Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Antonín Špelda

Některé akustické analogie mechanických a elektrických veličin a vztahů

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 12 (1972), No. 1, 171--180

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119977`

1972 ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 37

NĚKTERÉ AKUSTICKÉ ANALOGIE MECHANICKÝCH A ELEKTRICKÝCH VELIČIN A VZTAHŮ

ANTONÍN ŠPELDA

(Předloženo dne 30. června 1971)

Věnováno prof. dr. Josefu Fukovi k 65. narozeninám

Za předpokladu, že v duchu moderního pojetí vyučování fyzice na vysokých školách a na odborných technických středních školách bude nauka o vlnění probírána vcelku (mechanické i elektromagnetické vlny) až po nauce o elektřině a magnetismu, a tedy i akustika bude zařazena do tohoto oddílu, lze uvést v akustice několik zajímavých analogií s mechanickými a elektrickými veličinami a vztahy. Na některých fakultách vysokých škol technických se sice posluchači s touto problematikou setkávají, ale na školách universitního typu nebývají tyto partie zařazovány do učiva, ačkoliv poskytují hlubší a zajímavý pohled na některé souvislosti mezi různými obory fyziky.

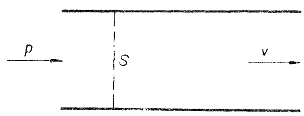
A. Mechanické a akustické analogie

1. Mechanická a akustická hmotnost

Jestliže v mechanice je jedním ze základních pojmů síla F, pracuje se v akustice s proměnným akustickým tlakem p, resp. s efektivním akustickým tlakem $p_{ef} = \frac{p_{max}}{\sqrt{2}}$. Čteme-li v mechanice druhý Newtonův pohybový zákon (1) $F = m \frac{dv}{dt}$ tak, že síla F a zrychlení $\frac{dv}{dt}$ silou udělované konstantní hmotnosti m, jsou veličiny přímo úměrné, můžeme podobně v akustice psát

(2) $$p = m_a \frac{dU}{dt},$$

jde-li o působení akustického tlaku v trubici (obr. 1) na hmotné prostředí, které se jako celek pohybuje v trubici objemovou rychlostí $U = Sv$. Konstantu úměr-



Obr. 1

nosti m_a v rovnici (2) nazveme, „*akustickou hmotností*“ a budeme hledat vztah mezi m a m_a.

Vynásobme rovnici (2) průřezem S trubice. Předpokládáme, že rozměry dutiny (trubice) jsou malé ve srovnání s délkou λ akustické vlny. Pak

$$pS = m_a S^2 \frac{dv}{dt}, \quad \text{kde} \quad \frac{dU}{dt} = S \frac{dv}{dt}.$$

Porovnáním s (1) dostáváme ihned

$$m = m_a S^2 \qquad \text{čili}$$

(3) $$m_a = \frac{m}{S^2}$$

Rozměr akustické hmotnosti je tedy [kg . m^{-4}].

Jde-li o akustickou hmotnost v trubici válcového tvaru o poloměru r a délce l a je-li hustota prostředí uvnitř trubice ϱ, lze přepsat (3) do tvaru

$$m_a = \frac{Sl\varrho}{S^2} = \frac{l\varrho}{\pi r^2}.$$

Podle Rayleigha [1] nutno vzít v úvahu u otevřené trubice délky l ještě korekci $\frac{1}{2}\pi r$ (z každé strany trubice korekci $\frac{1}{4}\pi r$), takže

(4) $$m_a = \frac{\left(l + \frac{1}{2}\pi r\right)\varrho}{\pi r^2}.$$

Zmenšuje-li se l k nule, tj. místo trubice přichází v úvahu otvor o poloměru r, je akustická hmotnost otvoru

(5) $$m_a = \frac{\frac{1}{2}\pi r\varrho}{\pi r^2} = \frac{\varrho}{2r}.$$

2. Mechanická a akustická poddajnost

Pro pružné síly platí známý vztah

(6) $$dF = -K_m \, . \, d\xi ,$$

kde $d\xi$ je změna výchylky pružného bodu a dF příslušná změna síly, která změnu výchylky vyvolala. Konstanta K_m je mechanická tuhost materiálu. Její převrácená hodnota $\frac{1}{K} = C_m$ je mechanická poddajnost pružného prostředí o rozměru [m . N^{-1}] = [kg^{-1} s^2]. Rovnici (6) lze tedy psát také ve tvaru

(7) $$dF = -\frac{1}{C_m}\, d\xi .$$

Změna akustického tlaku dp vyvolává v malém prostoru (ve srovnání s vlnovou délkou λ) o objemu V změnu objemu prostředí dV. Tedy

(8) $$dp = \frac{1}{C_a}\, dV ,$$

kde konstantu C_a nazveme *akustickou poddajností prostředí.* Znaménko „minus“ tu značí, že zvětšení tlaku odpovídá zmenšení objemu a naopak.

Přepíšeme nyní dF v rovnici (7) jako $S \,.\, dp$ a celou rovnici znásobíme S, kde S je průřez, na který periodicky proměnný akustický tlak působí:

$$S^2 \, dp = -\frac{1}{C_m} S \,.\, d\xi \,. \tag{9}$$

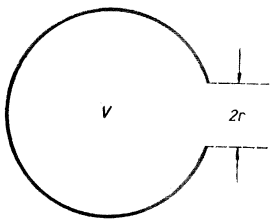
Ale $S \,.\, d\xi = dV$ a tedy

$$dp = -\frac{1}{S^2 C_m} dV. \tag{10}$$

Porovnáním rovnic (8) a (10) dostáváme ihned

$$C_a = C_m \,.\, S^2 \,. \tag{11}$$

Rozměr akustické poddajnosti je tedy [$kg^{-1} m^4 s^2$].



