Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jiří Kobza

Zur Bestimmung der Grundintegrale von Differentialgleichung $y'' = q(x)y$

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 12 (1972), No. 1, 23--33

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120002`

1972 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 37

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ZUR BESTIMMUNG DER GRUNDINTEGRALE VON DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' = q(x)y$

JIŘÍ KOBZA

(Eingelang am 9. September 1971)

Gewidmet Herrn Prof. Dr. Miroslav Laitoch zum 50. Geburtstag

Gegeben sei eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = q(x)y \qquad (q)$$

wo $q(x) \in C(j)$, $j = (a, b)$, $a^2 + b^2 < +\infty$.
Im folgenden wird stets angenommen, dass eine Lösung $y(x) \in (q)$ [bzw. $y(x) \in (q)$] derart besteht, dass $y(x)$ [$y'(x)$] im Intervall j zumindesten zwei Nullstellen besitzt. Weiterhin im Einklang mit [2] definieren wir die Grundzahl und das Grundintegral der Dgl (q) im Intervall j folgendermassen:

R_ν [S_ν], $\nu = 1,2$ sei eine Menge aller Zahlen $x \in j$, zu denen eine Zahl $x' \in j$, $x' < x$ [$x' > x$] **und eine solche Lösung** $y(x) \in (q)$ existieren, dass $y^{(\nu-1)}(x) = y^{(\nu-1)}(x') = 0$, $\nu = 1,2$ **(d. h. R_ν [S_ν] ist eine** Menge aller Zahlen im Intervall j, zu welchen eine links [rechts] ν-konjungiertge Zahl, $\nu = 1, 2$, existiert).
Dann existieren die Zahlen

$$\left.\begin{array}{lll} r_\nu = \inf R_\nu & \textit{linkssetige } \nu - \textit{Grundzahl} \\ s_\nu = \sup S_\nu & \textit{rechtsseitige } \nu - \textit{Grundzahl} \end{array}\right\} \quad \nu = 1,2$$

Ein Integral $y(x)$ der Dgl (q) mit der Eigenschaft
a) $y(r_1) = 0$ b) $y(s_1) = 0$ c) $y(r_1) = y(s_1) = 0$
wird a) *linksseitiges* b) *rechtsseitiges* c) *zweiseitiges Grundintegral* der Dgl (q) im Intervall j gennant. (Analoge Definition lässt sich auch für $\nu = 2$ herleiten.)

Ist im Intervall $j = (a, b)$ die Zahl $x = a$ [$x = b$] ein Häufungspunkt der Nullstellen von $y(x) \in (q)$, so ergibt sich nach vorgehender Definition und bekannten Eigenschaften der Lösungen von Dgl (q)

$$r_1 = r_2 = a \qquad [s_1 = s_2 = q].$$

Lemma. *Seien $u(x)$, $v(x)$ zwei im Intervall j linear unabhängige Lösungen der Dgl (q). Bezeichne $\{\alpha_\nu\}_{\nu=1}^{n}$, $\{\beta_\nu\}_{\nu=1}^{m}$, $\{\alpha'_\nu\}_{\nu=1}^{n'}$, $\{\beta'_\nu\}_{\nu=1}^{m'}$ die wachsenden Folgen aller Nullstellen der Funktionen u, v, u', v' im Intervall j* ($|m - n| \leqq 1$, $|m' - n'| \leqq 1$, $|m - m'| \leqq 1$, $|n - n'| \leqq 1$).

Wenn $a < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \dots$ $\quad$ [$\dots \beta_{m-1} < \alpha_n < \beta_m < b$] *gilt,*
so ist auch $r_1 \in \langle \alpha_1, \beta_2)$ $\quad$ [$s_1 \in (\beta_{m-1}, \alpha_n \rangle$].
Wenn $a < \beta'_1 < \alpha'_1 < \beta'_2 < \dots$ $\quad$ [$\dots \beta'_{m'-1} < \alpha'_{n'} < \beta'_{m'} < b$] gilt,
so ist auch $r_2 \in \langle \alpha'_1, \beta'_2)$ $\quad$ [$s_2 \in (\beta'_{m'-1}, \alpha'_{n'} \rangle$].

Beweis. Wir beweisen die Gültigkeit der Behauptung über r_1; ganz entsprechend beweist man die anderen Behauptungen. Es ist klar aus der Definition der Zahl r_1 und aus den bekannten Eigenschaften der Lösungen von Dgl (q), dass $r_1 < \beta_2$. Wenn $r_1 < \alpha_1$ gelte, so müsste auch gelten, dass für jedes $x_2 \in (r_1, \alpha_1)$ eine Zahl $x_1 \in (a, x_2)$ und eine Lösung $y(x) \in (q)$ besteht, wobei $y(x_1) = y(x_2) = 0$ ist. In solchem Fall müsste jedoch die Lösung $u(x)$ im Intervall (x_1, x_2) eine Nullstelle besitzen, was im Widerspruch zu unserer Annahme bezüglich der Anordunng von Nullstellen der Lösungen u, v ist.

