahlen $u(t_0)$, $v(t_0)$, $u'(t_0)$, $v'(t_0)$ ist gleich Null. Für die Funktion $y(t) = u(t_0)\, v(t) - v(t_0)\, u(t)$ gilt dann $y \in S$, $y \not\equiv 0$, $y(t_0) = 0$ und $y'(t_0) = 0$.

II. Es gebe nun eine Funktion $y(= c_1 u + c_2 v) \in S$, $y \not\equiv 0$, wobei im Punkt t_0 $y(t_0) = 0$ und $y'(t_0) = 0$ sind. Das besagt, dass das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1 u(t_0) + c_2 v(t_0) &= 0 \\ c_1 u'(t_0) + c_2 v'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

eine nichttriviale Lösung c_1, c_2 und somit eine Null-Determinante des Systems besitzt, d. h. $w(t_0) = 0$. Nach Lemma 1.2 ist der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Satz 1.8. Es sei S' ein Raum eines bestimmten Typus. Hiernach ist S auch ein Raum eines bestimmten Typus. Insbesondere: ist S' vom Typus k, so ist S höchstens vom Typus $k + 1$, ist S' vom Typus $+\infty$, so ist S vom Typus $+\infty$ oder vom endlichen Typus, ist S' vom Typus $-\infty$, so ist S vom Typus $-\infty$ oder vom endlichen Typus.

Beweis: Es sei $t^* \in i$ ein Häufungspunkt von Nullstellen irgend einer Funktion $y \in S$, $y \not\equiv 0$. Es gibt also eine monotone Folge $\{t_k\}$ von Nullstellen der Funktion y, $t_k \to t^*$, $t_k \neq t^*$. Ist z. B. $\{t_k\}$ wachsend (ähnlich für fallende Folgen), so betrachten wir die Intervalle $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$. Nach dem Rolleschen Satz besteht im Innern eines jeden Intervalls ein Punkt Θ_k derart, dass $y'(\Theta_k) = 0$. Da $t_k < \Theta_k < t_{k+1}$ ist, folgt nach dem Drei-Grenzwertsatz $\Theta_k \to t^*$ und t^* ist ein Häufungspunkt von Nullstellen der Funktion $y' \in S'$. Da S' im Innern des Intervalls i keine Häufungspunkte von Nullstellen hat, besitzt diese auch S nicht und ist somit vom bestimmten Typus. Auf analogem Wege erhalten wir auch sämtliche speziellen Behauptungen.

Bemerkung 1.1. Der vorstehende Satz lässt sich nicht umkehren, d. h. wenn S vom bestimmten Typus ist, so ist dies nicht notwendig der Fall für S'. Es seien beispielsweise $a < -\dfrac{1}{\pi}$, $b > \dfrac{1}{\pi}$ reelle Zahlen und man betrachte in (a, b) die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \left| t \sin \dfrac{1}{t} \right|, & \text{für } t \in (a, b), \quad t \neq 0, \\ 0, & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es sei $t_0 \in (a, b)$. Die Funktion $u(t)$ wird in (a, b) durch die Beziehung

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\, \mathrm{d}x$$

definiert. Diese Funktion ist stetig in (a, b), $u'(t) = f(t)$ für alle $t \in (a, b)$ und folglich $u'(t) \geqq 0$ in (a, b). Offensichtlich ist $u(t)$ wachsend und besitzt in (a, b) genau eine

Nullstelle ($t = t_0$). Ferner werde die Funktion $v(t)$ in (a, b) durch $v(t) = tu(t)$ definiert. Es wird gezeigt, dass $u(t)$ und $v(t)$ in (a, b) unabhängig sind, genau wie ihre Ableitungen $u'(t)$ und $v'(t)$. Foglich kann (u, v) als Basis des zweidimensionalen Raumes der Funktionen S_0 angesehen werden, deren Ableitungen einen zweidimensionalen Raum S_0' bilden. Die Funktion $v(t)$ besitzt in (a, b) höchstens zwei Nullstellen ($t = 0$, $t = t_0$) und jede von u sowie von v unabhängige Funktion $y = c_1u + c_2v$ des Raumes S_0 besitzt in (a, b) auch höchstens zwei Nullstellen ($t = t_0$ und $t = -c_1/c_2$, falls $(-c_1/c_2) \in (a, b)$). Der Raum S_0 ist also vom bestimmten Typus. Die Funktion $u'(t)$ besitzt in (a, b) unendlich viele Nullstellen $t = 0$ und $t_k = \dfrac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ mit $t = 0$ als deren Häufungspunkt. Der Raum S_0' ist also nicht vom bestimmten Typus.

