Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Dagmar Šedová

Verallgemeinerung der Sätze von Poincaré und Perron für Systeme von Differenzengleichungen im linearen Raum

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 91--95

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120019`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

VERALLGEMEINERUNG DER SÄTZE VON POINCARÉ UND PERRON FÜR SYSTEME VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN IM LINEAREN RAUM

DAGMAR ŠEDOVÁ
(Eingegangen am 20. September 1972)

In dieser Arbeit werden wir asymptotische Eigenschaften der Lösungen des Systems von Differenzengleichungen untersuchen. Wir beweisen zwei Sätze, die eine Verallgemeinerung des Poincaréschen und Perronschen Satzes aus der Theorie der linearen Differenzengleichungen mit veränderlichen Koeffizienten darstellen.

Wir beginnen mit den folgenden Definitionen:

Definition 1. *Ein Gleichungssystem der Form*

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{1}$$

definiert im k-dimensionalen linearen Raume, wo $\mathbf{x}_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk})$ *einen k-dimensionalen Vektor bedeutet, deren Komponenten Funktionen einer Veränderlichen* n ($n = 0, 1, \dots$) *sind und A bezeichnet eine* (k, k)*-Matrix, wird Differenzengleichungssystem mit konstanten Koefizienten gennant.*

Definition 2. *Die charakteristische Gleichung der Matrix A wird auch als charakteristische Gleichung des Differenzengleichungssystems*

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{1}$$

bezeichnet.

Definition 3. *Ein Gleichungssystem der Form*

$$x_{n+1} = A_n x_n \tag{2}$$

definiert im k-dimensionalem linearen Raume, wo $\mathbf{x}_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk})$ *wiederum einen Vektor des k-dimensionalen linearen Raumes bedeutet, deren Komponenten Funktionen der Veränderlichen n sind und* A_n *bedeutet eine* (k, k)*-Matrix, deren Ele-*

mente ebenfalls Funktionen der Veränderlichen n sind, wird Differenzengleichungssystem mit veränderlichen Koeffizienten genannt.

Definition 4. *Im Falle, daß $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ eine Matrix aus endlichen Elementen ist, wird die charakteristische Gleichung der Matrix A auch charakteristische Gleichung des Differenzengleichungssystems*

$$x_{n+1} = A_n x_n \tag{2}$$

genannt.

Zum Beweise des verallgemeinerten Poincaréschen und Perronschen Satzes benutzen wir zwei Sätze, die von G. A. Frejman (Frejmann (1957)) bewiesen worden sind.

Wird betrachten einen k-dimensionalen Vektorraum W mit einer fest erwählten Basis $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_k$. In diesem Raume sei ein Operator $\mathbf{A}$ gegeben, der mittels der Matrix $A = (a_{jp})\,(j, p = 1, 2, \ldots, k)$ definiert ist. Die Eigenwerte $\lambda_j\,(j = 1, 2, \ldots, k)$ von A mögen die Ungleichheiten

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_k| \tag{3}$$

erfüllen; die Eigenvektoren von A seien $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$. Die Koordinaten von $\mathbf{e}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ in der Basis $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_k$ wollen wir mit e_{js} $(j = 1, 2, \ldots, k)$ bezeichnen. Es sei weiter eine Folge von linearen Operatoren $\mathbf{A}_i$ in W, die durch die Matrizenfolge $A_i = (a_{jp}^{(i)})\,(j, p = 1, 2, \ldots, k)$ definiert ist. Schließlich wollen wir mit $x'_{1i}, x'_{2i}, \ldots, x'_{ki}$ die Koordinaten des Vektors $\mathbf{x}_i$ in der Basis $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_k$ bezeichnen

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{k} x'_{ji} g_j$$

und mit $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki}$ die Koordinaten des Vektors $\mathbf{x}_i$ in der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ji} e_j.$$

Satz 1. *Wenn die Vektorenfolge $\mathbf{x}_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ aus einem festen Vektor $\mathbf{x}_1$ durch sukzessive Benutzung des Operators $\mathbf{A}_i$ entsteht $(\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i)$, keiner der Vektoren $\mathbf{x}_i$ ein Nullvektor ist und die Bedingung*

$$\lim_{i\to\infty} a_{jp}^{(i)} = a_{jp}, \qquad (j, p = 1, 2, \ldots, k) \tag{4}$$

erfüllt ist, so existiert ein s, $1 \leqq s \leqq k$, daß

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} \frac{x_{ji}}{x_{si}} = 0, \qquad \text{für} \quad j \neq s \\ &\lim_{i\to\infty} \frac{x_{si+1}}{x_{si}} = \lambda_s. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Für solche j, für welche $x'_{js} \doteq 0$ *gilt weiter*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x'_{ji+1}}{x'_{ji}} = \lambda_s. \tag{6}$$

Satz 2. *Wenn die Bedingung* $\lim_{i\to\infty} a_{jp}^{(i)} = a_{jp}$ $(j, p = 1, 2, \dots, k)$ *gilt und die Matrixen* A_i *regulär sind, dann gibt es k linear unabhängige Vektoren* $\mathbf{x}_{ji}$ $(j = 1, 2, \dots, k)$ *so, daß für jeden Index j die Behauptung des Satzes 1 für* $s = j$ *und für die Vektorenfolge* $\mathbf{x}_{ji+1} = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{ji}$ *gilt.* Die Beweise dieser zwei Sätze sind in (Frejmann (1957))

