Ladislav Sedláček

Zum Problem der inneren direkten Produkte von Gruppoiden

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 27--38

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120022`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Josef Šimek

ZUM PROBLEM DER INNEREN DIREKTEN PRODUKTE VON GRUPPOIDEN

LADISLAV SEDLÁČEK

(Eingegangen am 9. Juni 1972)

In der vorliegenden Arbeit werden einige Fragen der inneren direkten Produkte von Gruppoiden und Gruppen, sowie deren isomorphen Verfeinerungen und deren Isomorphismus studiert.

Einleitende Bemerkungen

Diese Arbeit schließt an die Arbeit [10] und nutzt die dort erreichten Ergebnisse aus. Sie zeigt zugleich die Verwendbarkeit des dort eingeführten Begriffes des konvexen bzw. relativ konvexen Gruppoids in der Gruppentheorie.

In der Arbeit werden Bezeichnungen aus [10] und aus [1] benutzt. Sätze werden mit $\boldsymbol{S}$ und Definitionen mit $\boldsymbol{D}$ bezeichnet. Weiter bedeutet z. B. [10], S 3/4 den Satz 3/4 aus der Arbeit [10], ähnlich bedeutet [1], 167 die Seite 167 aus der Arbeit [1].

1. Innere direkte produkte von Gruppoiden

Im Satz S 4/3 der Arbeit [10] haben wir gezeigt: Wenn ein Gruppoid $\boldsymbol{G}$ ein idempotentes Element e besitzt und es ein direktes Produkt von Gruppoiden $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_\alpha$ (α eine natürliche Zahl) ist, d. h. wenn $\boldsymbol{G} \leftrightarrow \boldsymbol{A}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{A}_\alpha = \boldsymbol{A}^{[\alpha]}$ gilt, so gibt es in $\boldsymbol{G}$ solche Untergruppoide $\boldsymbol{A}_\iota^0$, welche mit $\boldsymbol{A}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha)$ isomorph sind, d. h. für die $\boldsymbol{A}_\iota^0 \leftrightarrow \{e_1\} \times \ldots \times \boldsymbol{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\} \leftrightarrow \boldsymbol{A}_\iota$ gilt. Dabei gilt für $\alpha \geqq 2$ $\bigcap_{\iota=1}^{\alpha} \boldsymbol{A}_\iota^0 = \{e\}$. Es gilt weiter für jedes Element $a_\iota^0 \in \boldsymbol{A}_\iota^0$ die Beziehung $a_\iota^0 \leftrightarrow (e_1, \ldots, a_\iota, \ldots, e_\alpha) \leftrightarrow \leftrightarrow a_\iota$, wo $e_\varkappa$ idempotentes Element in $\boldsymbol{A}_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ ist. Da $e \in \boldsymbol{A}_\iota^0$, gilt speziell $e = e_\iota^0 \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\iota, \ldots, e_\alpha) \leftrightarrow e_\iota$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Verabredung 1/1: Da $\boldsymbol{A}_\iota^0$ und $\boldsymbol{A}_\iota$ isomorphe Gruppoiden sind, setzen wir $\boldsymbol{A}_\iota^0 = \boldsymbol{A}_\iota = \boldsymbol{R}_\iota \subset \boldsymbol{G}, \iota = 1, \ldots, \alpha$. Es wird weiter vorausgesetzt, daß $\alpha \geqq 2$ eine natürliche Zahl ist, denn für $\alpha = 1$ sind die Behauptungen entweder trivial oder bedeutungslos.

Folgerung **1/1:** *In bezug auf die Verabredung* 1/1 *ergibt sich nun aus* $a_\iota^0 \leftrightarrow a_\iota$ *die Beziehung* $a_\iota^0 = a_\iota$ *und aus* $e = e_\iota^0 \leftrightarrow e_\iota$ *folgt* $e_\iota = e$ *für* $a_\iota, e_\iota \in \mathbf{R}_\iota, \iota = 1, \ldots, \alpha$.

D 1/1: *Es seien* $\mathbf{R}_\iota$ *Untergruppoiden des Gruppoides* $\mathbf{G}(\iota = 1, \ldots, \alpha)$. *Es sei* $\mathbf{G}$ *direktes Produkt von diesen Gruppoiden, d. h. sei* $\mathbf{G} \leftrightarrow \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$. *Ist die isomorphe Abbildung* $\mathbf{d}$ *des Gruppoides* $\mathbf{G}$ *auf* $\mathbf{R}_1 \times \ldots \times R_\alpha$ *durch die Vorschrift* $\mathbf{d}r = (r_1, \ldots, r_\alpha)$ *gegeben dann und nur dann, wenn* $r = r_1 \ldots r_\alpha$, $r \in \mathbf{G}$, $r_\iota \in \mathbf{R}_\iota(\iota = 1, \ldots, \alpha)$, *so sagt man, das Gruppoid* $\mathbf{G}$ *ist das innere direkte Produkt seiner Untergruppoide* $\mathbf{R}_\iota$ *und man schreibt* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$.

S 1/1: *Ein Gruppoid* $\mathbf{G}$ *mit einem idempotenten Element e ist das innere direkte Produkt seiner Untergruppoide* $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ *dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $\mathbf{G}$ *ist eine Halbgruppe (d. h. ein assoziatives Gruppoid),*

(2) *für jedes Element* $r_\iota \in \mathbf{R}_\iota$, $r_\varkappa \in \mathbf{R}_\varkappa$ *gilt* $r_\iota r_\varkappa = r_\varkappa r_\iota$ *für* $\iota \neq \varkappa(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$,

(3) *jedes Element* $r \in \mathbf{G}$ *läßt sich auf genau eine einzige Weise schreiben und zwar in der Form* $r = r_1 \ldots r_\alpha$, *wo* $r_\iota \in \mathbf{R}_\iota(\iota = 1, \ldots, \alpha)$,

(4) *das idempotente Element* $e \in \mathbf{G}$ *ist das Einselement in* $\mathbf{G}$,

(5) $e \in \mathbf{R}_\iota$ *für* $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Beweis: a) Es sei $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ und $\mathbf{d}$ sei der Isomorphismus von $\mathbf{G}$ auf $\mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$.

(1): Nach S 2/3 aus [10] gilt für das direkte Produkt das assoziative Gesetz. Da nach D 1/1 $\mathbf{d}r = (r_1, \ldots, r_\alpha)$ genau dann gilt, wenn $r = r_1 \ldots r_\alpha$, ist auch die Multiplikation in $\mathbf{G}$ assoziativ, d. h. $\mathbf{G}$ ist eine Halbgruppe.

(2): Es sei $\mathbf{d}r = (r_1, \ldots, r_\alpha)$, $\mathbf{d}u = (u_1, \ldots, u_\alpha)$. Dann gilt $\mathbf{d}(ru) = (r_1u_1, \ldots, r_\alpha u_\alpha)$. Nach D 1/1 haben wir dann $ru = (r_1 \ldots r_\alpha).(u_1 \ldots u_\alpha) = (r_1u_1) \ldots (r_\alpha u_\alpha)$ für $r_\iota, u_\iota \in \mathbf{R}_\iota$, woraus $r_\iota r_\varkappa = r_\varkappa r_\iota$ für $\iota \neq \varkappa(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ folgt.

(3): Da $\mathbf{d}$ eine isomorphe Abbildung von $\mathbf{G}$ auf $\mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ ist, ist jedem Element $r \in \mathbf{G}$ genau ein Element $(r_1, \ldots, r_\alpha) \in \mathbf{R}^{[\alpha]}$ zugeordnet. In bezug auf D 1/1 läßt sich demnach jedes Element $r \in \mathbf{G}$ auf genau eine Weise schreiben und zwar in der Form $r = r_1 \ldots r_\alpha$, $r_\iota \in \mathbf{R}_\iota(\iota = 1, \ldots, \alpha)$.