Falls S, S' vom bestimmten Typus sind, so gilt offensichtlich: ist S vom Typus k, so ist S' mindestens vom Typus $k - 1$ (entweder vom endlichen oder irgendeinem unendlichen Typus), ist S vom Typus $+\infty$ $(-\infty)$, so ist S' vom Typus $+\infty$ $(-\infty)$ oder $\pm\infty$.

Bemerkung 1.2. Die Räume S, S' können beide regulär oder beide singulär sein oder einer von ihnen ist regulär und der andere singulär.

a) Ist (e^t, t^2) eine Basis von S und $i = (-\infty, +\infty)$, so sind S und S' regulär.

b) Ist (t^3, t^2) eine Basis von S und $i = (-\infty, +\infty)$, so sind S und S' singulär.

c) Ist (e^{t^2}, t^2) eine Basis von S und $i = (-\infty, +\infty)$, so ist S regulär und S' singulär.

d) Ist $(\ln t, (t - 1)^2)$ eine Basis von S und $i = (0, +\infty)$, so ist S singulär und S' regulär.

Satz 1.9. Für die Wronskische Determinante w der Funktionen der Basis (u, v) von S gelte $w \neq 0$ in i. Dann sind die Räume S und S' regulär und S vom bestimmten Typus.

Beweis: Aus der Definition w folgt, dass in den singulären Punkten von S und S' die Beziehung $w = 0$ gilt, sodass aus der Voraussetzung $w \neq 0$ die Regularität beider Räume folgt. Die Funktion $y \in S$ besitze einen Häufungspunkt t^* von Nullstellen, $t^* \in i$. Folglich ergibt sich eine Nullstellenfolge $\{t_k\}$ der Funktion y mit $t_k \to t^*$, $t_k \neq t^*$. Wegen der Stetigkeit der Funktionen y, y' folgt

$$y(t^*) = \lim_{k\to\infty} y(t_k) = 0,$$

$$y'(t^*) = \lim_{k\to\infty} \frac{y(t_k) - y(t^*)}{t_k - t^*} = 0.$$

Nach dem Satz 1.5 ist $y \equiv 0$. Es gibt also keine Funktion $y \in S$, $y \not\equiv 0$, mit einem Häufungspunkt ihrer Nullstellen innerhalb von i.

Definition 1.2. S und S' seien reguläre Räume eines bestimmten Typus, (u, v) sei die Basis des Raumes S. Die Charakteristik h $[g]$ der Basis (u, v) $[(u', v')]$ nennt man die erste [zweite] Charakteristik des Raumes S. Die Phase α [β] der Basis (u, v) [(u', v')] wird als erste [zweite] Phase des Raumes S bezeichnet.

Satz 1.10. S sei ein regulärer Raum eines bestimmten Typus und w die Wronskische Determinante von dessen Basis (u, v). Die Phase α der Basis (u, v) besitzt in jedem Punkt $t \in i$ eine stetige erste Ableitung, welche lautet:

$$\alpha'(t) = \frac{-w(t)}{u^2(t) + v^2(t)} \tag{*}$$

Der Beweis hierfür wird genau so wie für den Satz 5, § 5, Kapitol 1 (Borůvka 1967) geführt.

Lemma 1.3. S sei ein regulärer Raum eines bestimmten Typus und $t_0 \in i$ ein Extrempunkt. Dann ist die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen des Raumes S im Punkt t_0 gleich Null.

Beweis: Die Phase α der Basis (u, v) besitzt im Punkt t_0 einen Extremwert, somit also $\alpha'(t_0) = 0$ und aus (*) ebenfalls $w(t_0) = 0$. In bezug auf Lemma 1.2 folgt daraus die Behauptung.

Vereinbarung 1.2. Ist $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = +\infty \ (-\infty)$, werden wir dafür zur Abkürzung voraussetzen, dass $\operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0} f(t) = 1 \ (-1)$.

Lemma 1.4. S und S' seien reguläre Räume eines bestimmten Typus, $t_0 \in i$ und sei für jegliche zwei Funktionen des Raumes S $w(t_0) = 0$. Dann tritt genau eine der folgenden Möglichkeiten ein: t_0 ist ein Extrempunkt des Raumes S oder t_0 ist ein Extrempunkt des Raumes S'.

Beweis: Nach dem Satz 1.7 gibt es eine Funktion $y \in S$ $(y \not\equiv 0)$ mit $y(t_0) = 0$ und $y'(t_0) = 0$. Es sei $(\bar{y}, y)$ die Basis des Raumes S und h ihre erste, sowie g ihre zweite Charakteristik. Folglich ist $\left|\lim\limits_{t \to t_0 -} h(t)\right| = \left|\lim\limits_{t \to t_0 +} h(t)\right| = +\infty$ und $\left|\lim\limits_{t \to t_0 -} g(t)\right| = \left|\lim\limits_{t \to t_0 +} g(t)\right| = +\infty$. Hinsichtlich der Regularität des Raumes S (S'), wechselt die Funktion $\bar{y}(\bar{y}')$ im Punkt t_0 nicht ihr Vorzeichen und wegen der Bestimmtheit des Typus des Raumes S' besteht $\delta > 0$ mit $y'(t) \neq 0$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t \neq t_0$.

a) Es sei für $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ $y'(t) < 0$ $(y'(t) > 0)$ und für $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ $y'(t) > 0$ $(y'(t) < 0)$ gesetzt. Die Funktion y besitzt dann einen Extremwert im Punkt t_0 und für die Charakteristiken h und g gilt $\operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 -} h(t) = \operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 +} h(t)$ und $\operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 -} g(t) = -\operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 +} g(t)$. Nach dem Satz 3.2 (Stach 1966) ist t_0 ein Extrempunkt des Raumes S und ein gewöhnlicher Punkt des Raumes S'.

b) Es sei $y'(t) < 0$ $(y'(t) > 0)$ für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t \neq t_0$, gesetzt. Die Funktion y ist danach monoton in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ und für die Charakteristiken h und g gilt $\operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 -} h(t) = -\operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 +} h(t)$ und $\operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 -} g(t) = \operatorname{sgn} \lim\limits_{t \to t_0 +} g(t)$. Nach dem Satz 3.2

(Stach 1966) ist t_0 ein gewöhnlicher Punkt des Raumes S und ein Extrempunkt des Raumes S'.

Satz 1.11. Es mögen S und S' reguläre Räume eines bestimmten Typus sein. Der Punkt $t_0 \in i$ ist ein Extrempunkt des Raumes S genau dann, wenn die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen des Raumes S im Punkt t_0 gleich Null ist und eine Funktion des Raumes S existiert, die in t_0 einen Extremwert besitzt.

Beweis: I. Es sei $t_0 \in i$ ein Extrempunkt des Raumes S. Nach Lemma 1.3 ist die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen des Raumes S in t_0 gleich Null und nach dem Satz 1.7 besteht eine Funktion $y \in S$, $y \not\equiv 0$ mit $y(t_0) = 0$ und $y'(t_0) = 0$. Nach dem Satz 3.2 (Stach 1966) muss für die Charakteristik h der Basis $(\bar{y}, y)$ des Raumes S gelten $|\lim_{t \to t_0} h(t)| = +\infty$. Da S bestimmten Typus ist, existiert $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t \neq t_0$, $y(t) < 0$ oder $y(t) > 0$ ist. Demnach besitzt y in t_0 einen Extremwert.

II. Es sei die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen des Raumes S, in t_0 gleich Null und es gebe eine Funktion $y \in S$, die in t_0 einen Extremwert besitzt. Aus der Formul für die Wronskische Determinante der unabhängigen Funktionen $\bar{y}$ und y des Raumes S gilt $y(t_0) = 0$ und daraus ergibt sich für die Charakteristik h der Basis $(\bar{y}, y)$ $\operatorname{sgn} \lim_{t \to t_0-} h(t) = \operatorname{sgn} \lim_{t \to t_0+} h(t)$ und $|\lim_{t \to t_0-} h(t)| = |\lim_{t \to t_0+} h(t)| = +\infty$. Nach dem Satz 3.2 (Stach 1966) ist t_0 ein Extrempunkt des Raumes S.

