Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Josef Šimek
Neue Methode der Lösung der Grundaufgaben zweiter Ordnung über Kegelschnitte

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol. 12 (1972), No. 1, 57--66

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120017`

**Terms of use:**

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

1972 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 37

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci*
*Vedoucí katedry: doc. RNDr. Josef Šimek*

# NEUE METHODE DER LÖSUNG DER GRUNDAUFGABEN ZWEITER ORDNUNG ÜBER KEGELSCHNITTE

JOSEF ŠIMEK

*(Eingelangt am 1. Juli 1971)*

Diese Behandlung über eine neue Methode der Lösung der Grundaufgaben zweiter Ordnung über Kegelschnitte ist ein Beitrag zur elementaren darstellenden Geometrie. Unter dem Begriff Grundaufgaben zweiter Ordnung über Kegelschnitte versteht man gewöhnlich zwei Aufgaben: „Ermittlung der Schnittpunk-

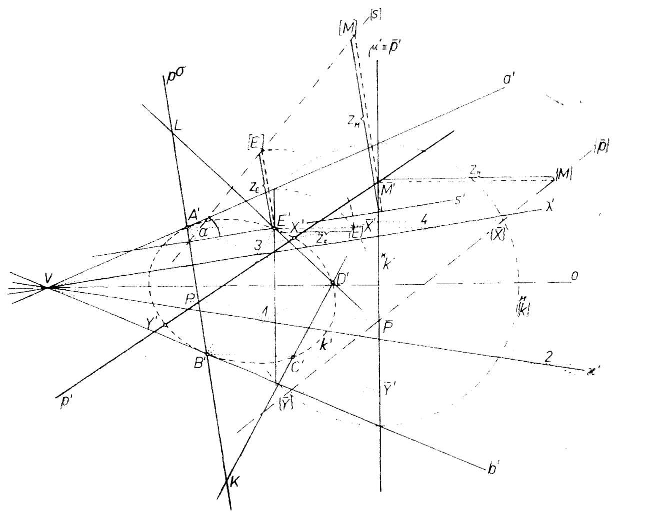


Fig. 1

te einer Geraden mit einem Kegelschnitt" und „Konstruktion der durch einen Punkt an einen Kegelschnitt gezogenen Tangenten".

Es ist bekannt, daß diese beiden Aufgaben zweiter Ordnung über Kegelschnitte gewöhnlich durch die Methode der projektiven Geometrie gelöst werden.

In dieser Arbeit führe ich die Lösung derselben zwei Aufgaben über Kegelschnitte an durch die von Raumgebilden abgeleitete Methode mit Verwendung der orthogonalen Eintafelprojektion, kurz gesagt „durch die Methode der darstellenden Geometrie". Um die Raumgebilde und ihre orthogonalen Risse zu unterscheiden, werden wir die orthogonalen Risse der Raumgebilde mit einem Strich bezeichnen.

Das Prinzip dieser darstellenden geometrischen Methode liegt darin, daß der durch fünf Elemente gegebene Kegelschnitt $k'$ als orthogonaler Riß des Kegelschnittes $k$, in dem eine gewisse Ebene $\sigma$ die Rotationskegelfläche schneidet, betrachtet wird; die Gerade $p'$, deren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt $k'$ ermittelt werden, und der Punkt $P'$, durch den Tangenten an den Kegelschnitt $k'$ gezogen werden sollen, werden als orthogonale Risse der in der Ebene $\sigma$ liegenden Gebilde betrachtet. Auf diese Weise haben wir die Ebenenaufgabe zweiter Ordnung über Kegelschnitte „Ermittlung der Schnittpunkte der Geraden $p'$ mit einem Kegelschnitt" auf die Aufgabe „Darstellung der Schnittpunkte der Geraden $p$ mit der Rotationskegelfläche" überführt und die Ebenenaufgabe „Konstruktion der durch den Punkt $P'$ an einen Kegelschnitt gezogenen Tangenten" auf die Aufgabe „Darstellung der Schnittlinien der Schnittebene $\sigma$ und der durch den Punkt $P$ an die Rotationskegelffläche gelegenen Tangentenebenen".

Jetzt zeigen wir die Verwendung dieser darstellenden geometrischen Methode an der Lösung einiger Aufgaben zweiter Ordnung über Kegelschnitte, wenn der Kegelschnitt verschiedenartig gegeben wird.

Fig. 1 zeigt die Ermittlung der Schnittpunkte $X'$, $Y'$ der Geraden $p'$ mit einem durch fünf Punkte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ gegebenen Kegelschnitt $k'$ (Fig. 1).