Satz 1. *Seien $u(x)$, $v(x)$ zwei im Intervall $j = (a, b)$ linear unabhängige Lösungen der Ggl (q) und $\{\alpha_\nu\}_{\nu=1}^{n}$, $\{\beta_\nu\}_{\nu=1}^{m}$, $\{\alpha'_\nu\}_{\nu=1}^{n'}$, $\{\beta'_\nu\}_{\nu=1}^{m'}$ die wachsenden Folgen aller Nullstellen der Funktionen u, v, u', v' im Intervall j.*

I. *Gilt*

a) $a < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots$ [a') $a < \beta'_1 < \alpha'_1 < \beta'_2 < \alpha'_2 < \ldots$; $\operatorname{sgn} q(x) \neq 0$ für $x \in (a, \beta'_1) \cup (\alpha'_1, \beta'_2)$]

b) $I_1 = \lim\limits_{x \to a+} |v(x)/u(x)|$, $x_1 \in (\alpha_1, \beta_2)$ [b') $I_2 = \lim\limits_{x \to a+} |v'(x)/u'(x)|$, $x_1 \in (\alpha'_1, \beta'_2)$]

so sind folgende zwei Behauptungen äquivalent,

1° *Es existieren $x_0 \in (a, \beta_1)$, $y(x) \in (q)$ derart, dass $y(x_0) = y(x_1) = 0$ ist [es existieren $x_0 \in (a, \beta'_1)$, $\bar{y}(x) \in (q)$ derart, dass $\bar{y}'(x_0) = \bar{y}'(x_1) = 0$ ist].*

2° $|v(x_1)/u(x_1)| < I_1$ $[|v'(x_1)/u'(x_1)| < I_2]$

II. *Gilt*

c) $\ldots \beta_{m-1} < \alpha_n < \beta_m < b$ [c') $\ldots \beta'_{m'-1} < \alpha'_{n'} < \beta'_{m'} < b$; $\operatorname{sgn} q(x) \neq 0$ für $x \in (\beta_{m'-1}, \alpha'_{n'}) \cup (\beta'_m, b)$]

d) $k_1 = \lim\limits_{x \to b-} |v(x)/u(x)|$, $x_n \in (\beta_{m-1}, \alpha_n)$ [d') $k_2 = \lim\limits_{x \to b-} |v'(x)/v'(x)|$, $x_{n'} \in (\beta'_{m'-1}, \alpha'_{n'})$]

so ergeben sich zwei äquivalente Behauptungen

e° *Es existieren $x_{n+1} \in (\beta_m, b)$, $y(x) \in (q)$ derart, dass $y(x_n) = y(x_{n+1}) = 0$ [es existieren $x_{n'+1} \in (\beta'_{m'}, b)$, $\bar{y}(x) \in (q)$ derart, dass $\bar{y}'(x_{n'}) = \bar{y}'(x_{n'+1}) = 0$] ist.*

4° $|v(x_n)/u(x_n)| < k_1$ $[|v'(x_{n'})/u'(x_{n'})| < k_2]$

Beweis. Das Verhältnis $v(x)/u(x)$ ist eine monotone Funktion in jedem Intervall, wo $u(x) \neq 0$ ist, denn $(v/u)' = W(u, v)/u^2$ [$W(u, v)$ ist die Wronski-Determinante der Lösungen u, v]. Analog $(v'/u')' = -qW/u'^2$; folglich ist das Verhältnis v'/u' eine monotone Funktion in jedem Intervall, wo $u'(x) \neq 0$ und $\operatorname{sgn} q(x) \neq 0$ ist. Des weiteren gilt

$$\lim_{x \to \beta_\nu} [v(x)/u(x)] = 0, \qquad \lim_{x \to \beta'_\nu} [v'(x)/u'(x)] = 0,$$

$$\lim_{x \to \alpha_\nu} |v(x)/u(x)| = +\infty, \qquad \lim_{x \to \alpha'_\nu} |v'(x)/u'(x)| = +\infty.$$

Das Verhältnis v/u $[v'/u']$ wechselt das Vorzeichen in jedem der Punkte α_ν, β_ν $[\alpha'_\nu, \beta'_\nu]$, weshalb $\operatorname{sgn} \{v/u\}$ $[\operatorname{sgn} \{v'/u'\}]$ in den Intervallen (a, β_1) und (α_1, β_2) $[(a, \beta'_1)$ und $(\alpha'_1, \beta'_2)]$, (β_{m-1}, α_n) und (β_m, b) $[(\beta'_{m'-1}, \alpha'_{n'})$ und $(\beta'_{m'}, b)]$ denselben Wert besitzt.

Wir beweisen bloss die Behauptung I unter den Voraussetzungen a), b); die Beweise der anderen Behauptungen lassen sich analog führen.

1. Für $x_1 \in (\alpha_1, \beta_2)$ gelte $|v(x_1)/u(x_1)| < l_1$.
Die Stetigkeit, Monotonie und das gleiche Vorzeichen von v/u in den Intervallen (a, β_2) und (α_1, β_2) gewährleisten die Existenz der Zahl $x_0 \in (a, \beta_1)$ derart, dass

$$\frac{v(x_0)}{u(x_0)} = \frac{v(x_1)}{u(x_1)}, \text{ d. h. } \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u(x_1) & v(x_1) \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Das bedeutet, dass das System zweier linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1\, u(x_0) + c_2\, v(x_0) &= 0 \\ c_1\, u(x_1) + c_2\, v(x_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (C)$$

eine nichttriviale Lösung c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 > 0)$ hat.
Die Funktion $y(x) = c_1\, u(x) + c_2\, v(x)$ stellt in diesem Fall die Lösung der Dgl (q) mit Nullstellen x_0, x_1 dar.

2. Für eine $x_1 \in (\alpha_1, \beta_2)$ seien umgekehrt $x_0 \in (a, \beta_1)$ und $y(x) \in (q)$ derart gegeben, dass $y(x_0) = y(x_1) = 0$. Weil u, v linear unabhängige Lösungen der Dgl (q) sind, existieren die Konstanten c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 > 0)$ so, dass $y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$ ist, d. h. dass Gleichungssystem (C) besitzt eine nichttriviale Lösung, was nur dann möglich ist, wenn $v(x_1)/u(x_1) = v(x_0)/u(x_0)$ gilt.
Weil die Funktion $|v/u|$ im Intervall (a, β_1) monoton abnehmend ist und $x_1 \in (a, \beta_1)$ gilt, folgt dann

$$\lim_{x \to a+} |v(x)/u(x)| = l_1 > |v(x_1)/u(x_1)|\,.$$

Satz 2. *Seien $u(x)$, $v(x)$ im Intervall $j = (a, b)$ linear unabhängige Lösungen der Dgl (q). Für die Nullstellen der Funktionen u, v, u' v' verwenden wir die Bezeichnungen aus Satz 1.*

1° *Gelten die Voraussetzungen a), b) aus Satz 1, so ist die Zahl r_1 eindeutig bestimmt durch die Beziehungen*

a) $r_1 \in (\alpha_1, \beta_2)$, $|v(r_1)/u(r_1)| = l_1$ *wenn* $l_1 < +\infty$ gilt,

b) $r_1 = \alpha_1$, *wenn* $l_1 = +\infty$ *ist.*

2° *Gelten die Voraussetzungen a'), b') aus Satz 1, so ist die Zahl r_2 eindeutig bestimmt durch die Beziehungen*

a) $r_2 \in (\alpha_1'\ \beta_2')$, $|v'(r_2)/u'(r_2)| = l_2$, wenn $l_2 < +\infty$ *gilt,*

b) $r_2 = \alpha_1'$, *wenn* $l_2 = +\infty$ *ist.*

3° *Gelten die Voraussetzungen c), d) aud Satz 1, so isz die Zahl s_1 eindeutig bestimmt durch die Beziehungen*

a) $s_1 \in (\beta_{m-1}, \alpha_n)$, $|v(s_1)/u(s_1)| = k_1$, wenn $k_1 < +\infty$ gilt,

b) $s_1 = \alpha_n$, *wenn* $k_1 = +\infty$ *ist.*

4° *Gelten die Voraussetzungen c'), d') aus Satz 1, so ist die Zahl s_2 eindeutig bestimmt durch die Beziehungen*

a) $s_2 \in (\beta'_{m'-1}, \alpha'_{n'})$, $|v'(s_2)/u'(s_2)| = k_2$, *wenn* $k_2 < +\infty$ *gilt,*

b) $s_2 = \alpha'_{n'}$, *wenn* $k_2 = +\infty$ *ist.*

Beweis zur Behauptung 1°; Aus unserem Lemma ist bekannt, dass $r_1 \in \langle \alpha_1, \beta_2)$ ist.

a) Wenn $l_1 < +\infty$ gilt, so wegen der Monotonie von $|v/u|$ und zufolge dessen, dass $\lim\limits_{x\to\alpha_1} |v/u| = +\infty$, existiert eine Zahl $r_1 \in (\alpha_1, \beta_2)$ derart, dass $|v(r_1)/u(r_1)| = l_1$ ist und für jede $x > r_1$, $x \in (\alpha_1, \beta_2)$ ist $|v(x)/u(x)| < l_1$, während für jede $x < r_1, x \in (\alpha_1, \beta_2)$ gilt $|v(x)/u(x)| > l_1$. Nach Satz 1 und nach der Definition der Grundzahlen ist somit bewiesen, dass r_1 die linksseitige Grundzahl der Ggl (q) im Intervall $j = (a, b)$ ist.

b) Wenn $l_1 = +\infty$ ist, so gilt für jede $x \in (\alpha_1, \beta_2)$ auch $|v(x)/u(x)| < l_1$ und nach Satz 1 und nach der Definition der Grundzahlen ist daher $r_1 = \alpha_1$.
Ganz entsprechend geht man in Beweisen der anderen Behauptungen vor.

Satz 3. *Seien $u(x)$, $v(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Dgl (q) im Intervall $j = (a, b)$.*

1° *Gilt*

a) *$u(x)$ hat genau n Nullstellen $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ im Intervall j,*

b) $\lim\limits_{x\to a+} |v(x)/u(x)| = +\infty$ [b') $\lim\limits_{x\to b-} |v(x)/u(x)| = +\infty$],

so besitzt $v(x)$ eine Nullstelle β_1 $[\beta_{n+1}]$ im Intervall (a, α_1) $[(\alpha_n, b)]$.

2° *Gilt*

a) *$u'(x)$ besitzt genau n' Nullstellen ($|n'-n| \leq 1$) $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \ldots < \alpha'_{n'}$ im Intervall j,*

b) sgn *$q(x) \neq 0$ im Intervall (a, α'_1) $[(\alpha'_{n'}, b)]$,*
$\lim\limits_{x\to a+} |v'(x)/u'(x)| = +\infty$ [b') $\lim\limits_{x\to b-} |v'(x)/u'(x)| = +\infty$],

so besitzt $v'(x)$ eine Nullstelle β'_1 $[\beta'_{n'+1}]$ im Intervall (a, α'_1) $[(\alpha'_{n'}, b)]$.

Den Beweis führen wir für die Behauptung 1° unter Voraussetzungen a), b) und für die Behauptung 2° unter Voraussetungen a), b). Die anderen Beweise werden ähnlich verlaufen. Die Eigenschaften der Funktionen $v(x)/u(x)$ und $v'(x)/u'(x)$ sind beschrieben im Beweis von Satz 1.

Beweis zur Behauptung 1°: Setzen wir voraus, dass $\alpha_1 < \beta_1$ gilt, wobei sgn $[v(x)/u(x)] = (-1)^k$ im Intervall (α_1, β_1); $k = 0,1$.
Dann ist $\lim\limits_{x\to\alpha_1+} [(-1)^k v(x)/u(x)] = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha_1} [(-1)^k v(x)/u(x)] = -\infty$;
die Funktion $(-1)^k v(x)/u(x)$ ist monoton abnehmend im Intervall (a, α_1), worin sgn $[v(x)/u(x)] = (-1)^{k+1}$ ist.
Hiemit $\lim\limits_{x\to a+} [(-1)^k v(x)/u(x)] = \lim\limits_{x\to a+} (-1)^{2k+1} |v(x)/u(x)| = -\infty$. Folglich die Funktion $(-1)^k v(x)/u(x)$ im Intervall (a, α_1) soll monoton abnehmend sein und es soll gleichzeitig gelten $\lim\limits_{x\to a+} [(-1)^k v(x)/u(x)] = -\infty$,
was jedoch nicht möglich ist, weshalb die Voraussetzung $\alpha_1 < \beta_1$ nicht gilt. Da $\alpha_1 \neq \beta_1$ ist, muss $\beta_1 < \alpha_1$ gelten.

Beweis zur Behauptung 2°: Wenn $\alpha'_1 < \beta'_1$ gelte, so müsste auch unter Voraussetzungen a), b) folgendes gelten:

sgn $[v'(x)/u'(x)] = (-1)^k$ für $x \in (\alpha'_1, \beta'_1)$, $k = 1,2$ und daraus
$\lim\limits_{x\to\alpha_1'+} [(-1)^k v'(x)/u'(x)] = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha_1'-} [(-1)^k v'(x)/u(x)] = -\infty$; ferner ist sgn $[v'(x)/u'(x)] = (-1)^{k+1}$, $v'(x)/u'(x) = (-1)^{k+1} |v'(x)/u'(x)|$ im Intervall (a, α'_1).
Die Funktion $(-1)^k v'(x)/u'(x)$ soll monoton abnehmend im Intervall (a, α'_1).

sein und es soll gleichzeitig gelten

$$\lim_{x \to a+} [(-1)^k v'(x)/u'(x)] = \lim_{x \to a+} [(-1)^{2k+1} v'(x)/u(x)] = -\infty,$$

was jedoch nicht möglich ist. Weil $\alpha_1' = \beta_1'$ auch nicht gelten kann, gilt $\beta_1' < \alpha_1'$

Satz 4. *Seien $u(x)$, $v(x)$ linear unabhängige Lösungen der Dgl (q) im Interval $j = (a, b)$. Wenn $u(x)$ $[u'(x)]$ im Intervall j genau $n[n']$ Nullstellen $\alpha_\nu[\alpha_\nu']$ besitzt und*

$$\lim_{x \to a+} |v(x)/u(x)| = \lim_{x \to b-} |v(x)/u(x)| = +\infty$$

$[\lim_{x \to a+} |v'(x)/u'(x)| = \lim_{x \to b-} |v'(x)/u'(x)| = +\infty$, $\operatorname{sgn} q(x) \neq 0$ *in den Intervallen* (a, α_1'), $(\alpha_{n'}', b)]$ *gilt,*
so hat $v(x)$ $[v'(x)]$ im Intervall j genau $n + 1$ $[n' + 1]$ Nullstellen.

Beweis. In jedem Intervall $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ $[(\alpha_\nu', \alpha_{\nu+1}')$, $\nu = 1, 2, \ldots, n' - 1]$ besitzt $v(x)$ $[v'(x)]$ (nach dem bekannten Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen) genau eine Nullstelle. Je eine Nullstelle wird uns sichergestellt durch Satz 3 in den Intervallen (a, α_1), (α_n, b) $[(a, \alpha_1')$, $(\alpha_{n'}', b)]$.

Spezialfälle.

A. Die Dgl $y'' = -n^2 y$ $\qquad (-n^2)$

besitzt im Intervall $j = (0, \pi)$ die linear unabhängige Lösungen $\begin{Bmatrix} \sin nx \\ \cos nx \end{Bmatrix}$ mit

den Nullstellen $\begin{Bmatrix} \nu\pi/n \\ (2\nu - 1)\pi/2n \end{Bmatrix}$ für $\begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$ $\quad n = 2, 3, \ldots \Big\}$.

Wird $u(x) = \sin nx$, $v(x) = \cos nx$ gesetzt, so erhalten wir zur Bestimmung von r_1, s_1 mittels Satz 2

$$\lim_{x \to 0+} |v(x)/u(x)| = \lim_{x \to \pi-} |v(x)/u(x)| = +\infty .$$

Deswegen ist $r_1 = \pi/n$, $s_1 = \pi\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$; $n = 2, 3, \ldots$.