Vereinbarung 1.3. Eine im Punkt t_0 von links wachsende (fallende) und von rechts wachsende (fallende) Funktion wird als im Punkt t_0 wachsend (fallend) bezeichnet. Ist die Funktion im Punkt t_0 wachsend oder fallend, sagt man sie sei monoton im Punkt t_0. Ist die Funktion y im Punkt t_0 monoton und $y'(t_0) = 0$, dann wird gesagt, die Funktion y im Punkt t_0 eine 0-Wendung besitzt.

Satz 1.12. Es sei S' ein regulärer Raum eines bestimmten Typus. Der Punkt t_0 ist ein Extrempunkt des Raumes S' genau dann, wenn es eine Funktion des Raumes S gibt, die in t_0 eine 0-Wendung besitzt.

Beweis: I. Es sei $t_0 \in i$ ein Extrempunkt des Raumes S'. Nach Lemma 1 (Trávníček, Kojecká 1972) gibt es eine Funktion $y' \in S'(y' \not\equiv 0)$ mit $y'(t_0) = 0$. Nach dem Satz 3.2 (Stach 1966) gibt für die Charakteristik g der Basis $(\bar{y}', y')$ des Raumes S' $|\lim_{t \to t_0} g(t)| = +\infty$. Da S' bestimmten Typus ist, existiert $\delta > 0$ mit $y'(t) < 0$ oder $y'(t) > 0$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t \neq t_0$, und daher ist y in t_0 monoton und in bezug auf die Vereinbarung 1.2 besitzt sie in t_0 eine 0-Wendung.

II. Es gebe eine Funktion $y \in S$, die im Punkt t_0 eine 0-Wendung besitzt. Dann ist $y'(t_0) = 0$, wobei $\delta > 0$ derart besteht, dass für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t \neq t_0$, $y'(t) < 0$ oder $y'(t) > 0$ ist. Für die Charakteristik g der Basis $(\bar{y}', y')$ des Raumes S' folgt hieraus $|\lim_{t \to t_0-} g(t)| = |\lim_{t \to t_0+} g(t)| = +\infty$ und $\operatorname{sgn} \lim_{t \to t_0-} g(t) = \operatorname{sgn} \lim_{t \to t_0+} g(t)$. Nach dem Satz 3.2 (Stach 1966) ist t_0 ein Extrempunkt des Raumes S'.

Satz 1.13. Es seien S und S' reguläre Räume eines bestimmten Typus. Es sei t_0 ein Extrempunkt des Raumes $S(S')$, hiernach ist t_0 ein gewöhnlicher Punkt des Raumes $S'(S)$.

Beweis: a) Es seit t_0 ein Extrempunkt des Raumes S. Nach dem Satz 1.11 ist für jegliche zwei Funktionen $w(t_0) = 0$ und aus Lemma 1.4 ergibt sich die Behauptung.

b) Es sei t_0 ein Extrempunkt des Raumes S'. Ist für jegliche zwei Funktionen $w(t_0) = 0$, dann folgt die Behauptung aus Lemma 1.4. Ist für jegliche zwei unabhängige Funktionen $w(t_0) \neq 0$, dann folgt die Behauptung aus dem Satz 1.11.

Satz 1.14. Die Nullstellen jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S trennen sich und die Nullstellen ihrer Ableitungen trennen sich genau dann, wenn S' eines bestimmten Typus ist, wenn für die Wronskische Determinante jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S die Beziehung $w \neq 0$ in i gilt und wenn keine Funktion des Raumes S in keinem Punkt des Intervalls i eine 0-Wendung besitzt.

Beweis: I. Die Nullstellen jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S und ihrer Ableitungen mögen sich trennen. Offenbar besitzen also weder zwei unabhängigen Funktionen noch ihre Ableitungen eine gemeinsame Nullstelle, S und S' sind somit regulär. Es seien $u, v \in S$ unabhängig und u besitze einen Häufungspunkt t^* der Nullstellen, $t^* \in i$. Folglich gibt es eine monotone Folge $\{t_k\}$ von Nullstellen der Funktion u, $t_k \to t^*$, $t_k \neq t^*$. Ist beispielsweise $\{t_k\}$ wachsend (ähnliches gilt für fallend), so betrachten wir die Intervalle $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$. Der Voraussetzung nach gibt es innerhalb eines jeden von ihnen einen Punkt x_k mit $v(x_k) = 0$. Wegen $t_k < x_k < t_{k+1}$ ist dann nach dem Drei-Grenzwertsatz $x_k \to t^*$ und t^* ist ein Häufungspunkt der Nullstellen der Funktion v. Wegen der Stetigkeit von u und v ergibt sich