Die Verbindungsgerade von zwei beliebigen gegebenen Punkten, z. B. $A'$, $B'$, halten wir für die Spurlinie $p^{\sigma}$ einer gewissen Ebene $\sigma$, die in den Punkten $A'$, $B'$ des Kegelschnittes $k'$ konstruierten Tangenten $a'$, $b'$ für die Umrißerzeugenden der Rotationskegelfläche **K** mit der in der Bildebene $\pi$ liegenden Achse $o$. Die übriggebliebenen gegebenen Punkte $C'$, $D'$, $E'$ werden für die orthogonalen Risse der Punkte $C$, $D$, $E$ gehalten, die auf der Rotationskegelfläche **K** und in der Ebene $\sigma$ liegen; der Kegelschnitt $k'$ wird als orthogonaler Riß des Kegelschnittes $k$ betrachtet, in dem die Ebene $\sigma \equiv (A, B, C)$ die Rotationskegelfläche **K** schneidet, und die Gerade $p'$ wird für den orthogonalen Riß der in der Ebene $\sigma$ liegenden Geraden $p$ angesehen.

Die gesuchten Schnittpurkte $X'$, $Y'$ der Geranden $p'$ mit dem Kegelschnitte $k'$ sind die orthogonalen Risse der Punkte $X$, $Y$, in denen die Gerade $p$ den Kegelschnitt $k$ schneidet, d. h. orthogonale Risse der Schnittpunkte $X$, $Y$ der in der Ebene $\sigma$ liegenden Geraden $p$ mit der Rotationskegelfläche **K**.

Zuerst konstruieren wir die Tangenten $a'$, $b'$ in den Punkten $A'$, $B'$. Die Polarebene $\varkappa$ des Spurpunktes $K$ der Geraden $CD$ in Bezug auf die Rotationskegelfläche **K** steht senkrecht zur Bildebene $\pi$ ($K \equiv C'D' \,.\, p^{\sigma}$; $\varkappa' \equiv 12$, wo $1 \equiv A'C' . B'D'$ und $2 \equiv A'D' \,.\, B'C'$ sind); sinngemäß steht die Polarebene $\lambda$ des Spurpunktes $L$ der Geraden $DE$ in Bezug auf die Rotationskegelfläche **K** senkrecht zu $\pi$ ($L \equiv D'E' \,.\, p^{\sigma}$; $\lambda' \equiv 34$, wo $3 \equiv A'D' \,.\, B'E'$ und $4 \equiv B'D' \,.\, A'E'$ sind). Beide Polarebenen $\varkappa$ und $\lambda$ gehen durch die Spitze $V$ der Rotationskegelfläche **K** und $\varkappa' . \lambda' \equiv V' \equiv V$ ist ihre Spitze in $\pi$ und die Tangenten $a' \equiv \equiv V'A'$ und $b' \equiv V'B'$ sind ihre Umrißerzeugenden. Für die Ebene $\sigma \equiv \equiv (C, D, E)$ ist $p^\sigma \equiv A'B'$ ihre Spurlinie und die Tafelneigung $\alpha$ dieser Ebene ermitteln wir mit Hilfe ihrer durch den Punkt $E$ gehenden Fallinie $s$ ($\alpha = \sphericalangle s'[s]$).

Die in der Ebene $\sigma$ liegende Gerade $p$ wird durch zwei Punkte bestimmt, und zwar durch den Spurpunkt $P \equiv p' . p^\sigma$ und durch den Punkt $M \equiv p . \mu$, wo $\mu$ die Ebene eines beliebigen Kreises ${}^{M}k$ der Rotationskegelfläche **K** ist ($M' \equiv \equiv p' . \mu'$; $[M] \dashv s' = z_M$). Um die Schnittpunkte $X$, $Y$ der Geraden $p \equiv PM$ mit der Rotationskegelfläche **K** zu ermitteln, projizieren wir die Gerade $p \equiv PM$ von der Spitze $V$ der Rotationskegelfläche **K** auf die Ebene $\mu$ des Kreises ${}^{M}k$ ($\bar{p}' \equiv \bar{P}M'$; $\bar{P} \equiv VP . \mu'$) und dann klappen wir die Ebene $\mu$ mit dem Kreis ${}^{M}k$

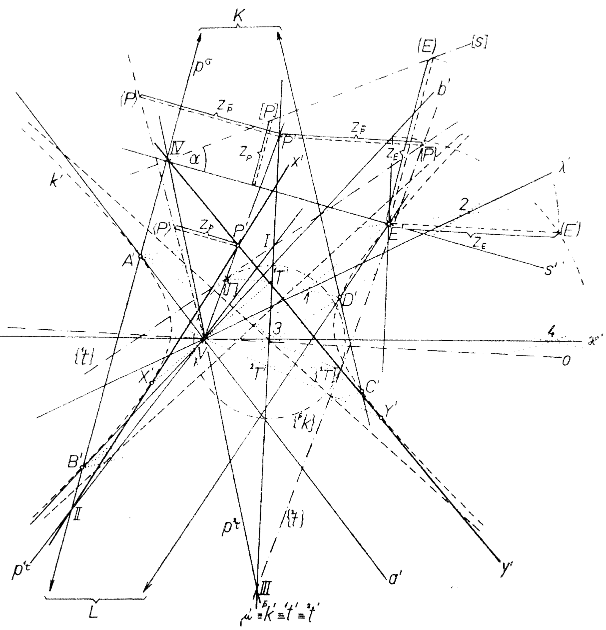


Fig. 2

---

[1]) Die Konstruktion des Kegelschnittes **k'** ist in „Sborník Vysoké školy pedagogické, Olomouc, přírodní vědy VI, obory matematika, fyzika, chemie, No 3, SPN Praha 1959 beschrieben.

und der Geraden $\bar{p}$ in die Bildebene $\pi$ um; im Umklappen ist $\{\bar{p}\} . \{^M k\} \equiv \equiv \{\bar{X}\}, \{\bar{Y}\}$, dann sind $\bar{X}' \in \mu'$, $\bar{Y}' \in \mu$ und die Punkte $X' \equiv \bar{X}'V . p'$, $Y' \equiv \equiv \bar{Y}'V . p'$ sind die gesuchten Schnittpunkte der Geraden $p'$ mit dem Kegelschnitte $k'$, in unserem Falle mit der Ellipse $k'$[1]).

In Fig. 2 ist die Konstruktion der durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gelegten Tangenten $x'$, $y'$ durchgeführt, falls der Kegelschnitt $k'$ durch fünf Punkte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ gegeben ist (Fig. 2).

Die Gerade $A'$ $B'$ wird wieder als die Spurlinie $p^\sigma$ einer gewissen Ebene $\sigma$ betrachtet; die in den Punkten $A'$, $B'$ des Kegelschnittes $k'$ konstruierten Tangenten $a'$, $b'$ werden für die Umrißerzeugenden einer Rotationskegelfläche **K** mit der in einer Bildebene $\pi$ liegenden Achse $o$ gehalten. Die Punkte $C'$, $D'$, $E'$ halten wir wieder für die orthogonalen Risse der Punkte $C$, $D$, $E$, die auf der Rotationskegelfläche **K** und noch in der Ebene $\sigma$ liegen. Der Kegelschnitt $k'$ wird als orthogonaler Riß des Kegelschnittes $k$ betrachtet, in dem die Ebene $\sigma \equiv (C, D, E)$ die Rotationskegelfläche **K** schneidet, und der Punkt $P'$ wird für den orthogonalen Riß des in der Ebene $\sigma$ liegenden Punktes $P$ angesehen.

Die gesuchten durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gezogenen Tangenten $x'$, $y'$ sind die orthogonalen Risse der Schnittlinien $x$, $y$ der Ebene $\sigma$ und der durch den Punkt $P$ an der Rotationskegelfläche **K** gelegten Tangentenebenen $^1\tau$ und $^2\tau$.

Die Tangenten $a'$, $b'$ des Kegelschnittes $k$ in den Punkten $A'$, $B$,' die für die Umrißerzeugenden der Rotationskegelfläche **K** gehalten werden, konstruieren wir auf dieselbe Weise wie in dem oben erwähnten Falle und die Tafelneigung $\alpha$ der Ebene $\sigma \equiv (C, D, E)$ ermitteln wir mit Hilfe ihrer durch den Punkt $E$ gehenden Fallinie $s$.

Um die durch den Punkt $P$ an die Rotationskegelfläche **K** gelegten Tangentenebenen $^1\tau$ und $^2\tau$ zu konstruieren, ermitteln wir die Spurlinien $^1t$ und $^2t$ auf einer beliebigen zur Achse $o$ senkrechten Ebene $\mu(\mu' \perp o)$. Deshalb projizieren wir den Punkt $P$ von der Spitze $V$ auf die Ebene $\mu$ in den Punkt $\bar{P}$ und bestimmen seine Kote $Z_{\bar{P}}$ durch Umklappen der projizierenden Ebene der Geraden $VP$ $(z_{\bar{P}} = P' \langle \bar{P} \rangle)$. Nach dem Umklappen der Ebene $\mu$ ziehen wir durch den Punkt $\{\bar{P}\}$ an den Kreis $\{^P k\}$ die Tangenten $\{^1t\}$ und $\{^2t\}$. Dann sind die Punkte $I \equiv \{^1t\} . \mu'$ und $III \equiv \{^2t\} . \mu'$ die Punkte der Spurlinien $p^{^1\tau}$, $p^{^2\tau}$ und die Geraden $VI \equiv p^{^1\tau}$, $VIII \equiv p^{^2\tau}$ direkt die Spurlinien der Tangentenebenen $^1\tau$, $^2\tau$. Orthogonale Risse $x' \equiv P'\,II$ und $y' \equiv P'\,IV$ (wo $II \equiv p^\sigma . p^{^1\tau}$ und $IV \equiv p^\sigma . p^{^2\tau}$ sind) der Schnittlinien $x$, $y$ sind bereits die gesuchten durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gezogenen Tangenten $x'$, $y'$ und die Punkte $X' \equiv x' . V\,{}^1T$ und $Y' \equiv y' . V\,{}^2T$ sind ihre Berührungspunkte mit dem Kegelschnitt $k'$, in unserem Falle mit der Hyperbel $k'$[2]).