Gemäss der Nullstellenzerlegung stellt sich zur Bestimmung von r_2, s_2 durch Anwendung von Satz 2 als notwendig zu setzen

$$u(x) = \cos nx, \quad u'(x) = -n \sin nx$$
$$v(x) = \sin nx, \quad v'(x) = n \cos nx ;$$

es gilt $\qquad \lim_{x \to 0+} |v'(x)/u(x)| = \lim_{x \to \pi-} |v'(x)/u'(x)| = +\infty$

und somit $\quad r_2 = r_1 = \pi/n, \quad s_2 = s_1 = \pi\left(1 - \dfrac{1}{n}\right); \quad n = 2, 3, \ldots$

Wollen wir die Unabhängigkeit der Bestimmung von r_ν, s_ν von der Wahl der partikulären Lösungen demonstrieren, so können wir

$$u(x) = \sin nx + \cos nx, \quad v(x) = \sin nx - \cos nx$$

wählen. Ihre Nullstellen sind

$$\alpha_\nu = -\frac{\pi}{4n} + \frac{\nu\pi}{n}, \quad \beta_\nu = \frac{\pi}{4n} + \frac{\nu - 1}{n}\pi, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Es gilt $$\lim_{x \to 0+} |v(x)/u(x)| = 1\,;$$
die Gleichung $|v(x)/u(x)| = 1$ besitzt im Intervall $\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{4n}\right)$ eine einzige Lösung $x = \pi/n$.
Es ist somit $r_1 = \pi/n$ und analog für r_2, s_1, s_2. Die Lösung $y(x) = \sin nx$ ist hiemit das zweiseitige Grundintegral der Dgl $(-n^2)$ im Intervall $j = (0, \pi)$.

B. Die Legendreschen Polynome $P_n(x)$ und die Funktionen $Q_n(x)$ (siehe [1], [3], [4]) sind im Intervall $j = (-1,1)$ linear unabhängige Lösungen der Dgl

$$(1 - x^2)\cdot Y'' - 2xY' + n(n + 1)\, Y = 0\,, \qquad (L_n)$$

welche nach der Transformation $y(x) = \sqrt{1 - x^2}\; Y(x)$ auf die Normalform (Jacobische Form) in die Dgl

$$y'' = -\left\{\frac{n(n+1)}{1 - x^2} + \frac{1}{(1 - x^2)^2}\right\} y \qquad (L_n^N)$$

übergeht. Die Funktionen

$$u_n(x) = \sqrt{1 - x^2}\, P_n(x)\,, \qquad v_n(x) = \sqrt{1 - x^2}\, Q_n(x)$$

sind somit linear unabhängige Lösungen der Dgl (L_n^N). Bekanntlich (vgl. etwa [3], [4]) besitzt die $P_n(x)$ genau n, die $Q_n(x)$ genau $n + 1$ reele Nullstellen im Intervall $j = (-1,1)$ und es gilt $\lim_{x \to -1+} |Q_n(x)| = \lim_{x \to 1-} |Q_n(x)| = +\infty$,
$|P_n(\pm 1)| = 1$. Dann gilt für $v_n(x)/u_n(x)$

$$\lim_{x \to \pm 1 \mp} |v_n(x)/u_n(x)| = \lim_{x \to \pm 1 \mp} |Q_n(x)/P_n(x)| = +\infty\,.$$

Es gilt also laut Satz 2: Die Zahl r_1 für die Dgl (L_n^N) im Intervall $j = (-1,1)$ ist gleich dem kleinsten Wurzel $P_n(x)$, die Zahl s_1 ist gleich dem grösstem Wurzel $P_n(x)$ und die Lösung $y(x) = \sqrt{1 - x^2}\, P_n(x)$ ist das zweiseitige Grundintegral.

C. Differentialgleichung der Jacobischen Polynome.

1. Aus der Theorie der Differentialgleichungen im Komplexbereich (vgl. etwa [1], [5]) ist es bekannt, dass die *hypergeometrische Dgl*

$$z(1 - z)\, u'' + [c - (a + b + 1)z]u' - abu = 0 \qquad (H)$$

eine partikuläre Lösung

$$u_1 = F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\, (b)_n}{n!\, (c)_n}\, z^n\,, \quad \begin{array}{l}(a)_n = a(a + 1)\dots(a + n - 1),\\ (a)_0 = 1\end{array}$$

besitzt, die regulär in $z = 0$ ist. Die Reihe ist für

$\lvert z\rvert < 1$	absolut konvergent
$\lvert z\rvert = 1$, $\operatorname{Re}(a + b - c) < 0$	absolut konvergent
$\lvert z\rvert = 1$, $0 \leqq \operatorname{Re}(a + b - c) < 1$	nichtabsolut konvergent
$\lvert z\rvert = 1$, $1 \leqq \operatorname{Re}(a + b - c)$	divergent.

Des weiteren gilt für $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$,
$F(a, b; c; 1) = \Gamma(c)\,.\,\Gamma(c - a - b) \,/\, \Gamma(c - a)\,.\,\Gamma(c - b)$.

Ist c von der ganzen Zahl verschieden, so ist die zweite von u_1 linear unabhängige Lösung der Dgl (H)

$$u_2 = z^{(1-c)} F(a - c + 1), \ b - c + 1; \ 2 - c; z);$$

für ganzzahligen c tritt in der Lösung u_2 ein Logarithmus auf (des näheren siehe [5]; in Spezialfällen werden im folgenden angegeben).

2. *Differentialgleichung der Jacobischen Polynome* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

$$(1 - x^2)\, y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)\, x]\, y' + n\,(\alpha + \beta + n + 1)\, y = 0 \qquad (\mathcal{J}_n)$$
$$x \in j = (-1,1),$$

geht durch die Transformation $\xi = (1 + x)/2$, $y(x) = y(2\xi - 1) = Y(\xi)$, $\xi \in (0,1)$ in ein Spezialfall der hypergeometrischen Dgl

$$\xi(1 - \xi)\, Y'' + [\beta + 1 - (\alpha + \beta + 2)\, \xi]\, Y' + n\,(\alpha + \beta + n + 1)\, Y = 0 \quad (\mathcal{J}_n^1)$$

über. Diese Dgl besitzt nach Absatz 1 für $\beta \neq 0, 1, 2, \ldots$ linear unabhängige Lösungen

$$Y_1(\xi) = F(-n, \ \alpha + \beta + n + 1; \ 1 + \beta; \ \xi)$$
$$Y_2(\xi) = \xi^{-\beta} F(-n - \beta, \ \alpha + n + 1; \ 1 - \beta; \ \xi).$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= F(-n, \ \alpha + \beta + n + 1; \ 1 + \beta; \ \tfrac{1}{2}(1 + x)) \\ y_2(x) &= [(1 + x)/2]^{-\beta} F(-n - \beta, \ \alpha + n + 1; \ 1 - \beta; \ \tfrac{1}{2}(1 + x)) \end{aligned} \qquad (1)$$

sind in diesen Fällen linear unabhängige Lösungen der Dgl $(\mathcal{J}_n)$. Die Lösung $y_1(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades, denn die Reihe für F endet nach dem n-ten Glied. Die Reihe von $y_2(x)$ ist konvergent für $x \in \langle -1,1)$; im Punkt $x = 1$ nach Absatz 1 — falls $\alpha < 0$ ist die Reihe absolut konvergent,

$$\lim_{x \to 1} y_2(x) = F(-n - \beta, \alpha + n + 1; \ 1 - \beta; \ 1) =$$
$$= \Gamma(1 - \beta)\, \Gamma(-\alpha)/(n!)\, \Gamma(-\alpha - \beta - \mathrm{n});$$

— falls $0 \leqq \alpha < 1$ ist die Reihe nichtabsolut konvergent,

— falls $\alpha \geqq 1$ ist die Reihe divergent.

Für $\beta = 0, 1, 2, \ldots$ besitzt die Dgl $(\mathcal{J}_n^1)$ linear unabhängige Lösungen

$$\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) \quad \text{wie in (1)}$$
$$y_2(x) = y_1(x) \,.\, \ln(1 + x) + (1 + x)^{-\beta} \sum_{\nu = 0}^{\infty} a_\nu (x + 1)^\nu \qquad (2)$$

für x aus der reduzierten rechtsseitigen Umebugng von $x = -1$ (siehe [4], [5]).

Für $\beta < 0$ ist also $\lim_{x \to -1^+} y_2(x) = 0$, für $\beta \geqq 0$ ist $\lim_{x \to -1^+} |y_2(x)| = +\infty$, wie sich aus (1), (2) ergibt.

3. Durch lineare Transformation $\xi = \tfrac{1}{2}(1 - x)$, $y(x) = y(1 - 2\xi) = Y(\xi)$, $\xi \in (0,1)$ geht die Dgl $(\mathcal{J}_n)$ in einen Spezialfall der hypergeometrischen Dgl

$$\xi(1 - \xi)\, Y'' + [\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)\xi]\, Y' + n(\alpha + \beta + n + 1)\, Y = 0 \qquad (\mathcal{J}_n^2)$$

über, die nach Absatz 1 für $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$ linear unabhängige Lösungen

$$Y_1(\xi) = F(-n, \alpha + \beta + n + 1; 1 + \alpha; \xi)$$
$$\mathrm{Y}_2(\xi) = \xi^{-\alpha} F(-n - \alpha; \beta + n + 1; 1 - \alpha; \xi)$$

besitzt. Die Funktionen

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_1(x) &= F(-n,\ \alpha + \beta + n + 1;\ \tfrac{1}{2}(1 - x)) \\
\bar{y}_2(x) &= [\tfrac{1}{2}(1 - x)]^{-\alpha} F(-n - \alpha;\ \beta + n + 1;\ 1 - \alpha;\ \tfrac{1}{2}(1 - x))
\end{aligned}
\tag{3}
$$

sind in diesen Fällen linear unabhängige Lösungen der Dgl $(\mathcal{J}_n^2)$ im Intervall $j = (-1,1)$. Die Lösung $\bar{y}_1(x)$ ist wiederum ein Polynom, das sich höchstens durch die multiplikative Konstante von der Lösung $y_1(x)$ unterscheidet. Die Reihe für $\bar{y}_2(x)$ konvergiert für $x \in (-1,1)$; im Punkt $x = -1$ ist die Reihe nach Absatz 1

-absolut konvergetn für $\beta < 0$
-nichtabsolut konvergetn für $0 \leq \beta < 1$,
-divergent für $\beta \geqq 1$.

Für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ hat die Dgl $(\mathcal{J}_n^2)$ linear unabhängige Lösungen $\bar{y}_1(x)$ gleich wie in (3)

$$
\bar{y}_2(x) = \bar{y}_1(x) \,.\, \ln(1 - x) + (x - 1)^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (x - 1)^\nu
\tag{4}
$$

für x aus der reduzierten linksseitigen Umgebung von $x = 1$.

Für $\beta < 0$ ist also $\lim\limits_{x \to -1+} \bar{y}_2(x) = \Gamma(1 - \alpha)\, \Gamma(-\beta) \,/\, (n!)\, \Gamma(-\alpha - \beta - n)$; für $\alpha > 0$ ist $\lim\limits_{x \to 1-} \bar{y}_2(x) = 0$ und für $\alpha \geqq 0$ ist $\lim\limits_{x \to 1} |\bar{y}_2(x)| = +\infty$, wie sich aus (3), (4) ergibt.

4. Unter *Jacobischen Polynomen* versteht man gewöhnlich (vgl. etwa [4]) die Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} F(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1;\ \tfrac{1}{2}(1 - x))$. Folglich $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ stimmt bis auf die multiplikative Konstante mit $y_1(x)$ bzw. $\bar{y}_1(x)$ überein. Für die auf $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ linear unabhängige Lösung der Dgl $(\mathcal{J}_n)$ benutzt man die Bezeichnung $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Es gilt für $n \to +\infty$

$$
\binom{n+\alpha}{n} \to \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 \quad \text{falls} & -1 < \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}
\tag{5}
$$

Jede Lösung $y(x)$ der Dgl $(\mathcal{J}_n)$ lässt sich mittels geeigneter Konstanten c_1, c_2 bzw. $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ in der Form

$$
y(x) = c_1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + c_2 y_2(x)
\tag{6}
$$

bzw. $y(x) = \bar{c}_1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \bar{c}_2 \bar{y}_2(x)$ schreiben.

Satz 5. *Für jede von $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ linear unabhängige Lösung $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ der Dgl $(\mathcal{J}_n)$ gilt:*

1° *ist $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, so ist auch* $\lim\limits_{x \to -1+} |Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = \lim\limits_{x \to 1-} |Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = +\infty$;

2° *ist $\beta \geq 0$, so ist* $\lim\limits_{x \to -1+} |Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = +\infty$ *bei beliebigen $\alpha > -1$*;

3° *ist $\alpha \geq 0$, so ist* $\lim\limits_{x \to 1-} |Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = +\infty$ *bei beliebigen $\beta > -1$*;

4° *ist* $-1 < \alpha, \beta < 0$, *so ist* $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *im Intervall* $j = (-1,1)$ *beschränkt; in diesem Fall besteht eine* $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *mit* $\lim\limits_{x\to -1+} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ *bzw.* $\lim\limits_{x\to 1} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ *und im Spezialfall* $\alpha + \beta = -1$ *gibt es eine* $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *mit*

$$\lim_{x\to -1+} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \lim_{x\to -1+} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0 .$$

Beweis. Wenn $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ linear unabhängig von $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ sein soll, so muss in (6) $c_2 \neq 0$ bzw. $\bar{c}_2 \neq 0$ gelten. Die Gültigkeit der ersten drei Behauptungen ergibt sich unschwer aus den Ausdrücken für $y_2(x)$ bzw. $\bar{y}_2(x)$ in (1) — (4). Wenn $-1 < \alpha, \beta < 0$ gilt, so gilt auch $\lim\limits_{x\to -1+} y_2(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1-} \bar{y}_2(x)$. Durch die Wahl von $c_1 = 0$ bzw. $\bar{c}_1 = 0$ wird so der erste Teil der Behauptung 4° beweisen. Für $\alpha + \beta = -1$ $(-1 < \alpha, \beta < 0)$ gilt $|\Gamma(-\alpha - \beta - \mathrm{n})| = |\Gamma(1 - \mathrm{n})| = +\infty$ und nach den Resultaten in Absätzen 2, 3 ist daher in diesem Fall $\lim\limits_{x\to 1-} y_2(x) = \lim\limits_{x\to -1+} \bar{y}_2(x) = 0$.

Wählen wir in (6) $c_1 = 0$ bzw. $\bar{c}_1 = 0$, so erhalten wir die zweite Lösung $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ mit der im zweiten Teil der Behauptung 4° angeführten Eigenschaft.

5. Transformiert man die Dgl $(\mathcal{J}_n)$ durch die Substitution

$$u(x) = (1 - x)^{1/2(1+\alpha)} (1 + x)^{1/2(1+\beta)} y(x)$$

auf die Normalform

$$u'' = -I_n u, \quad x \in j = (-1,1) \qquad (\mathcal{J}_n^N)$$

wo $I_n = \dfrac{1}{1 - x^2}\left[n(\alpha + \beta + n + 1) + \dfrac{1}{2}(1 + \alpha)(1 + \beta)\right] + \dfrac{1}{4}\dfrac{1 - \alpha^2}{(1 - x)^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1 - \beta^2}{(1 + x)^2}$,

dann für die linear unabhängige Lösungen dieser Dgl

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1 - x)^{1/2(1+\alpha)} (1 + x)^{1/2(1+\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1 - x)^{1/2(1+\alpha)} (1 + x)^{1/2(1+\beta)} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

gilt
$$q_n^{(\alpha,\beta)}(x)/p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)/P_n^{(\alpha,\beta)}(x) . \qquad (7)$$

Satz 6. *Für die Lösungen* $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *der Dgl* $(\mathcal{J}_n^N)$ *im Intervall* $j = (-1,1)$ gilt:

1° *ist* $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0$, *so ist* $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *zweiseitiges Grundintegral;*
2° ist $\beta \geqq 0$, α *beliebig, so ist* $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *linksseitiges Grundintegral;*
3° *ist* $\alpha \geqq 0$, β *beliebig, so ist* $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *rechtsseitiges Grundintegral;*
4° *ist* $-1 < \alpha, \beta < 0$, *so ist die Lösung*

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1 - x)^{1/2(1+\alpha)} (1 + x)^{1/2(1+\beta)} y_2(x)$$

wo $y_2(x) \in (1)$, *das linksseitige Grunditnegral und die Lösung*

$$\bar{q}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1 - x)^{1/2(1+\alpha)} (1 + x)^{1/2(1+\beta)} \bar{y}_2(x)$$

wo $\bar{y}_2(x) \in (3)$, *das rechtsseitige Grundintegral. Im Spezialfall* $\alpha + \beta = -1$ *existiert ein zweiseitiges Grundintegral* $q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Beweis. Es gilt (7), (5) und Satz 5. Die Behauptung folgt durch Anwendung von Satz 2.