(4): Da $\mathbf{d}r = (e_1, \ldots, r_\iota, \ldots, e_\alpha)$ und wegen der Folgerung 1/1 ergibt sich $e_\iota = e$ für $\iota = 1. \ldots, \alpha$. Nun erhält man der Definition D 1/1 ensprechend für $1 < \iota < \alpha$: $r_\iota = e^{\iota-1}r_\iota e^{\alpha-\iota}$ und $r_\alpha = e^{\alpha-1}r_\alpha$, $r_1 = r_1e^{\alpha-1}$. Aus $r = r_1 \ldots r_\alpha$ folgt sodann $r = r_1(e^{\alpha-1}).(er_2e^{\alpha-2}) \ldots (e^{\alpha-1}r_\alpha) = r_1er_2 \ldots er_\alpha$, denn e ist das idempotente Element und die Multiplikation in $\mathbf{G}$ ist assoziativ.

Infolgedessen, daß (1), (2) und (3) unseres Satzes gilt und das Element e laut Folgerung 1/1 sowohl in $\mathbf{R}_\iota$ als in $\mathbf{R}_\varkappa$ gehört, ergibt sich unbedingt $r_\iota e = er_\iota = r_\iota$, d. h. e ist ein Einselement für jedes Element $r_\iota \in \mathbf{R}_\iota(\iota = 1, \ldots, \alpha)$. Hiernach aber für $r \in \mathbf{G}$, $r = r_1 \ldots r_\alpha$ gilt $re = (r_1 \ldots r_\alpha).(e \ldots e) = (r_1e) \ldots (r_\alpha e) = r_1 \ldots r_\alpha = r$. Ähnlich bekommt man $er = r$, woraus folgt, daß e das Einselement in $\mathbf{G}$ ist.

(5) Der Folgerung 1/1 und S 3/3 aus [10] nach folgt, daß $e \in \mathbf{R}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha)$ gilt.

b) Es sei $\boldsymbol{G}$ eine Halbgruppe. Dann besitzt jede α-gliedrige Folge $(r_1, \ldots, r_\alpha)$, $r_\iota \in \mathbf{R}_\iota$, genau ein Produkt $r = r_1 \ldots r_\alpha$. Ist die Abbildung $\mathbf{d}$ von $\boldsymbol{G}$ auf $\mathbf{R}_1 \times \ldots \times R_\alpha$ so definiert, daß $\mathbf{d}r = (r_1, \ldots, r_\alpha)$ dann und nur dann ist, wenn $r = r_1 \ldots r_\alpha$ gilt, so sieht man leicht, daß $\mathbf{d}$ eine schlichte Abbildung von $\boldsymbol{G}$ auf $\mathbf{R}^{[\alpha]}$ ist. Ist nun $r = r_1 \ldots r_\alpha$, $u = u_1 \ldots u_\alpha$, so bekommt man in bezug auf die Gültigkeit von (2), daß $ru = (r_1 \ldots r_\alpha) \,.\, (u_1 \ldots u_\alpha) = (r_1 u_1) \ldots (r_\alpha u_\alpha)$ gilt. Nach D 1/1 bekommt man dann $(\mathbf{d}r) \,.\, (\mathbf{d}u) = \mathbf{d}(ru)$, d. h. $\mathbf{d}$ ist eine Deformation von $\boldsymbol{G}$ auf $\mathbf{R}^{[\alpha]}$. $\mathbf{d}$ ist also ein Isomorphismus von $\boldsymbol{G}$ auf $\mathbf{R}^{[\alpha]}$. Nach (4) ist e das Einselement in $\boldsymbol{G}$ und deswegen ein idempotentes Element in $\boldsymbol{G}$ und wegen (5) auch in $\mathbf{R}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha)$. Somit ist der Satz bewiesen.

S 2/1: *Es sei* $\boldsymbol{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times R_\alpha (\alpha \geqq 2)$ *eine Halbgruppe mit einem idempotenten Element e und es gelte die Bedingung* (3) *aus S 1/1 für die Untergruppoide* $\mathbf{R}_1, \ldots, R_\alpha$. *Ferner sei* $e \in \bigcap_{\iota=1}^{\alpha} \mathbf{R}_\iota$. *Dann gilt: a)* $\bigcap_{\iota=1}^{\alpha} \mathbf{R}_\iota = \{e\}$, b) $\mathbf{R}_\iota \cap {}^{(\iota)}\mathbf{R} = \{e\}$, *wo* ${}^{(\iota)}\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_{\iota-1} \times \mathbf{R}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha (\iota = 1, \ldots, \alpha)$.

Beweis: a) Es sei $a \in \bigcap_{\iota=1}^{\alpha} \mathbf{R}_\iota$. Dann läßt sich das Element a auf $\alpha (\geqq 2)$ verschiedene Weise in der Form $a = ae^{\alpha-1} = eae^{\alpha-2} = \ldots = e^{\alpha-1} a$ schreiben. Es sei $a = e^{\alpha-1} a$, $e \in \mathbf{R}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha - 1)$, $a \in \mathbf{R}_\alpha$ und $a = ae^{\alpha-1}$, $a \in \mathbf{R}_1$, $e \in \mathbf{R}_\varkappa (\varkappa = 2, \ldots, \alpha)$. Dann in bezug auf (3) aus S 1/1, d. h. durch jedes Element $c \in \boldsymbol{G}$ sind die Elemente $c_1, \ldots, c_\alpha$ $(c_\iota \in \mathbf{R}_\iota)$ eindeutig derart bestimmt, daß $c = c_1 \ldots c_\alpha$ gilt und es folgt $a = e$. b) folgt leicht aus a).

Bemerkung 1/1: S 2/1 gilt offenbar auch für das Einselement $e \in \boldsymbol{G}$.

Bemerkung 2/1: Es ist leicht zu sehen, daß sich alle in [10] bzw. [9] (unter Beachtung von § 5) formulierten Sätze zur Herleitung von direkter Produkte mit Hilfe von D 1/1 auch für innere direkte Produkte aussprechen lassen. Darauf wollen wir hier jedoch nicht in ganzer Länge eingehen.

S 3/1: *Es sei* $\boldsymbol{G}$ *eine Halbgruppe und es gelte* $\boldsymbol{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times R_\alpha$. *Es sei* $\mathbf{B}$ *ein Untergruppoid in* $\boldsymbol{G}$, $\mathbf{P}_\iota = \mathbf{B} \cap \mathbf{R}_\iota \neq \emptyset (\iota = 1, \ldots, \alpha)$. *Dann* $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \ldots \times \mathbf{P}_\alpha$ *ist das Untergruppoid in* $\boldsymbol{G}$.

Der Beweis folgt aus [10], S 5/3 und D 1/1.

Ist $\boldsymbol{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, $a = a_1 \ldots a_\iota \ldots a_\alpha \in \boldsymbol{G}$, so heißt a_ι, wie bekannt, die *Projektion von a in* $\mathbf{R}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha)$.

S 4/1: *Es sei* B_ι^* *die Projektion des Feldes B des Untergruppoides* $\mathbf{B}$ *von der Halbgruppe* $\boldsymbol{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ *in* $\mathbf{R}_\iota$. *Dann* B_ι^* *ist das Feld des Untergruppoides* $\mathbf{B}_\iota^*$ *in* $\mathbf{R}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha)$. $\mathbf{B}_\iota^*$ *heißt die Projektion von* $\mathbf{B}$ *in* $\mathbf{R}_\iota$.