$$u(t^*) = \lim_{k \to \infty} u(t_k) = 0,$$
$$v(t^*) = \lim_{k \to \infty} v(t_k) = 0$$

im Widerspruch zur Regularität des Raumes S. Folglich ist S eines bestimmten Typus, was sich auch für S' analog beweisen lässt. Somit gibt es erste und zweite Phasen des Raumes S, die nach dem Satz 7 (Trávníček, Kojecká 1972) im Intervall i monoton sind, woraus unter Berücksichtigung der Sätze 1.11 und 1.12 der erste Teil der Behauptung abzulesen ist.

II. Es sei S' eines bestimmten Typus, für die Wronskische Determinante jeglicher zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S gelte $w \neq 0$ in i und es mögen keine Funktionen des Raumes S in keinem Punkt des Intervalls i eine 0-Wendung besitzen. Aus Satz 1.9 folgt die Regularität von S und S' und die Bestimmtheit des Typus von S, es existieren also erste und zweite Phasen des Raumes S. Nach den Sätzen 1.11 und 1.12 liegt kein Extrempunkt weder von Raum S noch von S' in i. Also α und β sind monoton und unter Berücksichtigung von Satz 7 (Trávníček, Kojecká 1972) ergibt sich hieraus der zweite Teil der Behauptung.

Satz 1.15. Trennen sich die Nullstellen jeder zwei unabhängiger Funktionen des Raumes S und trennen sich die Nullstellen ihrer Ableitungen, so trennen sich auch die Nullstellen jeder Funktion des Raumes S und die ihrer Ableitung.

Beweis: Es sei $\{t_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ein vollständiges System von konjugierten Punkten eines Definitionsbereichs $i = (a, b)$ des Raumes S (Trávníček, Kojecká 1972), welche die Nullstellen der Funktion v der Basis (u, v) darstellen. Nach dem Rolleschen Satz gibt es in jedem Intervall (t_k, t_{k+1}) mindestens einen Punkt Θ_k mit $v'(\Theta_k) = 0$. Es mögen in einem von diesen Intervallen zwei verschiedene Nullstellen (wir schreiben dafür ξ_1, ξ_2) der Funktion v' liegen. Nach dem Satz 5 (Trávníček, Kojecká 1972) ist in jedem Intervall (t_k, t_{k+1}) die erste Charakteristik h der Basis (u, v) monoton und nimmt alle Werte aus Intervall $(-\infty, +\infty)$ an. Gleichfalls ist im Intervall (ξ_1, ξ_2) die zweite Charakteristik g der Basis (u, v) monoton und nimmt alle Werte aus Intervall $(-\infty, +\infty)$ an. Offenbar gibt es einen Punkt $x \in (\xi_1, \xi_2)$ mit $h(x) = g(x)$ d. h. für die Wronskische Determinante der Funktionen der Basis (u, v) gilt $w(x) = 0$ im Widerspruch zum Satz 1.14. In jedem Intervall (t_k, t_{k+1}) existiert also genau eine Nullstelle der Funktion v'. Besteht in $\{t_k\}$ die kleinste Zahl t^* oder die grösste Zahl t^{**}, so wird sinngemäss bewiesen, dass in den Intervallen (a, t^*), (t^{**}, b) höchstens eine Nullstelle der Funktion v' liegt.

Bemerkung 1.3. Es ist leicht zu beweisen, dass die Menge von Integralen einer Differentialgleichung $y'' = Q(t)\,y$, wo $Q(t)$ eine stetige Funktion im Intervall i ist, einen zweidimensionalen Raum stetiger Funktionen mit einem Definitionsbereich i im Sinne der Definition 1.2 (Stach 1966) bildet.

Satz 1.16. Die Menge der Ableitungen aller Integrale der Differentialgleichung $y'' = Q(t)\,y$, wo $Q(t)$ eine stetige Funktion im Intervall i darstellt, ist ein linearer zweidimensionaler Raum stetiger Funktionen mit einem Definitionsbereich i genau dann, wenn $Q(t) \not\equiv 0$ in jedem Intervall $j \subset i$ ist.

Beweis: Für die Wronskische Determinante der Ableitungen der Integrale u, v einer Differentialgleichung $y'' = Q(t)\ y$ ergibt sich $\bar{w} = u'v'' - v'u'' = -Qw$, wo w eine Wronskische Determinante von Integralen u, v darstellt.

I. Es möge die Menge von Ableitungen aller Integrale einer Differentialgleichung $y'' = Q(t)\,y$ einen zweidimensionalen Raum bilden. In bezug auf den Satz 1.6 gilt dann für die Wronskische Determinante der Funktionen der Basis (u', v') des Raumes von Ableitungen der Integrale $\bar{w} \not\equiv 0$ in jedem Intervall $j \subset i$. Hieraus folgt der erste Teil der Behauptung.

II. Es sei $Q(t) \not\equiv 0$ in jedem Intervall $j \subset i$. Da für die Wronskische Determinante der Funktionen von Basis (u, v) des Raumes von Integralen in jedem Intervall $j \subset i$ die Beziehung $w \not\equiv 0$ gilt, gilt dasselbe auch für die Wronskische Determinante der Funktionen u', v', woraus unter Berücksichtigung von Sätzen 1.6 und 1.3 der zweite Teil der Behauptung abzulesen ist.

2. Räume von Funktionen, deren Ableitungen einen linearen eindimensionalen Raum stetiger Funktionen bilden.

Definition 2.1. Sei $i \subset E_1$. Es sei u eine stetige Funktion einer reellen im Intervall i erklärten Veränderlichen mit $u \not\equiv 0$ in jedem $j \subset i$. Ein System R aller Funktionen der Form $y = cu$, wo c eine beliebige reelle Konstante bedeutet, heisst ein linearer eindimensionaler Raum stetiger Funktionen. Das Intervall i stellt einen Definitionsbereich des Raumes R dar.

Bemerkung 2.1. Man sieht, dass jegliche zwei Funktionen y_1, $y_2 \in R$ abhängig sind, für jede Funktion $y \in R$ ($y \not\equiv 0$) die Beziehung $y \not\equiv 0$ in jedem Intervall $j \subset i$ gilt, jede Funktion $y \in R$ sich als $y = c_1 u_1$ schreiben lässt, wo $u_1 \in R$ ($u_1 \not\equiv 0$) und c_1 eine geeignete reelle Zahl darstellt. Jede Funktion $u \in R$, $u \not\equiv 0$, heisst also eine Basis des Raumes R. Die Nullstelle einer Basis des Raumes R ist offensichtlich die Nullstelle jeglicher Funktion $y \in R$.

Bemerkung 2.2. Für jeden im Intervall i erklärten zweidimensionalen Raum S mit der Basis (u, v) gilt $S = R_1 \dotplus R_2$, wo R_1, R_2 eindimensionale im Intervall i erklärte Räume mit den Basen u und v darstellen. Umgekehrt aber, für die Summe R der zweien, im Intervall i erklärten eindimensionalen Räume R_1, R_2, mit den Basen u und v, d. h. $R = R_1 + R_2$, können folgende Möglichkeiten eintreten:

1. wenn u und v abhängig sind, so ist R ein eindimensionaler Raum,
2. wenn u und v unabhängig sind, so ist R ein zweidimensionaler Raum,
3. wenn u und v weder abhängig noch unabhängig sind, so ist R weder ein eindimensionaler noch ein zweidimensionaler Raum.

Satz 2.1. Die Ableitungen der Funktionen der Basis (u, v) des Raumes S mögen abhängig sein. Danach sind die Ableitungen jeglicher zwei Funktionen des Raumes S abhängig.

Der Beweis für die unabhängigen Funktionen verläuft ganz ähnlich dem zum Satz 1.1, für die abhängigen Funktionen ergibt sich die Behauptung aus Lemma 0.1.

Satz 2.2. Die Ableitungen jeglicher zwei Funktionen des Raumes S sind abhängig genau dann, wenn es eine Funktion des Raumes S gibt, die der von Null verschiedenen Konstante identisch ist.