In Fig. 3 sind die durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gelegten Tangenten $x'$, $y'$ konstruiert, falls der Kegelschnitt $k'$ durch fünf Tangenten $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$ gegeben ist (Fig. 3).

Zwei von den fünf gegebenen Tangenten, z. B. $a'$, $b'$, halten wir für die Umrißerzeugenden der Rotationskegelfläche **K** mit der in der Bildebene $\pi$ liegenden Achse $o$. Die übriggebliebenen drei Tangenten $c'$, $d'$, $e'$ seien orthogonale Risse gewisser Tangenten $c$, $d$, $e$ der Rotationskegelfläche **K**, die in derselben Ebene $\sigma$ liegen, der Kegelschnitt $k'$ sei orthogonaler Riß des Kegelschnittes $k$, in dem

[2]) Siehe Bemerkung [1]).

die Ebene $\sigma$ die Rotationskegelfläche **K** schneidet, und der Punkt $P'$ orthogonaler Riß des in der Ebene $\sigma$ liegenden Punktes $P$. Die gesuchten durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gezogenen Tangenten $x'$, $y'$ sind die orthogonalen Risse der Schnittlinien $x, y$ der Ebene $\sigma$ und der durch den Punkt $P$ an die Rotationsgekelfläche **K** gelegten Tangentenebenen $^1\tau$ und $^2\tau$.

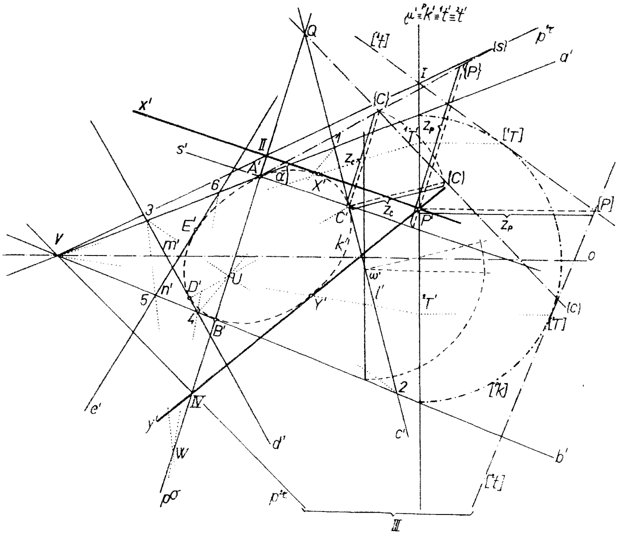

Fig. 3

Zuerst konstruieren wir die Spurlinie $p^\sigma$ der Schnittebene $\sigma \equiv (c.\ d.\ e)$ und ihre Tafelneigung $\alpha$. Die projizierende Ebene der Tangente $c$ schneidet die Rotationskegelfläche **K** im Kegelschnitte $l$, die projizierende Ebene der Tangente $d$ im Kegelschnitte $m$ und die projizierende Ebene der Tangente $e$ im Kegelschnitte $n$. Die Kegelschnitte $l, m$ liegen nicht nur auf der Rotationskegelfläche **K**, sondern auch auf der quadratischen Kegelfläche **U** mit der Spitze $U$ in $\pi$ ($U \equiv 14\ .\ 23$); ähnlich liegen die Kegelschnitte $m, n$ noch auf der quadratischen Kegelfläche **W** mit der Spitze $W$ auch in $\pi$ ($W \equiv 35\ .\ 46$). Die gemeinsame Tangentenebene der beiden Kegelflächen **U** und **W** ist die Schnittebene $\sigma \equiv (c.\ d.\ e)$, die die Rotationskegelfläche **K** im Kegelschnitte $k$ schneidet, dessen orthogonaler Riß der Kegelschnitt $k'$ ist. Die Spurlinie $p^\sigma$ der Ebene $\sigma \equiv (c.\ d.\ e)$ ist die Gerade $UW$. Um die Tafelneigung $\alpha$ der Ebene $\sigma \equiv (c\,.\,d\,.\,e)$ zu ermitteln, konstruieren wir z. B. den Berührungspunkt $C$ der Tangente $c$ mit dem Kegelschnitt $k$ (nach dem Umklappen der projizierenden Ebene der

Tangenten $c$ in $\pi$ ist $Q(C)$ die Tangente $(c)$ des Kegelschnittes $(l)$, wo $Q \equiv c' \,.\, p^{\sigma}$ und $z_C = C'(C)$) und mit Hilfe der durch $C$ gehenden Fallinie $s$ der Ebene $\sigma$ bestimmen wir ihre Tafelneigung $\alpha$ ($\alpha = \sphericalangle\, s'\{s\}$).

Um die durch den Punkt $P$ an die Rotationskegelfläche **K** gelegten Tangentenebenen ${}^1\tau$ und ${}^2\tau$ zu konstruieren, legen wir durch den Punkt $P$ senkrechte Ebene $\mu$ zu $o$ ($P' \in \mu'$; $\mu' \perp o$) und ermitteln auf der Ebene $\mu$ die Spurlinien ${}^1t$ und ${}^2t$ der Tangentenebenen ${}^1\tau$ und ${}^2\tau$. Mit Hilfe der Hauptlinie der Ebene $\mu$ bestimmen wir die Kote $z_P$ des in der Ebene $\mu$ liegenden Punktes $P$ und dann klappen wir die Ebene $\mu$ (mit dem Punkt $P$ und mit dem Kreis ${}^Pk$) in $\pi$ um. Nach dem Umklappen der Ebene $\mu$ ziehen wir durch den Punkt $[P]$ Tangenten $[{}^1t]$ und $[{}^2t]$ an den Kreis $[{}^Pk]$ und bekommen auf $\mu'$ die Punkte $I \equiv ({}^1t) \,.\, \mu'$ und $III \equiv [{}^2t] \,.\, \mu'$ der Spurlinien $p^{{}^1\tau}$ und $p^{{}^2\tau}$ der Tangentenebenen ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ und in den Geraden $V\,I \equiv p^{{}^1\tau}$ und $V\,III \equiv p^{{}^2\tau}$ ihre Spurlinien. Die orthogonalen Risse $x' \equiv P'\,II$, $y' \equiv P'\,IV$ (wo $II \equiv p^{\sigma} \,.\, p^{{}^1\tau}$ und $IV \equiv p^{\sigma} \,.\, p^{{}^2\tau}$ sind) der Schnittlinien $x$, $y$ der Ebene $\sigma$ und der Tangentenebenen ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ sind die gesuchten durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gezogenen Tangenten $x'$, $y'$ und die Punkte $X' \equiv x' \,.\, V^1T$, $Y' \equiv y' \,.\, V^2T$ ihre Berührungspunkte mit dem Kegelschnitt $k'$, in unserem Falle mit der Ellipse $k'$[3]).

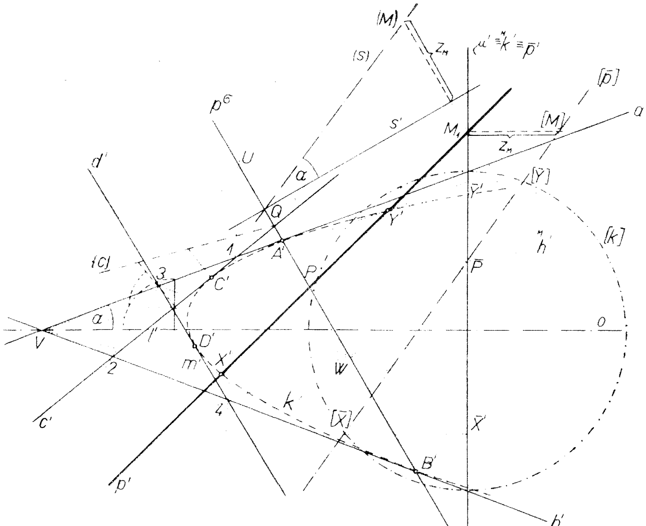

Fig. 4

[3]) Siehe Bemerkung [1]).

In Fig. 4 sind die Schnittpunkte $X'$, $Y'$, der Geraden $p'$ mit der Parabel $k'$ konstruiert, die durch vier Tangenten $a$,' $b'$, $c'$, $d'$ gegeben ist (Fig. 4).

Zwei von den vier gegebenen Tangenten, z. B. $a'$, $b'$, betrachten wir wieder als die Umrißerzeugenden der Rotationskegelfläche **K** mit der in der Bildebene $\pi$ liegenden Achse $o$. Die Geraden $c'$, $d'$ seien orthogonale Risse gewisser Tangenten $c$, $d$ der Rotationskegelfläche **K**. Die projizierende Ebene der Tangente $c$ schneidet die Rotationskegelfläche **K** im Kegelschnitte $l$, die projizierende Ebene der Tangente $d$ im Kegelschnitte $m$. Die Kegelschnitte $l$, $m$ liegen noch auf der zweiten quadratischen Kegelfläche **U** mit der Spitze $U$ in $\pi$ ($U = 14 . 23$). Die Ebenen, die den Kegelschnitt $m$ berühren und die Rotationskegelfläche **K** in einer Parabel schneiden, hüllen die Rotationskegelfläche **W** mit der Spitze $W$ in $\pi$ ($3\ W \parallel b'$, $4\ W \parallel a'$) um. Die Parabel $k'$ halten wir für orthogonalen Riß der Parabel $k$, in der die gemeinsame Berührungsebene $\sigma$ der Kegelflächen **U** und **W** die Rotationskegelfläche **K** schneidet, und die gegebene Gerade $p'$ für orthogonalen Riß der Geraden $p$, die in der Ebene $\sigma$ liegt. Die gesuchten Schnittpunkte $X'$, $Y$, der Geraden $p'$ mit der Parabel $k'$ sind die orthogonalen Risse der Punkte $X$, $Y$, in denen die Gerade $p$ die Rotationskeglfläche **K** schneidet.

Für die Ebene $\sigma$ ist die Spurlinie $p^\sigma = UW$ und der Winkel $\sphericalangle s'(s) = \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle a'b'$ (in unserem Falle ist es die Hälfte des spitzen Winkels $a'b'$) ist die Tafelneigung der Ebene $\sigma$. Die Punkte $A' = p^\sigma . a'$ und $B' = p^\sigma . b'$ sind die Berührungspunkte der Tangenten $a'$, $b'$ mit der Parabel $k'$.

Anschließend führen wir eine beliebige und zur Achse $o$ senkrechte Ebene $\mu$ ($\mu' \perp o$). Die Gerade $p$ bestimmen wir durch den Spurpunkt $P = p' . p^\sigma$ und durch den Punkt $M = p' . \mu'$, für den wir die Kote $z_M$ ermitteln (mit Hilfe der Hauptlinie ${}^M h$). Die Schnittpunkte $X$, $Y$ der Geraden $p$ mit der Rotationskegelfläche **K** konstruieren wir wie oben in Fig. 1.

Mit derselben Methode können wir auch Grundaufgaben zweiter Ordnung über Kegelschnitte lösen, wenn unter den Elementen, die einen Kegelschnitt bestimmen, auch der Brennpunkt gegeben ist. In diesem Falle benützen wir zur Lösung dieser Grundaufgaben die Rotationskegelfläche mit der zur Bildebene senkrechten Achse. Als Beispiel dieser Type führen wir zwei solche Aufgaben an.

Fig. 5 zeigt die Konstruktion der Schnittpunkte $X'$, $Y'$ der Geraden $p'$ mit der Hyperbel $k'$, die durch den Brennpunkt $F$, durch den Punkt $A'$ und durch die Richtungen der Asymptoten ${}^1a'$ und ${}^2a'$ gegeben ist (Fig. 5).

Den Brennpunkt $F$ werden wir als den orthogonalen Riß der Spitze $V$ ($F = V'$) einer gewissen Rotationskegelfläche **L** mit der zur Bildebene senkrechten Achse betrachten. Den gegebenen Punkt $A'$ halten wir für den orthogonalen Riß des an der Rotationskegelfläche **L** liegenden Punktes $A$ und die Richtungen der Asymptoten ${}^1a'$, ${}^2a'$, die durch den $V' = F$ gehen (das kann man immer einrichten), für die orthogonalen Risse der Erzeugenden ${}^1a$, ${}^2a$ der Rotationskegelfläche **L**. Die Hyperbel $k'$ wird für orthogonalen Riß der Hyperbel $k$ gehalten, in der die durch den Punkt $A$ gehende und mit der Ebene $\varphi = ({}^1a . {}^2a)$ parallele Ebene $\sigma$ die Rotationskegelfläche **L** schneidet; die Gerade $p'$ wird für orthogonalen Riß der in der Ebene $\sigma$ liegenden Geraden $p$ gehalten.

Die gesuchten Schnittpunkte $X'$, $Y'$ der Geraden $p'$ mit der Hyperbel $k'$ sind die orthogonalen Risse der Schnittpunkte $X$, $Y$ der Geraden $p$ mit der Hyperbel $k$, d. h. die orthogonalen Risse der Schnittpunkte $X$, $Y$ der Geraden $p$ mit der Rotationskegelfläche **L**.

Den um $F = V'$ als Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius $r$, z. B. $r = FA'$, geschlagenen Kreis $l$ erklären wir für den Basiskreis der Rotationskegelfläche **L** und die Ebene des Basiskreises für die Bildebene $\pi$. Die Kote der Spitze $V$ der Rotationskegelfläche **L** wählen wir gleich dem Radius des Basiskreises, d. h. $z_V = FA'$. Die durch die Spitze $V$ gehende Ebene $\varphi \equiv ({}^1a \,.\, {}^2a)$ der Rotationskegelfläche **L** hat die Spurlinie $p^\varphi \equiv NR$ ($N$, $R$ sind die Spurpunkte der Erzeugenden ${}^1a$, ${}^2a$). Die Spurlinie $p^\sigma$ der durch den Punkt $A$ gehenden und mit der

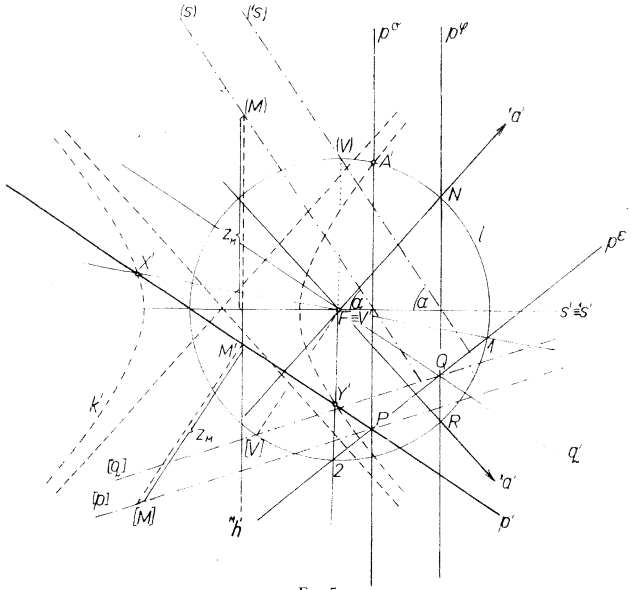


Fig. 5

Ebene $\varphi$ parallelen Ebene $\sigma$ geht durch den Punkt $A'$ und ist mit $p^\varphi$ parallel. Die Tafelneigung $\alpha$ der Ebene $\sigma$ ist gleich der Tafelneigung der Ebene $\varphi$ [$\alpha = \sphericalangle {}^1s({}^1s) = \sphericalangle s'(s)$]. Die Gerade $p$ der Ebene $\sigma$ bestimmen wir durch den Spurpunkt $P \equiv p' \,.\, p^\sigma$ und durch einen beliebigen Punkt $M$ ($M' \in p'$; $z_M$ ermittelt man mit Hilfe der Hauptlinie ${}^M h$ der Ebene $\sigma$).

Um die Schnittpunkte $X$, $Y$ der Geraden $p \equiv PM$ mit der Rotationskegelfläche **L** zu untersuchen, legen wir durch die Gerade $p$ und durch die Spitze $V$ der Rotationskegelfläche **L** die Ebene $\varepsilon$ [$\varepsilon \equiv (p \parallel q)$, $V \in q$; $q' \parallel p'$, $V' \in q'$] und konstruieren ihre Spurlinie $p^\varepsilon$ [$p^\varepsilon \equiv PQ$; $P$, $Q$ sind die Spurpunkte der Geraden $p$, $q$]. Die Spurlinie $p^\varepsilon$ schneidet den Basiskreis $l$ in den Punkten *1* und *2*, und die Rotationskegelfläche **L** in den Erzeugenden $V\,1$ und $V\,2$. In den Schnittpunkten der Geraden $p$ mit den Geraden $V\,1$ und $V\,2$ bekommen wir die Schnittpunkte $X$, $Y$ der Geraden $p$ mit der Rotationskegelfläche **L**; die orthogonalen Risse $X'$, $Y'$ der Schnittpunkte $X$, $Y$ sind die gesuchten Schnittpunkte der Geraden $p'$ mit der Hyperbel $k'$ [5]) ($X' \equiv p' \,.\, V'\,1$ und $Y' \equiv p' \,.\, V'\,2$).

In Fig. 6 sind die durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gelegten Tangenten $x'$, $y'$ dargestellt, falls der Kegelschnitt $k'$ durch den Brennpunkt $F$ und durch drei Pukte $A'$, $B'$, $C'$ gegeben ist (Fig. 6).

Den Brennpunkt $F$ werden wir wieder als den orthogonalen Riß der Spitze $V$ ($F \equiv V'$) einer gewissen Rotationskegelfläche **L** mit der zu $\pi$ senkrechten Achse betrachten und die Punkte $A'$, $B'$, $C'$ als die orthogonalen Risse der in einer

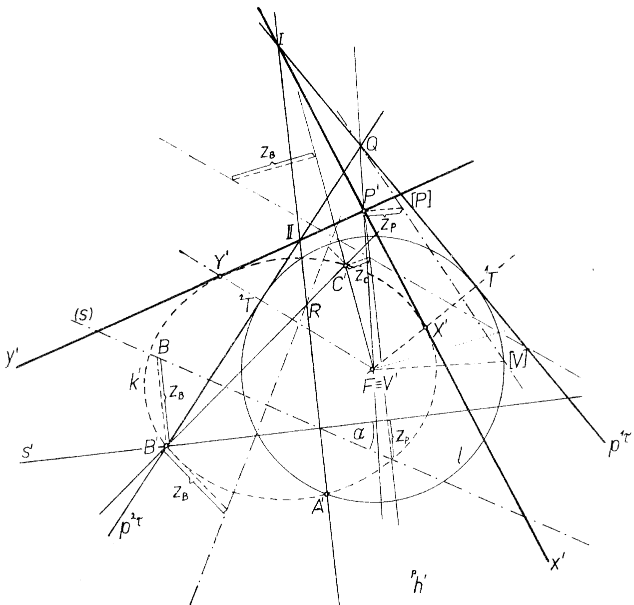


Fig. 6

[5]) Die Konstruktion der Hyperbel $k'$ ist in der Zeitschrift „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Fakultas rerum naturalium, Tom 21, 1966" beschrieben.