Der Beweis folgt aus [10], S 6/3 in bezug auf [1], 87 und D 1/1.

S 5/1: *Es sei* $\mathbf{B}$ *das Untergruppoid in der Halbgruppe* $\boldsymbol{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{B}_\iota^*$ *die Projektion von* $\mathbf{B}$ in $\mathbf{R}_\iota$, $\mathbf{P}_\iota = \mathbf{B} \cap \mathbf{R}_\iota \neq \emptyset$. *Dann gilt*

a) $\mathbf{P}_\iota \subset \mathbf{B}_\iota^* \subset \mathbf{R}_\iota$ *für* $\iota = 1, \ldots, \alpha$,

b) *setzen wir* $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \ldots \times \mathbf{P}_\alpha$. $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_1^* \times \ldots \times \mathbf{B}_\alpha^*$, *so gilt*

$$\mathbf{P} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}^*.$$

Der Beweis folgt aus [10], S 7/3 und D 1/1.

S 6/1: *Es gelten die Voraussetzungen von S 5/1. Gilt nun wenigstens eine der Gleichheiten*

$$\mathbf{P}_\iota = \mathbf{B}_\iota^* (\iota = 1, \ldots, \alpha), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{P}_1 \times \ldots \times \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P} = \mathbf{B}, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}_1^* \times \ldots \times \mathbf{B}_\alpha^* = \mathbf{B}^* = \mathbf{B}, \tag{3.1}$$

dann gelten auch die übrigen.

Der Beweis folgt aus [10], S 8/3 und D 1/1.

D 2/1: *Die Halbgruppe* $\mathbf{G}$ *mit dem Einselement e sei das innere direkte Produkt ihrer Untergruppoide* $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$, *d. h. es sei* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}^{[\alpha]}$.

a) *Ein Untergruppoid* $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ *heißt konvex in bezug auf* $\mathbf{R}^{[\alpha]}$, *wenn es folgende Eigenschaften besitzt: Seien* $a = a_1 \ldots a_\alpha$, $b = b_1 \ldots b_\alpha$ *zwei beliebige Elemente aus* $\mathbf{H}$ *und* x_ι *ein beliebiges der Elemente* a_ι, $b_\iota \in \mathbf{R}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha)$. *Dann gehört auch das Element* $x = x_1 \ldots x_\alpha$ *in* $\mathbf{H}$.

b) *Ist* $\mathbf{H}$ *in bezug auf jedes innere direkte Produkt* $\mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_\beta = \mathbf{S}^{[\beta]}$ *der Halbgruppe* $\mathbf{G}$ *konvex, so sagt man, daß* $\mathbf{H}$ *ein konvexes Untergruppoid in* $\mathbf{G}$ *ist.*

Offensichtlich können alle Sätze über die relativ konvexen bzw. konvexen Gruppoide und die direkten Produkte von Gruppoiden auf die inneren direkten Produkte übertragen werden.

S 7/1: *Es sei* $\mathbf{H}$ *ein Untergruppoid in der Halbgruppe* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}^{[\alpha]}$. *Außerdem sei* $\mathbf{P}_\iota = \mathbf{R}_\iota \cap \mathbf{H} \neq \emptyset$, $\mathbf{H}_\iota^*$ *die Projektion von* $\mathbf{H}$ *in* $\mathbf{R}_\iota (\iota = 1, \ldots, \alpha)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \ldots \times \mathbf{P}_\alpha$, $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}_1^* \times \ldots \times \mathbf{H}_\alpha^*$. *Dann sind folgende Aussagen*

$$\mathbf{P}_\iota = \mathbf{H}_\iota^* \qquad (\iota = 1, \ldots, \alpha), \tag{4.1}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H}, \tag{6.1}$$

$$\mathbf{H} \textit{ ist in bezug auf } \mathbf{R}^{[\alpha]} \textit{ konvex}, \tag{7.1}$$

untereinander äquivalent.

Der Beweis folgt aus [10], S 10/3.

Bemerkung 3/1: $\mathbf{G}$ sei eine Halbgruppe mit dem Einselement *e* und $\mathbf{Z}$ die Menge aller zentralen Elemente von $\mathbf{G}$. Wenn $\{e\} \neq \mathbf{Z} \neq \mathbf{G}$ ist, so ist *Z* das Feld eines nichttrivialen Untergruppoides $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{G}$ und heißt *das* (*nichttriviale*) *Zentrum* in $\mathbf{G}$.

S 8/1: $\mathbf{Z}$ *sei das Zentrum der Halbgruppe* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ *und* $\mathbf{Z}_\iota$ *das Zentrum in* $\mathbf{R}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$. *Dann ist* $\mathbf{Z}$ *konvex und ist das innere Produkt der Zentren* $\mathbf{Z}_\iota$, d. h.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \times \ldots \times \mathbf{Z}_\alpha.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus [10], S 20/3, S 21/3, S 22/3 und D 1/1.

Da jede Gruppe das Einselement e besitzt, können wir den folgenden Satz aussprechen:

S 9/1: 1) *Eine gruppe* $\boldsymbol{G}$ *ist das innere direkte Produkt ihrer Untergruppen* $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_\alpha$ *dann und nur dann, wenn*

a) *jedes Element* $r \in \boldsymbol{G}$ *auf genau eine Weise in der Form* $r = r_1 \dots r_\alpha$ *geschrieben werden kann, wo* $r_\iota \in \boldsymbol{R}_\iota$ $(\iota = 1, \dots, \alpha)$,

b) *für* $r_\iota \in \boldsymbol{R}_\iota$, $r_\varkappa \in \boldsymbol{R}_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \dots, \alpha)$ *gilt* $r_\iota r_\varkappa = r_\varkappa r_\iota$.

2) *Die Bedingung b) ist mit der Bedingung c) äquivalent:* $\boldsymbol{R}_\iota$ *ist eine normale Untergruppe in* $\boldsymbol{G}$ *für* $\iota = 1, \dots, \alpha$.

Beweis: 1) Da $e \in \boldsymbol{G}$ und $e \in \boldsymbol{R}_\iota$ $(\iota = 1, \dots, \alpha)$ ist, sind die Bedingungen S 1/1 erfüllt. Somit gilt 1).

2) Es gelten die Bedingungen a) und c). Es sei $a \in \boldsymbol{R}_\iota$, $b \in \boldsymbol{R}_\varkappa$ $(\iota \neq \varkappa)$. Da $\boldsymbol{R}_\iota$, $\boldsymbol{R}_\varkappa$ die normalen Untergruppen in $\boldsymbol{G}$ sind, gilt auch $aba^{-1} \in \boldsymbol{R}_\varkappa$, $ba^{-1}b^{-1} \in \boldsymbol{R}_\iota$, d. h. der Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ liegt sowohl in $\boldsymbol{R}_\iota$ als auch in $\boldsymbol{R}_\varkappa$. Mit anderen Worten $aba^{-1}b^{-1} \in \boldsymbol{R}_\iota \cap \boldsymbol{R}_\varkappa$. Nach S 2/1 und nach der Bemerkung 1/1 enthält $\boldsymbol{R}_\iota \cap \boldsymbol{R}_\varkappa$ genau ein Element, und zwar das Einselement e. Hiemit $aba^{-1}b^{-1} = e$, woraus die Vertauschbarkeit der Elemente a, b folgt. Dadurch ist die Gültigkeit von b) bewiesen.