Beweis: I. Jegliche zwei Funktionen des Raumes S mögen abhängige Ableitungen haben. Wenn (u, v) eine Basis des Raumes S ist, dann offenbar mindestens eine der Funktionen u' und v' ist nicht identisch gleich Null. Es sei also $u' \not\equiv 0$, dann ist $v' = cu'$, wo c eine geeignete Zahl bedeutet. Nach Ausführung der Integration erhält man $v = cu + k$, wo $k \neq 0$ eine im beliebig gewählten Punkt $t_0 \in i$, durch die Werte $u(t_0)$ und $v(t_0)$ eindeutig bestimmte Konstante bedeutet. Hieraus folgt für $c = 0$, dass die Funktion $y \equiv k$ zu S gehört, was den ersten Teil der Behauptung darstellt.

II. Nun werde angenommen, es gebe eine Funktion $y \in S$, $y \equiv k$, $k \neq 0$ eine Konstante ist. Für geeignete Zahlen c_1, c_2 ($c_1^2 + c_2^2 \neq 0$) gilt im Intervall i $c_1 u +$

$+ c_2 v = k$, wo (u, v) eine Basis des Raumes S ist. Nach Ausführung der Differentiation erhält man $c_1 u' + c_2 v' \equiv 0$ und daraus den zweiten Teil der Behauptung.

Vereinbarung 2.1. In diesem Absatz werden lediglich zweidimensionale Räume untersucht, deren jegliche zwei Funktionen abhängige Ableitungen haben.

Bemerkung 2.3. Ist $u \in S$ und $u' \not\equiv 0$, so sieht man sofort, dass S' einen eindimensionalen Raum stetiger Funktionen mit einer Basis u' bildet. Aus Satz 2.2 ergibt sich die Existenz der Basis (u, k) des Raumes S mit $k \neq 0$ als Konstante und hieraus die Regularität des Raumes S. Für die Wronskische Determinante jeglicher zwei Funktionen des Raumes S gilt offenbar $w = Ku'$, wo u' eine Basis von S' und K eine geeignete Zahl sind (für unabhängige Funktionen ist $K \neq 0$, für abhängige Funktionen $K = 0$). Da bei den Beweisen von Sätzen 1.5, 1.6, 1.7 und von Lemma 1.2 keine Forderung, dass S' ein zweidimensionaler Raum wäre auftritt, gilt diese Behautpung auch für die zweidimensionalen Räume von Funktionen, deren Ableitungen den eindimensionalen Raum bilden.

Definition 2.2. Ein eindimensionaler Raum R heisst ein Raum vom Typus k in $i = (a, b)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wenn es eine Funktion des Raumes R gibt, die genau k Nullstellen besitzt. Ein Raum R heisst vom Typus $+\infty$, bzw. $-\infty$, bzw. $\pm\infty$ in $i = (a. b)$, wenn es eine Funktion mit unendlich vielen Nullstellen gibt, die einen Häufungspunkt a, bzw. b, bzw. a, b haben und keine anderen Häufungspunkte ihrer Nullstellen besitzt. Ein Raum R vom Typus k, $+\infty$, $-\infty$, $\pm\infty$ in $i = (a, b)$ heisst ein Raum eines bestimmten Typus in $i = (a, b)$.

Bemerkung 2.4. Wiederum wird bei den Beweisen von Sätzen 1.8, 1.10 und von Lemma 1.3 keine Forderung auf die Zweidimensionalität des Raumes S' gestellt, weshalb diese Behauptungen auch für die in diesem Absatz untersuchten Räume gelten.

Satz 2.3. Es möge S' eines bestimmten Typus sein.

a) Der Punkt $t_0 \in i$ stellt einen Extrempunkt des Raumes S genau dann dar, wenn es eine Funktion des Raumes S gibt, die in t_0 einen Extremwert besitzt.

b) Jede Phase des Raumes S besitzt in $t_0 \in i$ eine 0-Wendung genau dann, wenn es eine Funktion des Raumes S gibt, die in t_0 eine 0-Wendung besitzt.

Beweis: Beide Behauptungen folgen wegen (*) und der Bestimmtheit des Typus des Raumes S' aus den Beziehungen $\alpha' = -w/(k^2 + u^2)$ und $w = ku'$, wo w eine Wronskische Determinante und α eine Phase der Basis (u, k) des Raumes S sind.

Satz 2.4. Die Menge der Ableitungen aller Integrale der Differentialgleichung $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ mit $p(t)$ und $q(t)$ als stetige Funktionen im Intervall i stellt einen linearen eindimensionalen Raum stetiger Funktionen mit einem Definitionsbereich i genau dann dar, wenn $q(t) \equiv 0$ ist.