gewissen Ebene $\sigma$ und an der Rotationskegelfläche **L** liegenden Punkte $A$, $B$, $C$. Den Kegelschnitt $k'$ halten wir für den orthogonalen Riß des Kegelschnittes $k$, in dem die Ebene $\sigma \equiv (A, B, C)$ die Rotationskegelfläche L schneidet, und den Punkt $P'$ für orthogonalen Riß des in der Ebene $\sigma$ liegenden Punktes $P$.

Die gesuchten durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gezogenen Tangenten $x'$, $y'$ sind die orthogonalen Risse der Schnittlinien $x, y$ der Ebene $\sigma$ und der durch den Punkt $P$ an die Rotationskegelfläche **L** gelegten Tangentenebenen ${}^1\tau$ und ${}^2\tau$.

Den um $F \equiv V'$ geschlagenen Kreis mit dem Radius $r = FA'$ halten wir für den Basiskreis $l$ der Rotationskegelfläche **L** und die Ebene des Basiskreises $l$ für die Bildebene $\pi$; die Kote $z_V$ der Spitze $V$ ist dem Radius des Basiskreises $l$ gleich.

Um die durch den Punkt $P$ an die Rotationskegelfläche L gelegten Tangentenebenen ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ zu ermitteln, bestimmen wir den Spurpunkt $Q$ der Geraden $VP$ ($Q \equiv V'P' \,.\,$ [V] [P]) und die durch $Q$ an den Basiskreis gezogenen Tangenten sind schon die Spurlinien $p^{1\tau}$ und $p^{2\tau}$ der Tangentenebenen ${}^1\tau$ und ${}^2\tau$. Die Verbindungsgeraden $P'\,I$ und $P'\,II$ ($I \equiv p^\sigma \,.\, p^{1\tau}$; $II \equiv p^\sigma \,.\, p^{2\tau}$) sind die orthogonalen Risse $x'$, $y'$ der Schnittlinien der Ebene $\sigma$ und der Tangentenebenen ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, d. h. die gesuchten durch den Punkt $P'$ an den Kegelschnitt $k'$ gezogenen Tangenten $x'$, $y'$ und die Schnittpunkte $X' \equiv x' \,.\, {}^1TV'$ und $Y' \equiv y' \,.\, {}^2TV'$ ihre Berührungspunkte mit dem Kegelschnitt $k'$, in unserem Falle mit der Ellipse $k'$[6]).

[6]) Siehe Bemerkung [5]).

SHRNUTÍ

## NOVÁ METODA ŘEŠENÍ ZÁKLADNÍCH ÚLOH DRUHÉHO STUPNĚ O KUŽELOSEČKÁCH

JOSEF ŠIMEK

Tento článek ukazuje nové řešení dvou základních úloh druhého stupně o kuželosečkách, a to „určení průsečíků přímky s kuželosečkou" a „konstrukci tečen z bodu ke kuželosečce", metodou odvozenou z prostorových útvarů s použitím kolmého promítání na jednu průmětnu, stručně metodou deskriptivní geometrie. Proto jsou pravoúhlé průměty prostorových útvarů označovány čárkou.

Princip této deskriptivně geometrické metody spočívá v tom, že kuželosečku $k'$ danou pěti prvky považujeme za pravoúhlý průmět kuželosečky $k$, v níž jistá rovina $\sigma$ seče jistou rotační kuželovou plochu **K**. Přímku $p'$, jejíž průsečíky s kuželosečkou $k'$ hledáme, a bod $P'$, z něhož vedeme tečny ke kuželosečce $k'$, pokládáme za pravoúhlé průměty útvarů ležících v rovině $\sigma$. Tím jsou uvedené dvě rovinné úlohy druhého stupně o kuželosečkách převedeny na úlohy deskriptivní geometrie „zobrazit průsečíky přímky $p$ s rotační kuželovou plochou **K**" a „zobrazit průsečnice roviny $\sigma$ a tečných rovin, vedených bodem $P$ k rotační kuželové ploše **K**".

Tato metoda je pak ukázána na šesti různých úlohách o kuželosečkách, je-li kuželosečka dána po každé pěti jinými prvky.