Gelten nun a) und b), so gilt für jedes Element $r = r_1 \dots r_\alpha \in \boldsymbol{G}$ und für jedes $a_\iota \in \boldsymbol{R}_\iota$ in bezug auf b) $r^{-1}a_\iota r = (r_1 \dots r_\alpha)^{-1}\, a_\iota(r_1 \dots r_\alpha) = r_\iota^{-1} a_\iota r_\iota \in \boldsymbol{R}_\iota$. Also $\boldsymbol{R}_\iota$ $(\iota = 1, \dots, \alpha)$ ist eine normale Untergruppe in $\boldsymbol{G}$. Somit ist der Satz bewiesen.

S 10/1: $\boldsymbol{R}_\iota$ *seien normale Untergruppen und e das Einselement in einer Gruppe* $\boldsymbol{G}$. *Ferner sei* $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{R}_1 \,.\, \boldsymbol{R}_2 \dots \boldsymbol{R}_\alpha$, $\boldsymbol{R}_\iota \cap \boldsymbol{R}_\varkappa = \{e\}$ *für* $\iota \neq \varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \dots, \alpha)$. *Dann ist* $\boldsymbol{G}_0$ *eine normale Untergruppe in* $\boldsymbol{G}$ *und es gilt:*

a) $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_\alpha$,

b) $\boldsymbol{R}_\iota \cap (\boldsymbol{R}_1 \dots \boldsymbol{R}_{\iota-1}\boldsymbol{R}_{\iota+1} \dots \boldsymbol{R}_\alpha) = \{e\}$.

Beweis: Wie bekannt (z. B. [6], 42) $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{R}_1 \dots \boldsymbol{R}_\alpha$ ist eine normale Untergruppe in $\boldsymbol{G}$. Weiter benutzen wir die mathematische Induktion. Für $\alpha = 2$ haben wir $\boldsymbol{R}_1 \cap \boldsymbol{R}_2 = \{e\}$. Aus jeder Gleichheit $a_1 a_2 = b_1 b_2 (a_1, b_1 \in \boldsymbol{R}_1, a_2, b_2 \in \boldsymbol{R}_2)$ ergibt sich dann $b_1^{-1} a_1 = b_2 a_2^{-2}$. Da $b_1^{-1} a_1 \in \boldsymbol{R}_1$, $b_2 a_2^{-1} \in \boldsymbol{R}_2$, gilt unbedingt $b_1^{-1} a_1 = b_2 a_2^{-1} \in \boldsymbol{R}_1 \cap \boldsymbol{R}_2 = \{e\}$, woraus $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ folgt. Dieses bedeutet jedoch, daß für $\alpha = 2$ jedes Element $a \in \boldsymbol{G}_0$ auf genau eine einzige Weise als Produkt der Elemente $a_1 \in \boldsymbol{R}_1$, $a_2 \in \boldsymbol{R}_2$ geschrieben werden kann. Da $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ die normalen Untergruppen in $\boldsymbol{G}_0$ sind, sind auch die Bedingungen a) und c) aus S 9/1 erfüllt und es gilt $\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2$. Es gelte nun für $\alpha - 1 \geqq 2$ $\boldsymbol{R}_1 \dots \boldsymbol{R}_{\alpha-1} = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_{\alpha-1}$. Setzen wir $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_{\alpha-1} = \boldsymbol{R}_1 \dots \boldsymbol{R}_{\alpha-1}$. Hiernach ist $\boldsymbol{S}$ eine normale Untergruppe in $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{R}_1 \dots \boldsymbol{R}_{\alpha-1} \,.\, \boldsymbol{R}_\alpha$ und nach dem vorher Gesagten gilt $\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}_\alpha = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{R}_\alpha$. Da für die Multiplikation in $\boldsymbol{G}$ sowie auch für das direkte Produkt das assoziative Gesetz gilt, gilt auch $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{R}_1 \dots \boldsymbol{R}_{\alpha-1} \,.\, \boldsymbol{R}_\alpha = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_{\alpha-1} \times \boldsymbol{R}_\alpha$.

b) Nach a) ist $\mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_{\iota-1} . \mathbf{R}_{\iota+1} \ldots \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_{\iota-1} \times \mathbf{R}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ und in bezug auf S 9/1 b) kann man schreiben $\mathbf{R}_\iota . {}^{(\iota)}\mathbf{R} = \mathbf{R}_\iota \times {}^{(\iota)}\mathbf{R}$. Da $\mathbf{G}_0 = \mathbf{R}_\iota \times \times {}^{(\iota)}\mathbf{R}$ ergibt sich nach S 2/1 $\mathbf{R}_\iota \cap {}^{(\iota)}\mathbf{R} = \{e\}$ und damit auch der Beweis des Satzes.

Bemerkung 3/1: Sind die Untergruppen $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ der Gruppe $\mathbf{G}$, so ist die durch diese Untergruppen erzeugte Untergruppe $\langle \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha \rangle$ mit deren Produkt $\mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_\alpha$ dann und nur dann identisch, wenn die Untergruppen $\mathbf{R}_\iota$, $\mathbf{R}_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ vertauschbar sind ([6], 63). Da normalen Untergruppen der gegebenen Gruppe stets vertauschbar sind, gilt der folgende Satz:

S 11/1: *Eine Gruppe $\mathbf{G}$ ist das innere direkte Produkt ihrer Untergruppen $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ dann und nur dann, wenn*

a) *die Untergruppen $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ in $\mathbf{G}$ normal sind und $\mathbf{G}$ durch $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ erzeugt ist, d. h. $\mathbf{G} = \langle \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha \rangle$ gilt,*

b) *für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ $\mathbf{R}_\iota \cap \langle \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_{\iota+1}, \ldots, \mathbf{R}_\alpha \rangle = \{e\}$ gilt.*

Beweis: 1) Es sei $\mathbf{G}$ das direkte Produkt ihrer Untergruppen $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$. Nach S 9/1 c) sind $\mathbf{R}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$ die normalen Untergruppen in $\mathbf{G}$. Nach S 10/1 a) gilt $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_\alpha$. Bezüglich $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ die normalen Untergruppen in $\mathbf{G}$ sind, gilt $\langle \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_{\iota-1}, \mathbf{R}_{\iota+1}, \ldots, \mathbf{R}_\alpha \rangle = \mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_{\iota-1} . \mathbf{R}_{\iota+1} \ldots \mathbf{R}_\alpha = {}^{(\iota)}\mathbf{R}$. Dann nach S 10/1 b) ist $\mathbf{R}_\iota \cap {}^{(\iota)}\mathbf{R} = \{e\}$ und somit ist die Behauptung a) und b) unseres Satzes bewiesen.