Beweis: I. Ist $q(t) \equiv 0$, so besitzt die Differentialgleichung $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ eine Lösung der von Null verschiedenen Konstante identisch, woraus sich wegen Satz 2.2 der erste Teil der Behauptung ergibt.

II. Bilden die Ableitungen von Integralen der Differentialgleichung $y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$ einen eindimensionalen Raum, so besteht eine Basis (u, k) eines Integralenraumes. Die diesem Integralenraume angehörende Differentialgleichung lässt sich in folgender Form schreiben

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ u & u' & u'' \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} = ku''y' - ku'y'' = 0, \quad \text{also} \quad q(t) \equiv 0.$$

LITERATURVERZEICHNIS

O. Borůvka: O kolebljuščichsja integralach differencialnych linejnych uravnenij 2-ogo porjadka. „Čech. mat. ž." t. 3 (78) 1953, 199—251.

O. Borůvka: Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1967.

K. Stach: Die allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. „Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně" (Brno) No 478, 1966, 389—410.

K. Stach: Die vollständigen Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. „Archivum Math." (Brno) t. 3, Fasc. 3, 1967, 117—138.

S. Trávníček, J. Kojecká: Einige Bemerkungen über die Nullstellen im zweidimensionalen Raum stetiger Funktionen. „Acta Univ. Palackianae Fac. r. nat." T. 37, (Olomouc), 1972.

Shrnutí

LINEÁRNÍ DVOJROZMĚRNÉ PROSTORY SPOJITÝCH FUNKCÍ SE SPOJITÝMI PRVNÍMI DERIVACEMI

JITKA KOJECKÁ

Ve své práci (1966, 1967) studuje K. Stach lineární dvojrozměrné prostory spojitých funkcí z hlediska teorie O. Borůvky o transformacích řešení lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. V předložené práci se vyšetřují základní vlastnosti dvojrozměrných prostorů $S \subset C_1(i)$.

Pro derivace nezávislých funkcí $u, v \in S$ mohou nastat tři případy: 1. u', v' nejsou ani závislé ani nezávislé; 2. u', v' jsou nezávislé; 3. u', v' jsou závislé. V případě 2 tvoří množina S' derivací všech funkcí z S lineární dvojrozměrný prostor spojitých funkcí (viz odst. 1), v případě 3 je S' lineární jednorozměrný prostor spojitých funkcí (viz odst. 2).

V odstavci 1 jsou vyšetšovány vlastnosti funkcí a fází prostoru S v závislosti na vlastnostech wronskiánu dané báze (Cauchyova úloha, regulárnost prostorů S, S', existence extrémních bodů prostorů S, S', oddělování nulových bodů každých dvou

dvou nezávislých funkcí prostoru S a jejich derivací). Závěrem je uvedena souvislost s prostory integrálů diferenciální rovnice $y'' = Q(t)\,y$.

V odstavci 2 se analogicky studují vlastnosti prostorů funkcí, je-li S' jednorozměrný prostor.

Резюме

ЛИНЕЙНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ПЕРВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ЙИТКА КОЙЕЦКА

В своих работах (1966, 1967) изучает К. Стах линейное двумерное пространство непрерывных функций с точки зрения теории О. Борувка о преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений 2. порядка. В настоящей работе исследуются основные свойства двумерных пространств $S \in C_1(i)$.

Для производных независимых функций $u, v \in S$ могут иметь место три случаи: 1. u', v' не являются ни зависимыми ни независимыми, 2. u', v' являются независимыми, 3. u', v' зависимые. В случае 2 образует множество S' производных всех функций из S двумерное линейное пространство непрерывных функций (см. абз. 1), в случае 3 – S' является одномерным линейным пространством непрерывных функций (см. абз. 2).

В абз. 1 исследованы свойства функций и фаз пространства S в зависимости от свойств вронскиана заданного базиса (задача Коши, регулярность пространств S, S', существование точек экстремума пространств S, S', чередование нулей любых двух независимых функций $u, v \in S$ и их производных u', $v' \in S'$). В заключение приведена связь с пространством решений дифференциального уравнения $y'' = Q(t)y$.

В абз. 2 аналогическим образом изучены свойства пространств функций в случае, когда S' одномерное пространство.