Satz 7. 1° *Ist in der Dgl* $(\mathfrak{J}_n)$ *mindestens einer der Parameter* α, β, *negativ, so besitzt die Lösung* $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *mindestens* n *Nullstellen.*
2° *Ist* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, *so besitzt die Lösung* $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *genau* $n+1$ *Nullstellen.*
3° *Ist* $-1 < \alpha, \beta < 0$, *so besitzt die Lösung* $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *genau* $n-1$ *Nullstellen.*
Der Beweis dieser Behauptungen ergibt sich aus den im Satz 5 angeführten Eigenschaften von $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, als auch aus Behauptungen der Sätze 3 und 4.

6. Beispiele zu Sätzen 5, 6 und 7.
1° Für $\alpha = 0$, $\beta = 0$ siehe Spezialfall B.
Für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$P_n^{(1/2,\,1/2)}(x) = C_1\, U_n(x) = C_1 \sin\,[(n+1) \arccos x] \,/\, \sqrt{1-x^2}\,,$$

$$Q_n^{(1/2,\,1/2)}(x) = C_2 \cos\,[(n+1) \arccos x] \,/\, \sqrt{1-x^2} = C_2 T_{n+1}(x) \,/\, \sqrt{1-x^2}$$

(U_n, T_n stellen Tschebyschewsche Polynome zweiter und erster Art dar).
2° Für $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ ist

$$P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) = K_1 \cos\,[(n+1/2) \arccos x] \,/\, \cos\,(1/2 \arccos x) =$$
$$= K_1\,[T_n(x) - (1-x)\,U_n(x)] = K_1 \sqrt{2} \cos\,[(n+\tfrac{1}{2}) \arccos x] \,/\, \sqrt{1+x}$$
$$Q_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) = K_2 \sin\,[(n+1/2) \arccos x] \,/\, \cos\,(1/2 \arccos x) =$$
$$= K_2\,[\sqrt{1-x^2}\, U_{n-1} + T_n \sqrt{(1-x)\,/\,(1+x)}\,]$$
$$= K_2 \sqrt{2} \sin\,[(n+\tfrac{1}{2}) \arccos x] \,/\, \sqrt{1+x}\,.$$

3° Für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ ist

$$P_n^{(1/2,\,-1/2)}(x) = K_3 \sin\,[(n+\tfrac{1}{2}) \arccos x] \,/\, \sin\,(1/2 \arccos x) =$$
$$= K_3\,[T_n + (1+x)\, U_{n-1}] = K_3 \sqrt{2} \sin\,[(n+\tfrac{1}{2}) \arccos x] \,/\, \sqrt{1-x}$$
$$Q_n^{(1/2,\,-1/2)}(x) = K_4 \cos\,[(n+\tfrac{1}{2}) \arccos x] \,/\, \sin\,(1/2 \arccos x) =$$
$$= K_4\,[T_n \sqrt{(1+x)\,/\,(1-x)} - U_{n-1} \sqrt{1-x^2}\,]$$
$$= K_4 \sqrt{2} \cos\,[(n+\tfrac{1}{2}) \arccos x] \,/\, \sqrt{1-x}\,.$$

4° Für $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ $(\alpha + \beta = -1)$ ist

$$P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x) = C_3\, T_n(x) = C_3 \cos\,(n \arccos x)$$
$$Q_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x) = C_4 \sin\,(n \arccos x) \quad \text{(zweiseitiges Grundintegral!)}$$

In allen diesen Beispielen lässt sich die Gültigkeit der Behauptungen zu Sätzen 5, 6 und 7 durch elementare Mittel nachprüfen.

LITERATUR

[1] *Bateman, Erdélyi:* Higher Transcendental Functions I, II New York, 1953–1955.
[2] *Borůvka, O.:* Lineare Differentialatransformationen 2. Ordnung. DVW Berlin, 1967.
[3] *Jahnke, Emde, Lösch:* Tafeln Höheren Funktionen. Teubner, Stuttgart 1960.
[4] *Szegö, G.:* Orthogonal Polynomials. Amer. Math, Soc. Coll. Publ., Vol. XXIII, 1959
[5] *Whittaker, Watson:* A Course of Modern Analysis. Cambridge 1927.

SHRNUTÍ

K URČENÍ ZÁKLADNÍCH INTEGRÁLŮ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' = q(x)y$

JIŘÍ KOBZA

V předložené práci se vychází z definice pojmů základní číslo, základní integrál dif. rovnice (q) v intervalu j, dané v práci [2]. Ve větě 2 je dán předpis pro nalezení základních čísel pomocí dvou lineárně nezávislých řešení dif. rov. (q). Dále je studována normovaná dif. rovnice Jacobiho polynomů a ve větě 6 jsou ukázány základní integrály této rovnice. Ve větách 5, 7 jsou dokázány některé vlastnosti druhého řešení uvažované rovnice, které nejsou uvedeny v monografii [4].