2) Es gelte nun a) und b) unseres Satzes. Aus b) folgt für $\iota \neq \varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ $\mathbf{R}_\iota \cap \mathbf{R}_\varkappa = \{e\}$. Da nach a) $\mathbf{R}_\iota$, $\mathbf{R}_\varkappa$ normale Untergruppen in $\mathbf{G}$ sind, gilt für $u \in \mathbf{R}_\iota$, $v \in \mathbf{R}_\varkappa$, daß $uvu^{-1}v^{-1} \in \mathbf{R}_\iota \cap \mathbf{R}_\varkappa = \{e\}$ ist, woraus die Vertauschbarkeit der Elemente u, v folgt. Somit ist die Gültigkeit b) von S 9/1 bewiesen. Nunmehr können wir schon zum Beweis von a) übergehen. Aus der Beziehung $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_\alpha$ folgt, daß wir jedes Element $a \in \mathbf{G}$ auf genau eine Weise als Produkt $a = a_1 \ldots a_\alpha$ $(a_\iota \in \mathbf{R}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha)$ schreiben können. Wäre $a_1 \ldots a_\alpha = a = b_1 \ldots b_\alpha$ und wegen S 9/1 b) etwa $a_1 \neq b_1$, so erhielte man $a_1 = a(a_2 \ldots a_\alpha)^{-1}$, $b_1^{-1} = (b_2 \ldots b_\alpha)\, a^{-1}$ und somit auch $b_1^{-1}a_1 = (b_2 \ldots b_\alpha)\,(a^{-1}a)\,(a_2 \ldots a_\alpha)^{-1} = (b_2 a_2^{-2}) \ldots (b_\alpha a_\alpha^{-1})$. Dann gehöre das Element $b_1^{-1}a_1 \neq e$ wie in $\mathbf{R}_1$ als auch in $\mathbf{R}_2 \ldots \mathbf{R}_\alpha = \langle \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_\alpha \rangle$, was im Widerspruch mit b) unseres Satzes wäre. Somit ist die Bedingung a) von S 9/1 und zugleich der ganze Satz S 11/1 bewiesen.

S 12/1: *Es sei $\mathbf{A}$ eine normale Untergruppe der Gruppe $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ und $\mathbf{A}_\iota^*$ ihre Projektion in $\mathbf{R}_\iota$. Dann ist $\mathbf{A}_\iota^*$ die normale Untergruppe in $\mathbf{R}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$.*

Beweis: Nach S 4/1 ist $\mathbf{A}_\iota^*$ ein Untergruppoid in $\mathbf{R}_\iota$ und $\mathbf{d}_\iota$ eine P-Deformation ([10], S 6/3), d. h. eine homomorphe Abbildung von $\mathbf{G}$ auf $\mathbf{R}_\iota$. Folglich ist $\mathbf{A}_\iota^*$ eine normale Untergruppe in $\mathbf{R}_\iota$ ([1], 181).

S 13/1: *$\mathbf{G}$ sei eine Gruppe ohne (nichttriviales) Zentrum und $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{G} = \mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_\beta$. Dann gilt:*

a) *$\mathbf{R}_\iota$ ist in bezug auf $\mathbf{S}^{[\beta]}$ und $\mathbf{S}_\varkappa$ in bezug auf $\mathbf{R}^{[\alpha]}$ konvex,*

b) *Diese inneren direkten Produkte besitzen isomorphe Verfeinerungen und* $\boldsymbol{G}$ *ist das innere direkte Produkt genau aller Untegruppen* $\boldsymbol{C}_{\iota\varkappa} = \boldsymbol{R}_\iota \cap \boldsymbol{S}_\varkappa$ $(\iota = 1, \dots, \alpha;\ \varkappa = 1, \dots, \beta)$.

Beweis: a) Es sei $\boldsymbol{R}^*_{\iota\varkappa}$ die Projektion von $\boldsymbol{R}_\iota$ in $\boldsymbol{S}_\varkappa$ und $\boldsymbol{S}^*_{\varkappa\iota}$ die Projektion von $\boldsymbol{S}_\varkappa$ in $\boldsymbol{R}_\iota$ $(\iota = 1, \dots, \alpha, \varkappa = 1, \dots, \beta)$. Wegen $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_\alpha = \boldsymbol{S}_1 \times \dots \times \boldsymbol{S}_\beta$ und da $\boldsymbol{R}_\iota$ die Projektion von $\boldsymbol{G}$ auf $\boldsymbol{R}_\iota$ ist, erzeugen die normalen Untergruppen $\boldsymbol{S}^*_{\varkappa\iota}$ ersichtlich die Untergruppe $\boldsymbol{R}_\iota$. Die Elemente von Untergruppen $\boldsymbol{S}^*_{\varkappa\iota}$, $\boldsymbol{S}^*_{\nu\iota}$ $(\varkappa \neq \nu, \nu = 1, \dots, \beta)$ sind vertauschbar, denn sie sind die Projektionen vertauschbarer Elemente von $\boldsymbol{S}_\varkappa$ und $\boldsymbol{S}_\nu$. Nach [10], S 21/3 besitzt $\boldsymbol{R}_\iota$ kein (nichttriviales) Zentrum, weshalb auch der Durchschnitt von $\boldsymbol{S}^*_{\varkappa\iota}$ mit der von übrigen Untergruppen $\boldsymbol{S}^*_{\nu\iota}$ erzeugten Untergruppe der Menge $\{e\}$ gleich ist, denn die Elemente dieses Durchschnitts mit allen Elementen von $\boldsymbol{R}_\iota$ vertauschbar sein müssen. Die Voraussetzungen von S 11/1 sind also erfüllt. Folglich ist $\boldsymbol{R}_\iota = \boldsymbol{S}^*_{1\iota} \times \dots \times \boldsymbol{S}^*_{\beta\iota}$ $(\iota = 1, \dots, \alpha)$. Ähnlich beweist man $\boldsymbol{S}_\varkappa = \boldsymbol{R}^*_{1\varkappa} \times \dots \times \boldsymbol{R}^*_{\alpha\varkappa}$ $(\varkappa = 1, \dots, \beta)$. Es gelten also die Voraussetzungen von S 19/3 aus [10]. b) nach [10], S 17/3 und $\boldsymbol{G}$ ist direktes Produkt der Untergruppen $\boldsymbol{C}_{\iota\varkappa} = \boldsymbol{R}_\iota \cap \boldsymbol{S}_\varkappa$. Somit ist der Satz bewiesen.

Wie bekannt, verstehen wir unter einem Kommutator der Elemente a, b einer Gruppe $\boldsymbol{G}$ das Element $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$. Die Menge aller Kommutatoren von allen Elementepaaren $a, b \in \boldsymbol{G}$ ist das Feld der sogenannten Kommutatorgruppe, die in $\boldsymbol{G}$ normal ist (z. B. [6], 92, 94).

S 14/1: *Es sei* $\boldsymbol{C}$ *die Kommutatorgruppe in der Gruppe* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_\alpha$ *und* $\boldsymbol{C}_\iota$ *die Kommutatorgruppe in* $\boldsymbol{R}_\iota$. *Dann ist* $\boldsymbol{C}$ *das innere direkte Produkt von* $\boldsymbol{C}_\iota$, *d. h. es gilt* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \times \dots \times \boldsymbol{C}_\alpha$. *Dabei ist* $\boldsymbol{C}$ *in* $\boldsymbol{G}$ *konvex.*

Beweis: Es bezeichne $\boldsymbol{C}^*_\iota$ die Projektion von $\boldsymbol{C}$ in $\boldsymbol{R}_\iota$ $(\iota = 1, \dots, \alpha)$. Ferner sei $a, b \in \boldsymbol{G}$, $a = a_1 \dots a_\alpha$, $b = b_1 \dots b_\alpha$. Hiernach ist leicht ersichtlich, daß die Projektion des Produktes ab in $\boldsymbol{R}_\iota$ das Produkt der Projektionen von Faktoren a, b ist, d. h. es ist das Element $a_\iota b_\iota$. Die Projektion vom Kommutator $a^{-1}b^{-1}ab \in \boldsymbol{G}$ in $\boldsymbol{R}_\iota$ ist also das Element $a_\iota^{-1}b_\iota^{-1}a_\iota b_\iota$, was eingentlich der Kommutator von Elementen a_ι, $b_\iota \in \boldsymbol{R}_\iota$ ist. Folglich gilt $\boldsymbol{C}^*_\iota \subset \boldsymbol{C}_\iota$. Die Kommutatorgruppe $\boldsymbol{C}$ von $\boldsymbol{G}$ enthält die Kommutatoren aller Paare $a, b \in \boldsymbol{G}$ und wohl auch aller Paare $a_\iota, b_\iota \in \boldsymbol{R}_\iota \subset \boldsymbol{G}$. Darum gilt $\boldsymbol{C}_\iota \subset (\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{R}_\iota)$. Wir haben also insgesamt erhalten $\boldsymbol{C}^*_\iota \subset \boldsymbol{C}_\iota \subset (\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{R}_\iota)$. Nach S 5/1 a) ist $(\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{R}_\iota) \subset \boldsymbol{C}^*_\iota$ und es gilt demnach $\boldsymbol{C}^*_\iota = \boldsymbol{C}_\iota = (\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{R}_\iota)$, $\iota = 1, \dots, \alpha$. Nach S 7/1 ist dann $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \times \dots \times \boldsymbol{C}_\alpha$ und nach diesem Satze ist auch $\boldsymbol{C}$ in bezug auf jedes innere direkte Produkt $\boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_\alpha$ der Gruppe $\boldsymbol{G}$ konvex, d. h. $\boldsymbol{C}$ ist in $\boldsymbol{G}$ konvex.

2. Faktorgruppen und Deformationen

S 1/2: *Es sei* $\boldsymbol{G}$ *eine Gruppe und* $\boldsymbol{R}_\iota$ $(\iota = 1, \dots, \alpha)$ *ihre Untergruppen,* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_\alpha$, ${}^{(\iota)}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 \times \dots \times \boldsymbol{R}_{\iota-1} \times \boldsymbol{R}_{\iota+1} \times \dots \times \boldsymbol{R}_\alpha$. *Dann sind die Faktor-*

gruppen $\bar{\mathbf{G}}_\iota = \mathbf{G}/{}^{(\iota)}\mathbf{R}$ *mit* $\mathbf{R}_\iota$ *isomorph. Die Elemente* $\bar{a}_\iota$ *der Faktorgruppe* $\bar{\mathbf{G}}_\iota$ *sind die mit* ${}^{(\iota)}\mathbf{R}$ *äquivalenten Mengen.*

Beweis: Nach S 9/1 und S 10/1 sind $\mathbf{R}_\iota$ und ${}^{(\iota)}\mathbf{R}$ normale Untergruppen in $\mathbf{G}$. Nach S 11/1 gilt $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_\alpha$. Aus dem Beweis von S 2/4 aus [10] folgt, daß $\bar{a}_\iota = \mathbf{R}_1 \times \ldots \mathbf{R}_{\iota-1} \times \{a_\iota\} \times \mathbf{R}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ und in bezug auf die Vertauschbarkeit der Elemente von $\mathbf{R}_\iota$, $\mathbf{R}_\varkappa$ für $\iota \neq \varkappa$, bekommt man $\bar{a}_\iota = \{a_\iota\} \times {}^{(\iota)}\mathbf{R} = a.\, {}^{(\iota)}\mathbf{R}$. Demnach gilt $\bar{a}_\iota \in \mathbf{G}/{}^{(\iota)}\mathbf{R} = \bar{\mathbf{G}}_\iota$ Die übrigen Behauptungen folgen aus [10], S 2/4.

S 2/2: *Es sei* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ *eine Gruppe,* ${}^{(\iota)}\mathbf{R}$ *die Gruppe und* $\bar{\mathbf{G}}_\iota$ *die Faktorgruppe aus S 2/1. Ferner sei* $\mathbf{f}$ *die isomorphe Abbildung von* $\mathbf{G}$ *auf* $\mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ *und* $\mathbf{f}_\iota$ *eine derartige Abbildung, die jedem Element* $a \in \bar{a}_\iota = a_\iota \,.\, {}^{(\iota)}\mathbf{R}$ *das Element* $a_\iota \in \mathbf{R}_\iota$ *zuordnet. Dann ist* $\mathbf{f}_\iota$ *eine Deformation von* $\mathbf{G}$ *auf* $\mathbf{R}_\iota$ *und stellt die P-Deformation (im Sinne von* [10], *S 6/3) dar, die durch* $\mathbf{f}$ *induziert ist.*

Der Beweis folgt leicht aus dem Isomorphismus von $\bar{\mathbf{G}}_\iota$ auf $\mathbf{R}_\iota$ (S 1/2) und aus der natürlichen Deformation von $\mathbf{G}$ auf $\bar{\mathbf{G}}_\iota$.

S 3/2: *Es sei* $\mathbf{f}$ *eine isomorphe Abbildung der Gruppe* $\mathbf{G}$ *auf das innere direkte Produkt* $\mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, *für die* $\mathbf{f}r = (r_1, \ldots, r_\alpha)$ *dann und nur dann ist, wenn* $r = r_1 \ldots r_\alpha$. *Es sei* $\{\bar{\mathbf{G}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{G}}_\alpha\}$ *ein zum System der Untergruppen* $\{\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha\}$ *gehöriges Faktorgruppensystem. Es sei* $\mathbf{f}_\iota$ *eine P-Deformation von* $\mathbf{G}$ *auf* $\mathbf{R}_\iota$. *Dann wird durch jede Faktorgruppe* $\bar{\mathbf{G}}_\iota = \mathbf{G}/{}^{(\iota)}\mathbf{R}$ *aus diesem System genau eine P-Deformation* $\mathbf{f}_\iota$ *von* $\mathbf{G}$ *auf* $\mathbf{R}_\iota$ *definiert und umgekehrt.*

Der Beweis folgt offensichtlich aus [10], S 2/4, D 3/4 und S 2/2.

D 1/2: *Es sei* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, $\bar{\mathbf{G}}_\iota = \mathbf{G}/{}^{(\iota)}\mathbf{R}$ *die Faktorgruppe und* $\mathbf{f}_\iota$ *die P-Deformation aus S 3/2. Dann heißt das System aller Faktorgruppen aus S 3/2 das vollständige, zum System* $\{\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha\}$ *(oder zum System* $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\alpha\}$*) gehörige Faktorgruppensystem. Die Menge* $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\alpha\}$ *heißt dann das vollständige, zum System* $\{\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha\}$ *gehörige P-Deformationensystem.*

S 4/2: *Es sei* $\mathbf{G}$ *eine Gruppe und es gelte* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, ${}^{(\iota)}\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_{\iota-1} \times \mathbf{R}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$. *Dann gilt:*

a) ${}^{(\iota)}\mathbf{R}{}^{(\varkappa)}\mathbf{R} = \mathbf{G}$ *für* $\iota \neq \varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$,

b) $\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} {}^{(\iota)}\mathbf{R} = \{e\}$.

Beweis: a) Nach S 1/2 ist $\bar{\mathbf{G}}_\iota = \mathbf{G}/{}^{(\iota)}\mathbf{R}$, $\bar{\mathbf{G}}_\varkappa = \mathbf{G}/{}^{(\varkappa)}\mathbf{R}$. Nach [10], S 3/4 a) gilt $[\bar{\mathbf{G}}_\iota, \bar{\mathbf{G}}_\varkappa] = \bar{\mathbf{G}}_{\max}$ für $\iota \neq \varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$. Nach [1], 167 gilt $[\mathbf{G}/{}^{(\iota)}\mathbf{R}, \mathbf{G}/{}^{(\varkappa)}\mathbf{R}] = \mathbf{G}/{}^{(\iota)}\mathbf{R}{}^{(\varkappa)}\mathbf{R}$, woraus ${}^{(\iota)}\mathbf{R}{}^{(\varkappa)}\mathbf{R} = \mathbf{G}$ folgt.

b) Nach [10], S 3/4 c) ist $(\bar{\mathbf{G}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{G}}_\alpha) = (\mathbf{G}/{}^{(1)}\mathbf{R}, \ldots, \mathbf{G}/{}^{(\alpha)}\mathbf{R}) = \bar{\mathbf{G}}_{\min}$. Hier folgt nach [1], 167 $(\bar{\mathbf{G}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{G}}_\alpha) = \mathbf{G}/\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} {}^{(\iota)}\mathbf{R}$, was mit $\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} {}^{(\iota)}\mathbf{R} = \{e\}$ gleichbedeutend ist.