Satz 3. (Der verallgemeinerte Satz von Poincaré). *Wenn bei dem Differenzengleichungssystem*

$$x_{n+1} = A_n x_n \tag{2}$$

die Matrixen A_n *einen endlichen Grenzwert A besitzen, die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von* (2) *die Ungleichheit* (3) *erfüllen und A besitzt die Eigenvektoren* $\mathbf{e}_j = (e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{kj})$, $j = 1, 2, \dots, k$, *so gleicht der Grenzwert des Quotienten*

$$\frac{\xi_{n+1\,i}}{\xi_{ni}},$$

für eine beliebige Lösung $\mathbf{x}_n$ *des Differenzengleichungssystems* (2) *einem der Wurzeln* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *der charakteristischen Gleichung, d. h. es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{n+1\,i}}{\xi_{ni}} = \lambda_j, \qquad j = 1, 2, \dots, k,$$

für alle Indexe i, für welche die i-te Koordinate des Vektors $\mathbf{e}_j$ *von Null verschieden ist.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 1. Die Matrix A_n stellt einen linearen Operator $\mathbf{A}_n$ dar, der dem Vektor $\mathbf{x}_n$ den Vektor $\mathbf{x}_{n+1}$ zurodnet. Die Matrix A_n genügt den Voraussetzungen vom Satz 1. Aus Satz 1 folgt unmittelbar, daß die Relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{n+1\,i}}{\xi_{ni}} = \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \dots, k)$$

gilt, wie aus (6) hervorgeht.

Im Sonderfalle, daß A eine Diagonalmatrix ist und die von Null verschiedenen Elemente die Ungleichheiten

$$|a_{11}| > |a_{22}| > \dots > |a_{kk}|$$

erfüllen, sind die Eigenvektoren von A der Form $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_k = (0, 0, \dots, 1)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{n+1\,j}}{\xi_{nj}} = \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \dots, k),$$

wo $\lambda_j = a_{jj} = \lim_{n\to\infty} a_{jj}^{(n)}$.

Satz 4 (Der verallgemeinerte Satz von Perron). *Wenn für den Differenzengleichungssystem die Voraussetzungen vom Satz 3 gelten und die Matrizen A_n sind ausserdem für jedes n regulär, so besitzt (2) k linear unabhängige Lösungen*

$$\mathbf{x}_n^{(1)}, \mathbf{x}_n^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_n^{(k)},$$

für welche die Relationen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{n+1i}^{(j)}}{\xi_{ni}^{(j)}} = \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

gelten und zwar für alle Indexe i, für welche die i-te Koordinate des Vektors $\mathbf{e}_j$ von Null verschieden ist.

Beweis: Die Behauptung dieses Satzes folgt aus Satz 2. Im Sonderfalle, daß die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ eine Basis des linearen Raumes darstellen, gilt die zu beweisende Relation nur für $i = j$ und die anderen Koordinaten des Vektors $\mathbf{e}_j$ sind Nullen, d. h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_{n+1j}^{(j)}}{\xi_{nj}^{(j)}} = \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

LITERATUR

[1] *Frejman G. A.:* O teoremach Poincaré i Perrona. „Uspechi mat. Nauk" N. S 12 N° 3 (75) 1957 241—246.

[2] *Perron O.:* Über einen Satz des Herrn Poincaré. „J. reine angew. Math". 136 1909 17—37.

[3] *Poincaré H.:* Sur les equations linearies aux differentielles ordinaries et aux differences finies. „Amer. J. math." 7 1885 213—217, 257—258.

SHRNUTÍ

ZOBECNĚNÍ POINCARÉOVY A PERRONOVY VĚTY PRO SOUSTAVU DIFERENČNÍCH ROVNIC V LINEÁRNÍM PROSTORU

DAGMAR ŠEDOVÁ

V práci jsou vyšetřovány asymptotické vlastnosti soustav diferenčních rovnic s proměnnými koeficienty

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n,$$

kde $\mathbf{x}_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk})$ je vektor k-rozměrného lineárního prostoru, jehož souřadnice jsou funkce proměnné n, a $\mathbf{A}_n$ je matice typu (k, k), jejíž prvky jsou opět funkce

proměnné n. Pro tyto soustavy jsou dokázány dvě věty, které jsou zobecněním Poincaréovy a Perronovy věty z teorie lineárních homogenních diferenčních rovnic s proměnnými koeficienty.

РЕЗЮМЕ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПУАНКАРЕ И ТЕОРЕМЫ ПЕРРОНА ДЛЯ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ДАГМАР ШЕДОВА

В работе рассмотриваются асымптотические свойства систем разностных уравнений с переменными коэффициентами

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x}_n$$

где $\boldsymbol{x}_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk})$ – вектор k-мерного линейного пространства, координатами которого являются функции переменной n, и $\boldsymbol{A}_n$ матрица типа (k, k), элементы которой опять функции переменной n. Для этой системы доказаны две теоремы (теорема 3 и теорема 4), которые являются обобщением теоремы Пуанкаре и теоремы Перрона из теории линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами.