

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jiří Kepřt

Základy teorie interference a koherence v učivu střední školy

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
12 (1972), No. 1, 245--260

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119985>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Laboratoř optiky přírodovědecké fakulty
Vědovcí laboratoře: prof. RNDr. Bedřich Havelka, doktor v.ěd*

ZÁKLADY TEORIE INTERFERENCE A KOHERENCE V UČIVU STŘEDNÍ ŠKOLY

JIŘÍ KEPRT

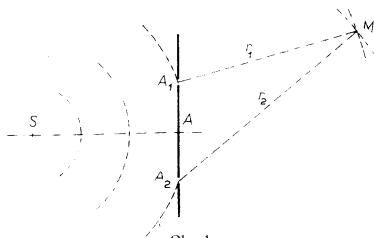
(Předloženo dne 29. června 1971)

Věnováno prof. dr. Josefu Fukovi k 65. narozeninám.

Interference vlnění

Nechť dvě vlnění, vycházející z různých zdrojů, se na své dráze překrývají. Tento jev můžeme snadno pozorovat, vhodíme-li na klidnou vodní hladinu dva kameny. Vidíme, že v určitých místech jsou amplitudy výchylek větší, v jiných menší než amplitudy výchylek kmitů vytvořených původními zdroji. Jakmile kruhové vlny přejdou jedna přes druhou a znovu se rozejdou, budou to opět jako dříve pravidelné kruhové vlny se středy v místech dopadu kamenů. V oblasti, kde se kruhové vlny překrývají, nastává skládání, tzv. interference vln.

Zvláště důležitý je případ, kdy zdroje kmitají se stejnou frekvencí a v téže fázi, resp. stejnou počáteční fází, přičemž výchylky kmitů jsou téhož směru. Říkáme, že takové zdroje jsou koherentní. Koherentní zdroje můžeme získat např. tím způsobem, že do cesty kruhovým vlnám, které se šíří od bodového zdroje S (ležícího v rovině nákresny), postavíme kolmo k nákresně rovinnou překážku se dvěma bodovými otvory A_1 a A_2 , které jsou rozloženy souměrně vzhledem ke komici spuštěné z bodu S na rovinnou překážku (obr. 1). Otvory A_1 a A_2 se stanou podle Huygensova principu samostatnými zdroji vlnění, kmitajícími ve stejných fázích, neboť jejich vzdálenost od zdroje S je stejná.



Obr. 1

Zkoumejme pro určitý okamžik výslednou výchylku v bodě M , který je ve vzdálenostech r_1 a r_2 od bodů A_1 a A_2 . Je-li okamžitá výchylka vlny v bodech A_1, A_2

$$y = y_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

kde y_0 je amplituda výchylky a ω kruhová frekvence vlnění, resp. ωt fáze vlny, pak budou v bodě M vlny vycházející z bodů A_1, A_2 charakterizovány výchylkami (viz. [4], str. 13)

$$y_1 = \frac{y_0}{r_1} \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{r_1}{\lambda} \right), \quad y_2 = \frac{y_0}{r_2} \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{r_2}{\lambda} \right), \quad (2)$$

kde λ je délka vlny v daném prostředí, přičemž předpokládáme v dalším, že prostředí před i za překážkou jsou stejná. Za předpokladu, že body A_1, A_2 jsou blízké a ve srovnání s touto vzdáleností jsou vzdálenosti r_1 a r_2 značně velké, můžeme psát

$$\frac{y_0}{r_1} \approx \frac{y_0}{r_2} = y'_0. \quad (3)$$

Pak v bodě M nastává skládání dvou kmitů stejnosměrných téže amplitudy y'_0 a frekvence ω , které se liší pouze ve fázích. Označme

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{r_1}{\lambda} \quad \text{a} \quad \varphi_2 = 2\pi \frac{r_2}{\lambda}. \quad (4)$$

Výsledná výchylka

$$y = y_1 + y_2 = y'_0 \sin(\omega t - \varphi_1) + y'_0 \sin(\omega t - \varphi_2) \quad (5)$$

nabude tvaru

$$y = 2y'_0 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right). \quad (6)$$

Dostáváme tudíž opět periodický kmitavý pohyb s fází $\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ a amplitudou výchylky

$$Y_0 = 2y'_0 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 2y'_0 \cos \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}, \quad (7)$$

která je menší než součet amplitud základních kmitů.

Absolutní hodnota amplitudy výchylky v bodě M bude zřejmě maximální a rovna

$$|Y_0| = 2y'_0 \quad (8)$$

pro

$$\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

tj. pro

$$r_2 - r_1 = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Maximální amplituda výchylky tudíž nastává v bodech, v nichž dráhový rozdíl paprsků je roven nule nebo celistvému násobku délky vlny.

Naopak v bodě M bude výsledná amplituda výchylky minimální, resp. rovna

nule, jestliže platí

$$\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

tj.

$$r_2 - r_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Minimální amplituda výchylky nastává v bodech, v nichž dráhový rozdíl paprsků je roven lichému násobku poloviční délky vlny.

Předpokládejme nyní uspořádání našeho pokusu tak (Youngův pokus), že ve vzdálenosti D od rovinné překážky umístíme rovinu rovnoběžnou s rovinou překážky (stínítko), kde budeme ve vzdálenosti x od počátku O studovat amplitudu výsledného vlnění od koherentních zdrojů A_1 a A_2 (obr. 2). Zřejmě platí

$$r_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad r_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \quad (13)$$

takže

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{2xd}{r_2 + r_1}. \quad (14)$$

Je-li d a x malé ve srovnání s r_1, r_2 , resp. D , můžeme psát

$$r_2 + r_1 \approx 2D \quad (15)$$

a tudíž

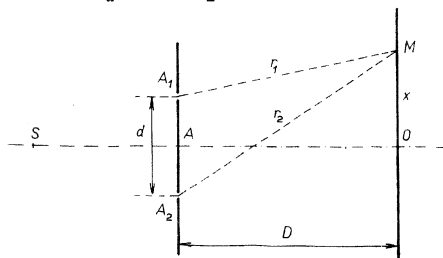
$$\Delta r = \frac{xd}{D}, \quad \text{tj.} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{x}{D}. \quad (16)$$

Podle (10) a (12) pak nastávají maxima a minima amplitudy výchylky v bodech

$$x = \frac{D}{d} k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

a

$$x = \frac{D}{d} (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$



Obr. 2

Studujeme nyní výsledný energetický stav vlnění v rovině stínítka. Intenzita vlnění je úměrná čtverci amplitudy výchylky (viz. [4] str. 12)

$$i = ky_0^2, \quad (19)$$

tudíž v našem případě složené vlny, kdy amplituda je dána vztahem (7), dostáváme

$$I = kY_0^2 = k4y_0'^2 \left(\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \quad (20)$$

a uijeme-li goniometrické rovnosti

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \quad (21)$$

vychází

$$I = 2ky_0'^2 [1 + \cos (\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (22)$$

Pro $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ($x = 0$) zřejmě obdržíme

$$I_0 = 4ky_0'^2 \quad (23)$$

a budeme-li v dalším označovat fázový rozdíl

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Phi, \quad (24)$$

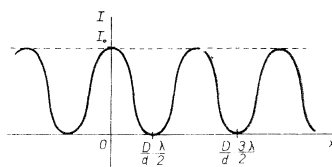
můžeme vztah (22) psát nadále ve tvaru

$$I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \Phi). \quad (25)$$

Uvažujeme-li v obr. 2 světelnou vlnu, která se šíří ze štěrbin kolmá k nákresně a jejímž obrazem je bod S, a předpokládáme-li dále, že body A_1 a A_2 jsou obrazy rovnoběžných štěrbin, pak na stínítku ve vzdálenosti D od roviny štěrbin A_1, A_2 pozorujeme rozdělení intenzity světelné vlny ve tvaru rovnoběžných proužků (interferenční proužky), které se v našem uspořádání jeví jako průběh funkce (25), jejíž graf je znázorněn na obr. 3. Vztah (25) nazýváme interferenčním zákonem a bude výchozím vztahem všech našich dalších úvah.

Z výrazů (16) a (24) dále plyne, že Φ je přímo úměrné vzdálenosti štěrbin d . Je-li $d = 0$, tj. $\Phi = 0$ a neuvažujeme-li šířku štěrbin (ohyb), pak $\cos \Phi = 1$ a z (25) plyne

$$I = \frac{I_0}{2} (1 + 1) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} = I_0. \quad (26)$$



Obr. 3

Hovoříme o nekoherentním skládání vln, kdy se sčítají pouze intenzity zdrojů a interference se neprojeví. Kdybychom předpokládali konečnou šířku šterbin, projevil by se interferenční jev, který se nazývá ohyb vlnění na šterbině (viz. [4] str. 38), který však v dalším nebudeme uvažovat.

Ríkáme, že interference je projevem koherence zdrojů. Dva zdroje nazýváme koherentní, jestliže vysílají vlny, které vzájemně interferují, což se projeví např. zřetelnými interferenčními proužky na stínítku (Youngův pokus). Naopak rovnoměrné rozložení intenzity na stínítku je projevem toho, že vlny vzájemně neinterferují, tj. že zdroje jsou nekoherentní. Jestliže interferenční obrazec není zcela zřetelný, ale jisté změny intenzit jsou pozorovatelné, pak tento mezistav nazýváme částečnou koherencí, říkáme, že zdroje jsou částečně koherentní. Měřítkem koherence (podle Michelsona) je tedy viditelnost interferenčních proužků, která je definována vztahem

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (27)$$

Viditelnost (míra koherence) je vždy číslo kladné, neboť $I_{\max} > I_{\min} > 0$. Je-li $I_{\min} = 0$, pak $V = 1$ což značí, že zdroje jsou koherentní. Pro $I_{\max} = I_{\min}$ vychází $V = 0$, tj. zdroje jsou nekoherentní. Je-li $0 < V < 1$ jsou zdroje částečně koherentní.

Frekvenční (časová) koherence

Pokles viditelnosti interferenčních proužků může být způsoben např. tím, že vlnění vysílané zdrojem není vlastně jedna vlna, ale soubor několika vln různých vlnových délek. Předpokládáme pro jednoduchost, že zdroj vysílá vlnění skládající se ze dvou vlnových délek λ_1 a λ_2 téže amplitudy. Pak při stejném uspořádání jako na obr. 2 vznikne na stínítku od vlny vlnové délky λ_1 interferenční obrazec charakterizovaný vztahem

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \phi_1), \quad (28)$$

kde

$$\phi_1 = \frac{2\pi d}{\lambda_1 D} x. \quad (29)$$

Interferenční obrazec charakterizující rozložení intenzity na stínítku, jež vytvoří vlna vlnové délky λ_2 , bude popsán výrazem

$$I_2 = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \phi_2), \quad (30)$$

kde

$$\phi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda_2 D} x. \quad (31)$$

Výsledná intenzita

$$I = I_1 + I_2 \quad (32)$$

a užitím vztahu

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (33)$$

dostáváme

$$I = I_0 (1 + \cos \Delta \Phi \cos \Phi_0), \quad (34)$$

kde jsme položili

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \quad (35)$$

a

$$\Delta \Phi_0 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}. \quad (36)$$

Za předpokladu velmi blízkých vlnových délek λ_1 a λ_2 můžeme psát

$$\Phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{d}{D} x, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \doteq \frac{1}{\lambda_0} \quad (37)$$

a

$$\Delta \Phi = \pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \frac{d}{D} x, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \doteq \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2}, \quad (38)$$

přičemž

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad \text{a} \quad \Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (39)$$

Jelikož $\frac{\Delta \lambda}{2\lambda_0} \ll 1$ pro $\Delta \lambda$ malé ve srovnání s λ_0 a jelikož $\Delta \Phi$ můžeme psát ve tvaru $\Delta \Phi = \frac{\Delta \lambda}{2\lambda_0} \Phi_0$, vykazuje výraz $\cos \Delta \Phi$ značně menší změny ve srovnání s $\cos \Phi_0$. Je tedy výraz $\cos \Delta \Phi$ koeficient, který moduluje průběh intenzity s ohledem na rozdíl vlnových délek základních vln (obr. 4.). Všíráme-li si jen amplitudových změn viditelnosti proužků přepisujeme vztah (34) do tvaru

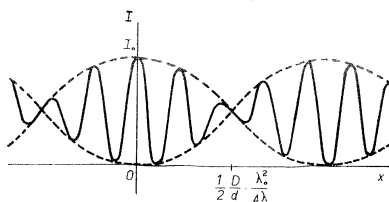
$$I = I_0 (1 + |\cos \Delta \Phi| \cos \Phi_0) \quad (40)$$

Maximum a minimum výrazu (40) nabývá hodnot

$$I_{\max} = I_0 (1 + |\cos \Delta \Phi|), \quad I_{\min} = I_0 (1 - |\cos \Delta \Phi|), \quad (41)$$

tj. pro

$$\cos \Phi_0 = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}. \quad (42)$$

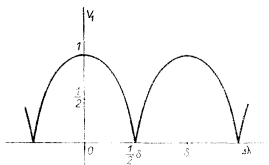


Obr. 4

Tudíž viditelnost proužků definovaná vztahem (27)

$$V_1 = |\cos \Delta \Phi|. \quad (43)$$

Výraz (42) je v našem případě měřítkem koherence dvou vln různých vlnových délek a nazýváme jej proto koeficientem částečné koherence. Ze vztahu (38) a (16) je dále zřejmé, že výraz (43) je funkcí drahového rozdílu Δr a označíme-li



Obr. 5

$r = \frac{\Delta r}{v}$, kde v je fázová rychlost vlnění (v našem případě předpokládáme, že rychlost v je pro obě vlnění stejná), vidíme, že výraz (43) je i funkcí časového zpoždění τ obou vln. Proto hovoříme o časové koherenci dvou vln. Grafické znázornění výrazu (43) je na obr. 5, přičemž jsme položili

$$\frac{D}{d} \frac{\lambda_0^2}{x} = \delta. \quad (44)$$

Prostorová koherence

V uspořádání Youngova pokusu v obr. 2 jsme předpokládali, že vlnění vychází z bodového zdroje. Uvažujeme-li konečné rozměry zdroje (štěrbiny) pak tato skutečnost má za následek zhoršování viditelnosti interferenčních proužků a dostáváme se tak k pojmu prostorově koherentních vln.

Předpokládejme, že štěrbina (zdroj) má šířku b (obr. 6) a uvažujme vliv krajních hran štěrby na viditelnost proužků, tj. předpokládejme, že vlnění téže vlnové délky λ vychází ze dvou bodů S_1 a S_2 , které jsou souměrně položeny vzhledem k bodu S . Toto zjednodušení je sice nepřesným vyjádřením skutečnosti, z metodického hlediska je však velmi výhodné, neboť naše úvahy značně zjednoduší.

Označme p vzdálenost zdroje od rovinné překážky opatřené úzkými štěrbinami A_1 a A_2 . Pak drahový rozdíl paprsků vycházejících z bodu S_1 , resp. S_2 k bodům A_1 , resp. A_2 nechť je

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 + u_1} = \frac{bd}{2p}. \quad (45)$$

Drahový rozdíl $\Delta r + \Delta u$ způsobuje vznik interferenčního obrazce v bodě M od bodu S_1 a drahový rozdíl $\Delta r - \Delta u$ dává vznik interferenčního jevu v bodě M od bodu S_2 . Označme

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta r + \Delta u) = \Phi + \Psi \quad (46)$$

a

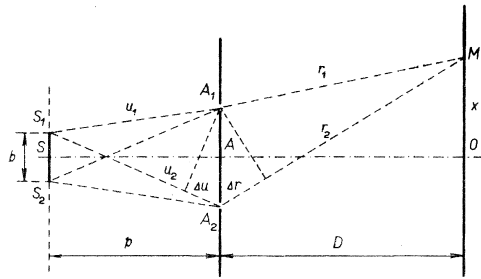
$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta r - \Delta u) = \Phi - \Psi, \quad (47)$$

kde

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r \quad \text{a} \quad \Psi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta u. \quad (48)$$

Za předpokladu stejných intenzit zdrojů S_1 a S_2 , a za předpokladu, že vzdálenosti p a D jsou velké ve srovnání s b a d , je interferenční stav v bodě M od zdroje S_1 vyjádřen výrazem

$$I_1 = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \Phi_1), \quad (49)$$



Obr. 6

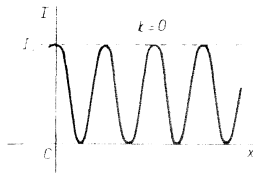
příčměž v témže bodě M je intenzita od zdroje S_2 dána vztahem

$$I_2 = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \Phi_2). \quad (50)$$

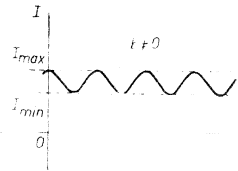
Pak výsledná intenzita v bodě M vychází

$$I = I_1 + I_2 = I_0 (1 + |\cos \Psi| \cos \Phi), \quad (51)$$

kde jsme opět užíli vztahu (33).



Obr. 7a



Obr. 7b

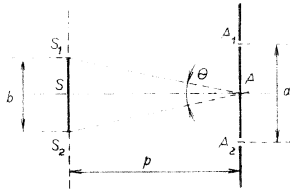
Maximum, resp. minimum intenzity nastává pro

$$\cos \psi = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}, \quad (52)$$

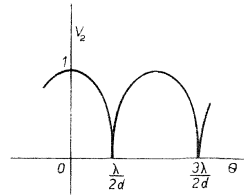
tudíž viditelnost proužků je podle (27)

$$V_2 = |\cos \psi|. \quad (53)$$

Výraz (53) nazýváme koeficientem prostorové koherence. Zřejmě při konstantním λ , d a p nezávisí na x , nýbrž jen na velikosti zdroje b . Vliv šířky štěrbiny na viditelnost interferenčních proužků je znázorněn na obr. 7.



Obr. 8



Obr. 9

Označíme-li v našem uspořádání θ úhlovou velikost zdroje (obr. 8), pak platí

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{b}{2p} \quad (54)$$

a pro $b \ll p$

$$\theta \doteq \frac{b}{p}. \quad (55)$$

Tudíž výraz (27) a tedy i (48) nabude tvaru

$$\psi = \frac{\pi}{\lambda} \theta d. \quad (56)$$

Závislost koeficientu prostorové koherence na velikosti úhlu θ je znázorněna na obr. 9.

Koherence časoprostorová

Uvažujme nyní obecný případ, že totiž zdroj má konečné rozměry a vysílá vlnění složené z více (v našem případě ze dvou) vlnových délek.

Nechť tedy v uspořádání na obr. 6 vytvoří vlnění od bodů S_1 a S_2 o vlnové délce λ_1 v rovině stínítka interferenční obrazec vyjádřený rovnicí

$$I_1 = I_0 (1 + \cos \psi_1 \cos \phi_1), \quad (57)$$

kde

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} Ar \quad \text{a} \quad \psi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} Au \quad (58)$$

a vlnění o vlnové délce λ_2 interferenční obrazec charakterizovaný vztahem

$$I_2 = I_0 (1 + \cos \Psi_2 \cos \Phi_2), \quad (59)$$

kde

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} Ar \quad \text{a} \quad \Psi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} Au. \quad (60)$$

Pak výsledná intenzita

$$I = I_1 + I_2 \quad (61)$$

se dá vyjádřit ve tvaru

$$I = I_0 \left\{ 2 + \frac{1}{2} [\cos(\Phi_1 + \Psi_1) + \cos(\Phi_1 - \Psi_1) + \cos(\Phi_2 + \Psi_2) + \cos(\Phi_2 - \Psi_2)] \right\}, \quad (62)$$

přičemž jsme použili vztahu (33) v obráceném pořadí. Provedeme-li přemístění jednotlivých výrazů, obdržíme

$$I = I_0 \left\{ 2 + \frac{1}{2} [\cos(\Phi_2 - \Psi_2) + \cos(\Phi_1 + \Psi_1)] + \frac{1}{2} [\cos(\Phi_2 + \Psi_2) + \cos(\Phi_1 - \Psi_1)] \right\}, \quad (63)$$

odkud

$$I = 2I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} [\cos(\Psi_0 - A\Phi) \cos(\Phi_0 - A\Psi) + \cos(\Psi_0 + A\Phi) \cos(\Phi_0 + A\Psi)] \right\}, \quad (64)$$

kde jsme položili

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_2 + \Phi_1}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} Ar, \quad A\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} = \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} Ar \quad (65)$$

a

$$\Psi_0 = \frac{\Psi_2 + \Psi_1}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} Au, \quad A\Psi = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2} = \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} Au, \quad (66)$$

přičemž

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad \text{a} \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (67)$$

Zde opět předpokládáme, že vlnové délky λ_1 a λ_2 se liší jen velmi málo.

Ze vztahu (64) je zřejmé, že výsledný interferenční obrazec vzniká vlastně složením dvou rozložení intenzity

$$I_1 = I_0 [1 + \cos(\Psi_0 - A\Phi) \cos(\Phi_0 - A\Psi)] \quad (68)$$

a

$$I_2 = I_0 [1 + \cos(\Psi_0 + A\Phi) \cos(\Phi_0 + A\Psi)]. \quad (69)$$

Interferenční člen $\cos(\Phi_0 - A\Psi)$, resp. $\cos(\Phi_0 + A\Psi)$ je modulován výrazem $\cos(\Psi_0 - A\Phi)$, resp. $\cos(\Psi_0 + A\Phi)$, který je funkcí velikosti zdroje a vzhledem k x se mění pomalu. Maximum a minimum vztahu (64) tudíž nabývá hodnot

$$I_{\max} = 2I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} [\cos(\Psi_0 - A\Phi) + \cos(\Psi_0 + A\Phi)] \right\}, \quad (70)$$

resp.

$$I_{\min} = 2I_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\cos(\Psi_0 - \Delta\Phi) + \cos(\Psi_0 + \Delta\Phi)] \right\}. \quad (71)$$

Užitím (33) pak dostáváme pro viditelnost interferenčních proužků výraz

$$V = |\cos \Psi_0| |\cos \Delta\Phi| = V_2 V_1, \quad (72)$$

který je tedy součinem časového a prostorového faktoru koherence jež jsou dány vztahy (43) a (53).

Diskuse

Celou řadu zjednodušujících předpokladů uvedených v této práci je možno ve vyšších ročnících střední školy odstranit a výsledky zobecnit užitím integrálního počtu.

Nechť intenzita bodového (přímkového) zdroje S je konstantní pro všechny vlnové délky v intervalu $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Tj. definujeme (viz. obr. 10)

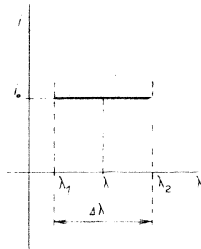
$$i = \begin{cases} i_0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{pro} \quad |\lambda - \lambda_0| \begin{cases} \leq \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \geq \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases}, \quad (73)$$

je-li $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Za předpokladu, že vzdálenosti p, D v obr. 6 jsou ve srovnání se vzdáleností štěrbin d značně velké a uvažujeme-li nekonečně tenké štěrbiniky v rovinné přecházce, pak v bodě M v rovině stínítka bude výsledná intenzita součtem všech interferenčních obrazců od jednotlivých vlnových délek. Tj. platí

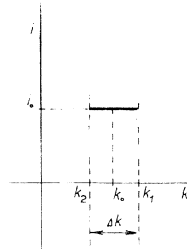
$$I = K i_0 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [1 + \cos \Phi(\lambda)] d\lambda, \quad (74)$$

kde K je součinitel vyjadřující pokles intenzity zdroje v bodě M , přičemž podle (48)

$$\Phi(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r. \quad (75)$$



Obr. 10



Obr. 11

Integrace výrazu (74) v tomto tvaru však není pohodlná. Označíme-li však

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k, \quad \text{resp.} \quad \frac{2\pi}{\lambda_0} = k_0, \quad (76)$$

pak funkce (73) nabude tvaru (obr. 11)

$$i = \begin{cases} i_0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{pro} \quad |k - k_0| \begin{cases} \leq \frac{\Delta k}{2} \\ > \frac{\Delta k}{2} \end{cases} \quad (77)$$

a výslednou intenzitu v bodě M můžeme určit jako součet příspěvků odpovídajících převráceným hodnotám jednotlivých vlnových délek. Tudíž

$$I = Ki_0 \int_{k_i}^{k_0} (1 + \cos kAr) dk. \quad (78)$$

Položíme-li dále

$$z = k - k_0, \quad \text{resp.} \quad dz = dk, \quad (79)$$

obdržíme

$$I = Ki_0 \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} [1 + \cos(z + k)Ar] dz. \quad (80)$$

Integrací dostaneme

$$I = Ki_0 \left[z + \frac{\sin(z + k_0)Ar}{Ar} \right]_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} \quad (81)$$

a tudíž

$$I = Ki_0 \left[k + \frac{\sin\left(\frac{\Delta k}{2} + k_0\right)Ar}{Ar} - \frac{\sin\left(-\frac{\Delta k}{2} + k_0\right)Ar}{Ar} \right]. \quad (82)$$

Úpravou obdržíme dále

$$I = K\Delta k i_0 \left(1 + \frac{\sin \frac{\Delta k}{2} Ar}{\frac{\Delta k}{2} Ar} \cos k_0 Ar \right), \quad (83)$$

tj.

$$I = I_0 \left(1 + \frac{\sin \Delta \phi}{\Delta \phi} \cos \phi_0 \right), \quad (84)$$

kde jsme položili

$$\phi_0 = k_0 Ar = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{d}{D} x \quad (85)$$

a

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta k}{2} \Delta r \doteq \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \frac{d}{D} x. \quad (86)$$

Neboť pro λ_1 a λ_2 dostatečně blízké plyne ze vztahu (76)

$$\Delta k = k_1 - k_2 = 2\pi \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \doteq 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}, \quad (87)$$

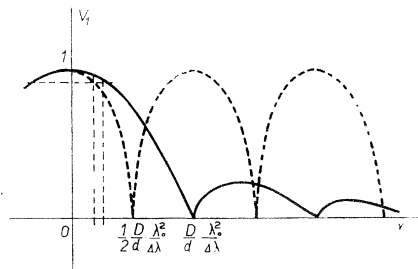
přičemž jsme označili

$$K \Delta k i_0 = I_0. \quad (88)$$

Výraz

$$V_1 = \frac{|\sin \Delta\Phi|}{\Delta\Phi} \quad (89)$$

je zřejmě frekvenčně (časově) modulačním koeficientem interferenčních proužků, resp. koeficientem částečné koherence, který ve srovnání s výrazem (43) má iče odlišný průběh, ale přitom podobný charakter (obr. 12).



Obr. 12

Podmínkám koherence (zřetelná viditelnost proužků) odpovídá interval, v němž viditelnost

$$V \geq 0,9 \quad (90)$$

Z obr. 12 je zřejmé, že při splnění této podmínky pro výraz (43) je zajištěna i platnost podmínky (90) pro obecnější výraz (89). Neboť žádáme-li např. aby na stínítku byla viditelnost $V \geq 0,9$ v pásmu $2x = a$, vychází z podmínky

$$\cos \Delta\Phi \geq 0,9$$

podmínka

$$\Delta\Phi \leq \frac{\pi}{7},$$

tj.

$$\Delta\lambda \leq \frac{2}{7} \frac{D}{d} \frac{\lambda_0^2}{a}. \quad (91)$$

Z nerovnosti

$$\frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi} \geq 0,9$$

vychází

$$\Delta\phi \leq \frac{\pi}{4},$$

odkud

$$\Delta\lambda \leq \frac{1}{2} \frac{D}{d} \frac{\lambda_0^2}{a}. \quad (92)$$

Výraz (91) zajišťuje tedy i platnost podmínky (92).

Obdobně můžeme odvodit prostorově koherentní součinitel v případě, že uvažujeme rovnoměrně svítící šterbinu šířky b_0 . Předpokládáme-li body S_1 a S_2 v infinitesimálně malé vzdálenosti od bodu S , platí vztah (51) v upraveném tvaru

$$i = i_0 \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda} \frac{d}{p} b \cos \phi \right). \quad (93)$$

Pak výsledná intenzita za uvedených předpokladů bude

$$I = i_0 \int_0^{b_0} \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda} \frac{d}{p} b \cos \phi \right) db. \quad (94)$$

Tudíž

$$I = i_0 \left(b_0 + \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{d}{p} b_0}{\frac{\pi}{\lambda} \frac{d}{p}} \cos \phi \right) \quad (95)$$

nebo lépe

$$I = I_0 \left(1 + \frac{\sin \psi'_0}{\psi'_0} \cos \phi \right), \quad (96)$$

kde jsme položili

$$I = i_0 b_0 \quad \text{a} \quad \psi'_0 = \frac{\pi}{\lambda} \frac{d}{p} b_0. \quad (97)$$

Zřejmě tedy

$$V_2 = \frac{|\sin \psi'_0|}{\psi'_0}. \quad (98)$$

Studujeme opět případ, kdy je možno považovat plošný zdroj ještě za koherentní. Z podmínky dokonalé viditelnosti interferenčních proužků (90), vychází v případě vztahu (53), resp. (96)

$$\cos \psi' \geq 0,9, \quad \frac{\sin \psi'_0}{\psi'_0} \geq 0,9$$

odkud

$$b \leq \frac{1}{7} \frac{p}{d} \lambda, \quad b_0 \leq \frac{1}{4} \frac{p}{d} \lambda. \quad (99)$$

Nebo užitím vztahu (56)

$$\theta \leq \frac{1}{7} \frac{\lambda}{d}, \quad \theta_0 \leq \frac{1}{4} \frac{\lambda}{d}. \quad (100)$$

Opět tedy z koeficientu částečné koherence dostáváme ve zjednodušených podmínkách tolerance velikosti zdroje, které splňují obecnější podmínku prostorové koherence zdroje.

LITERATURA

- [1] *Born M., Wolf E.*: Principles of Optics, Pergamon Press 1964
ruský překlad: Osnovy optiki, Nauka 1970
- [2] *Havelka B.*: Moderní pojetí koherence. Krajský pedagogický ústav v Olomouci 1970
- [3] *Peřina J.*: Czech. J. of Phys. B 19 (1969) 151
- [4] *Keprt J.*: Základy teorie vlnění a optického zobrazení, SPN 1970

SUMMARY

**ELEMENTARY THEORY OF INTERFERENCE
AND COHERENCE IN THE COURSE
OF SECONDARY SCHOOLS**

JIRÍ KEPRT

Interference of two monochromatic waves with small wavelength difference is discussed. The influence of the size of source on the interference pattern is studied by means of the phase difference of the endpoints of the source (the edges of the slit). This method is suitable for the application in the course of secondary schools.

ZUSAMMENFASSUNG

**GRUNDLAGEN DER INTERFERENZ – UND KOHÄRENZ
THEORIE IM MITTELSCHULEUNTERRICHT**

JIRÍ KEPRT

In der Arbeit wird die Interferenz von zwei monochromatischen Wellen mit dem kleinen Wellenlängeunterschied diskutiert. Gleichzeitig wird auch der Einfluß von Größe der Quelle auf die Interferenzfigur studiert, wobei nur der Phasenunterschied zwischen der Endpunkte der Quelle (der Ränder des Spaltes) betrachtet wird. Diese einfache Methode ermöglicht die Problematik der Kohärenz im Rahmen des Unterrichtes an der Mittelschule zu erklären.