S 5/2: *Es sei* $\mathbf{G}$ *eine Gruppe,* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$, $\mathbf{G} = \mathbf{R}'_1 \times \mathbf{R}'_2$ *und* $\mathbf{R}_2$ *mit* $\mathbf{R}'_2$ *iso-*

morph. Es sei $\mathbf{Z}$ *das Zentrum in* $\mathbf{G}$ *und* $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}'_1, \mathbf{Z}'_2$ *die Zentren in* $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2$. *Dann gilt:*

a) $\mathbf{R}_1$ *ist mit* $\mathbf{R}'_1$ *isomorph,*

b) $\mathbf{Z}_1$ *und* $\mathbf{Z}'_1$, $\mathbf{Z}_2$ *und* $\mathbf{Z}'_2$ *sind isomorph.*

Beweis: Die Behauptung ist richtig nach [10], S 4/4.

3. Direkt Zerlegbare Gruppen

D 1/3: *Die Gruppe* $\mathbf{G}$ *heißt direkt zerlegbar, wenn in ihr solche Untergruppen* $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ *bestehen, daß*

1. $\mathbf{G}$ *das innere direkte Produkt dieser Gruppen ist, d. h.* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$,
2. *jede Faktorgruppe* $\bar{\mathbf{G}}_\iota = \mathbf{G}/^{(\iota)}\mathbf{R} \neq \bar{\mathbf{G}}_{\min}$, *d. h.* ${}^{(\iota)}\mathbf{R} \neq \{e\}$.

In diesem Falle spricht man auch über (*innere*) *direkte Zerlegung der Gruppe* $\mathbf{G}$ *und* $\mathbf{R}_\iota$ *wird direkter Faktor dieser direkten Zerlegung genannt.* Sonst sagt man, *die Gruppe* $\mathbf{G}$ *ist direkt unzerlegbar.*

S 1/3: *Die Grupe* $\mathbf{G}$ *ist dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn in ihr solche Untergruppen* $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha$ *existieren, daß:*

a) $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ *ist,*

b) *keine der P-Deformationen* $\mathbf{f}_\iota$ *aus dem volständigen, zu* $\{\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_\alpha\}$ *gehörigen System* $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\alpha\}$ *eine isomorphe Abbildung ist.*

Der Beweis folgt aus [10], S 5/4.

S 2/3: *Es sei* $\mathbf{G}$ *eine direkt zerlegbare Gruppe. Dann ist* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, *wo gilt:*

a) $\alpha \geqq 2$,

b) *mindestens zwei Untergruppen* $\mathbf{R}_\iota$, $\mathbf{R}_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ *derart bestehen, daß Card* $\mathbf{R}_\iota > 1$, Card $\mathbf{R}_\varkappa > 1$.

Der Beweis folgt aus [10], S 6/4.

Bemerkung 1/3: a) Unter einer trivialen Untergruppe $\mathbf{A}$ der Gruppe $\mathbf{G}$ versteht man, wie bekannt, eine derartige Untergruppe $\mathbf{A}$ für die entweder $\mathbf{A} = \mathbf{G}$ oder $\mathbf{A} = \{e\}$ gilt. Sonst heißt $\mathbf{A}$ eine nichttriviale Untergruppe von $\mathbf{G}$.

b) Wie bekannt, die Gruppe $\mathbf{G}$ heißt einfach, wenn sie genau triviale normale Untergruppen besitzt.

S 3/3: *Die Gruppe* $\mathbf{G}$ *mit dem Einselement e ist direkt zerlegbar dann und nur dann, wenn sie solche nichttriviale normale Untergruppen* $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ *besitzt, daß* $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ *und* $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \{e\}$ *gilt.*

Beweis: Da $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ normale Untergruppen in $\mathbf{G}$ sind, gilt $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$. Aus [1], 167 folgt, daß die Faktorgruppen $\bar{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}/\mathbf{R}_2$, $\bar{\mathbf{G}}_2 = \mathbf{G}/\mathbf{R}_1$ komplementär sind. Nach [1], 167 gilt für ihre kleinste gemeinsame Überdeckung die Gleichheit $[\bar{\mathbf{G}}_1, \bar{\mathbf{G}}_2] = \mathbf{G}/\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$, woraus in bezug auf $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ $[\bar{\mathbf{G}}_1, \bar{\mathbf{G}}_2] = \bar{\mathbf{G}}_{\max}$ folgt. Da $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \{e\}$

ist, gilt nach [1], 167 für die größte gemeinsame Verfeinerung $(\bar{\mathbf{G}}_1, \bar{\mathbf{G}}_2) = $ $= \mathbf{G}/\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \bar{\mathbf{G}}_{\min}$. $\bar{\mathbf{G}}_1$, $\bar{\mathbf{G}}_2$ sind also stark komplementär. Da $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ nichttriviale Untergruppen in $\mathbf{G}$ sind, sind auch die Faktorgruppen $\bar{\mathbf{G}}_1$, $\bar{\mathbf{G}}_2$ nichttrivial. Nach [1], 167 sind alle Faktorgruppen auf $\mathbf{G}$ von genau allen normalen Untergruppen erzeugt. Die Bedingungen des Satzes S 7/4 aus [10] sind somit erfüllt und unser Satz bewiesen.

S 4/3: *Eine einfache Gruppe ist direkt unzerlegbar.*

Beweis: $\mathbf{G}$ und $\mathbf{E} = \{e\}$ sind die einzigen möglichen normalen Untergruppen in der einfachen Gruppe $\mathbf{G}$, woraus sich nach S 3/3 unsere Behauptung ergibt.

D 2/3: *$\mathbf{G}$ heißt eine direkt vollständig zerlegbare Gruppe, wenn für jeden Faktor $\mathbf{R}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$ der direkten Zerlegung $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ folgende Bedingungen gelten:*

a) *$\mathbf{R}_\iota$ ist eine direkt unzerlegbare Gruppe,*

b) Card $\mathbf{R}_\iota > 1$, *d. h.* $\mathbf{R}_\iota \neq \{e\}$.

In diesem Falle spricht man auch über eine *direkte vollständige Zerlegung von* $\mathbf{G}$.

S 5/3: *Es sei $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ eine direkte Zerlegung der Gruppe $\mathbf{G}$ und es gelte für jeden Faktor $\mathbf{R}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$*

a) *$\mathbf{R}_\iota$ ist einfach,*

b) Card $\mathbf{R}_\iota > 1$.

Dann ist $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$ eine direkte vollständige Zerlegung.

Der Beweis folgt aus [10], S 9/4 und S 4/3.

S 6/3: *Es seien $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{G} = \mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_\beta$ direkte vollständige Zerlegungen der Gruppe $\mathbf{G}$. Die Gruppe $\mathbf{G}$ sei ohne (nichttriviales) Zentrum. Dann sind diese direkte Zerlegungen isomorph.*

Beweis: Nach der Voraussetzung sind $\mathbf{R}_\iota$, $\mathbf{S}_\varkappa$ direkt unzerlegbare Gruppen. Mit Berufung auf Beweis des Satzes S 13/1 gelten diese Gleichheiten: $\mathbf{R}_\iota = \mathbf{S}_{1\iota}^* \times \ldots \times \mathbf{S}_{\beta\iota}^*$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$, $\mathbf{S}_\varkappa = \mathbf{R}_{1\varkappa}^* \times \ldots \times \mathbf{R}_{\alpha\varkappa}^*$ $(\varkappa = 1, \ldots, \beta)$. Es sind also die Bedingungen 2. des Satzes 10/4 aus [10] erfüllt. Damit ist gezeigt, daß unsere Behauptung richtig ist.

S 7/3: *Es seien $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{G} = \mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_\beta$ direkte Zerlegungen und es gelte für die direkten Faktoren für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$:*

a) *$\mathbf{R}_\iota$, $\mathbf{S}_\varkappa$ sind einfache Gruppen,*

b) Card $\mathbf{R}_\iota > 1$, Card $\mathbf{S}_\varkappa > 1$.

Es gelten weiter die übrigen Voraussetzungen aus S 6/3. Dann sind die betrachteten Zerlegungen isomorph.

Der Beweis folgt aus S 4/3 und S 6/3.

Man kann abschließend noch bemerken, daß die ganze hier demonstrierte Theorie sich auf die Gruppoide- und Gruppentheorie mit Operatoren erweitern läßt. Die

Anwendung der Kettentheorie auf die der inneren Produkte von Gruppoiden und Gruppe mit Operatoren wurde bereits in der Zusammenfassung von [9] angedeutet und in [8] durchgeführt.

LITERATUR

[1] *Borůvka O.*: Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin, 1960.
[2] *Borůvka O.*: Základy teorie grupoidů a grup, Praha, 1962.
[3] *Borůvka O.*: Über Ketten von Faktoroiden, Math. Ann. 118 (1941—43) 41—64.
[4] *Dubreil P.—Dubreil—Jacotin M. L.*: Leçons d' algèbre moderne, Paris, 1961.
[5] *Jakubík J.*: Direktné súčiny sväzov, Dissertation (nicht pub.), J. A. Komenský Universität, Bratislava, 1950.
[6] *Kurosch A. G.*: Gruppentheorie, Berlin, 1953.
[7] *Rédei L.*: Algebra I., Leipzig, 1959.
[8] *Sedláček L.*: Direktní součiny grupoidů s operátory, Habilitierungschrift (nicht pub.), Palacký Universität, 1964.
[9] *Sedláček L.*: Užití zobecněné věty Jordan-Hölderovy v teorii direktních součinů množin s operátory, Acta Univ. Pal. Olomucensis, fac. rer. nat., T 21 (1966), 45—57.
[10] *Sedláček L.*: Zum Problem des Isomorphismus der direkten Produkte von Gruppoiden, Acta Univ. Pal. Ol., fac. rer. nat., T 27 (1968), 111—134.
[11] *Szász G.*: Einführung in die Verbandstheorie, Leipzig, 1962.

SHRNUTÍ

K PROBLÉMU VNITŘNÍCH DIREKTNÍCH SOUČINŮ GRUPOIDŮ

LADISLAV SEDLÁČEK

V této práci jsou studovány některé otázky vnitřních direktních součinů grupoidů a grup, jejich izomorfního zjemnění a izomorfismu. Práce je pokračováním práce [10] a využívá výsledků tam dosažených.
Vnitřní direktní součin grupoidů je definován takto (D 1/1): Nechť $\boldsymbol{R}_\iota$ jsou podgrupoidy grupoidu $\boldsymbol{G}$. Nechť $\boldsymbol{G}$ je direktním součinem těchto podgrupoidů, tj. nechť $\boldsymbol{G} \leftrightarrow \boldsymbol{R}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{R}_\alpha$. Je-li izomorfismus $\mathbf{d}$ grupoidu $\boldsymbol{G}$ na $\boldsymbol{R}_1 \times \ldots \boldsymbol{R}_\alpha$ dán předpisem $\mathbf{d}r = (r_1, \ldots, r_\alpha)$ tehdy a jen tehdy, když $r = r_1 \ldots r_\alpha$ $(r \in \boldsymbol{G}, r_\iota \in \boldsymbol{R}_\iota, \iota = 1, \ldots, \alpha)$, pak říkáme, že grupoid $\boldsymbol{G}$ je vnitřním direktním součinem svých podgrupoidů $\boldsymbol{R}_\iota$ a píšeme $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{R}_\alpha$. V § 1. jsou pak studovány vnitřní direktní součiny grupoidů, podmínky nutné a postačující pro jejich existenci (S 1/1, S 9/1, S 11/1). Je zaveden pojem relativně konvexního a konvexního podgrupoidu. Ukazuje se, že tento pojem je funkční, tj. že např. centrum pologrupy (S 8/1) a komutátorová

grupa (S 14/1) jsou konvexní podgrupoidy. Dále se pomocí relativní konvexnost dokazuje (S 13/1) známá věta o existenci izomorfního zjemnění vnitřních direktních součinů grupy bez netriviálního centra.

V § 2. jsou studovány některé otázky deformace (tj. homomorfismu) grup a faktorových grup z hlediska vnitřních direktních součinů. V § 3. jsou pak zkoumány některé vlastnosti direktně rozložitelných grup. Přitom v paragrafech 2. a 3. jde o další aplikace některých výsledků z práce [10].

РЕЗЮМЕ

К ПРОБЛЕМЕ ВНУТРЕННИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУППОИДОВ

ЛАДИСЛАВ СЕДЛАЧЕК

В настоящей работе изучаются некоторые вопросы внутрених прямых произведений группоидов и групп, их изоморфное уплотнение и изоморфизм. Работа является продолжением [10] и использует там достигнутые результаты.

Внутренное прямое произведение группоидов определяется следующим образом (D 1/1): Пусть $\mathbf{R}_\iota$ подгруппоиды группоиду $\mathbf{G}$. Пусть $\mathbf{G}$ прямое произведение этих подгруппоидов, т. е. пусть $\mathbf{G} \leftrightarrow \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$.

Если изоморфизм $\mathbf{d}$ группоиду $\mathbf{G}$ на $\mathbf{R}_1 \times \ldots \mathbf{R}_\alpha$ определен правилом $\mathbf{d}r = (r_1, \ldots, r_\alpha)$ тогда и только тогда, когда $r = r_1 \ldots r_\alpha$ $(r \in \mathbf{G},\ r_\iota \in \mathbf{R}_\iota,\ \iota = 1, \ldots, \alpha)$ тогда говорим, что группоид $\mathbf{G}$ есть внутренним прямым произведением своих подгруппоидов $\mathbf{R}_\iota$ и пишем $\mathbf{G} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_\alpha$.

В § 1. изучаются потом внутренние прямые произведения группоидов, необходимые и достаточные условия для их существования (S 1/1, S 9/1, S 11/1). Вводится понятие относительной выпуклости и выпуклого подгруппоида. Показывается, что это понятие является фнукциональным, т. е. что, например, центр полугруппы (S 8/1) и группа комутатор (S 14/1) являются выпуклыми группоидами. Далее доказывается с помощью относительной выпуклости (S 13/1) известная теорема о существлвании изоморфного уплотнения внутренних прямых произведений групп без нетривиального центра.

В § 2. изучаются некоторые вопросы гомоморфизма групп и фактор-групп с точки зрения внутренних прямых произведений. В § 3. изучаются потом некоторые свойства прямо разложительных групп. Причем в § 2. и 3. имеем дело с апликацией некоторых результатов из работы [10].