Obr. 2

Vypočteme nyní akustickou poddajnost dutiny o objemu V (obr. 2), naplněné plynným prostředím, a to opět za předpokladu, že rozměry dutiny jsou malé ve srovnání s vlnovou délkou λ. Zvukové vlny se šíří takovým prostředím tak, že je splněn zákon adiabatického děje $pV^K = konst.$ Diferencujeme tuto rovnici:

$$V^K \, dp + KV^{K-1} p \;\; dV = 0 \qquad \text{čili}$$

$$dp = -\frac{Kp}{V} \, dV. \tag{12}$$

Protože však rychlost c zvukových vln v plynném prostředí je dána vztahem

$$c = \sqrt{K \cdot \frac{p}{\varrho}}, \tag{13}$$

lze nahradit čitatele na pravé straně vztahu (12) výrazem $c^2\varrho$ a tedy

$$dp = -\frac{c^2 \varrho}{V} \, dV. \tag{14}$$

Vzhledem k rovnici (8) je akustická poddajnost dutiny o objemu V

$$C_a = \frac{V}{c^2 \varrho}, \tag{15}$$

závisí tedy přímo na velikosti daného objemu dutiny, nepřímo na hustotě ϱ prostředí a na čtverci rychlosti zvuku v uvažovaném prostředí.

3. Mechanický a akustický odpor

Je-li p akustický tlak, působící na hmotné prostředí v trubici a U objemová rychlost tohoto prostředí, jsou tyto veličiny přímo úměrné, tj.

(16) $$p = R_a U.$$

Konstantu úměrnosti nazveme akustickým odporem prostředí. Jeho rozměr je

$$\left[\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}}{\mathrm{m}^3 \mathrm{s}^{-1}}\right] = [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-4} \mathrm{s}^{-1}].$$

Rozšiřme nyní vztah (16) veličinou S, která značí průřez trubice. Pak

$$pS = F = R_a S \cdot Sv \qquad \text{neboli}$$

(17) $$F = R_a S^2 v.$$

Pro mechanický odpor R_m tlumícího prostředí však platí při kmitavém pohybu známý vztah

(18) $$F = R_m v.$$

Porovnáním rovnic (17) a (18) dostáváme

(19) $$R_a = \frac{R_m}{S^2}.$$

Je to vztah formálně podobný vztahu (3) mezi akustickou a mechanickou hmotností.

Z rovnice (16) můžeme vypočítat hodnotu R_a, známe-li vztah mezi p_{ef} a v_{ef} v rovinné vlně, tj. $p_{ef} = c\varrho \cdot v_{ef}$. Potom

$$R_a = \frac{p}{U} = \frac{p}{Sv} = \frac{1}{S}\frac{p_{ef}}{v_{ef}} \qquad \text{čili}$$

(20) $$R_a = \frac{c\varrho}{S},$$

4. Diferenciální rovnice pro mechanické nucené kmity a pro kmity akustické

Z mechaniky je známo, že při nucených kmitech je celková síla $m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}$ složena ze síly pružnosti $F_1 = -K_m \cdot \xi = -\frac{1}{C_m} \cdot \xi$, z tlumící síly $F_2 = -R_m \cdot \frac{d\xi}{dt}$ a z vnější periodicky proměnné síly F, takže

$$m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{1}{C_m} \cdot \xi - R_m \cdot \frac{d\xi}{dt} + F, \qquad \text{čili}$$

(21) $$m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} + R_m \frac{d\xi}{dt} + \frac{\xi}{C_m} = F$$

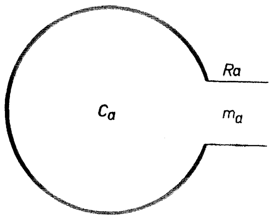
Pro akustické kmity např. u Helmholtzova rezonátoru (obr. 3) o akustické hmotnosti v hrdle rezonátoru m_a, akustickém odporu R_a v objemu hrdla $V_1 = S\xi$ a akustické poddajnosti C_a dutiny lze psát podobně vzhledem k rovnicím (2) a (5)

$$m_a \cdot \frac{dU}{dt} = -R_a U - \frac{1}{C_a} V_1 + p,$$

je-li p vnější akustický tlak, vyvolávající nucené kmity v rezonátoru. Po malé úpravě, poněvadž $U = Sv = S \cdot \frac{d\xi}{dt}$ a $\frac{dU}{dt} = S \frac{d^2\xi}{dt^2}$, můžeme přepsat předcházející rovnici v tvaru

(22) $$m_a \frac{d^2\xi}{dt^2} + R_a \frac{d\xi}{dt} + \frac{\xi}{C_a} = \frac{p}{S},$$

což je analogická rovnice ke vztahu (21).



Obr. 3

5. Výpočet rezonanční frekvence rezonátoru s kruhovým otvorem

Pro rezonanční frekvenci kmitajícího systému plyne z rovnice (21), pokud útlum systému je velmi malý, vztah

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_m}{m}},$$

kde K_m je tuhost materiálu a m hmotnost kmitající soustavy. Vzhledem k tomu, že $K_m = \frac{1}{C_m}$, je

(23) $$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{C_m m}}.$$

Jde-li o Helmholtzův rezonátor, dosadíme za C_m a m z rovnic (3) a (1) a po malé úpravě dostáváme

(24) $$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{C_a m_a}}$$

Tutéž rovnici můžeme dostat za předpokladu malého útlumu přímo ze vztahu (22). Pro akustickou frekvenci dutiny o objemu V a s otvorem o poloměru r vychází z poslední rovnice, použijeme-li vztahů (5) a (15),

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 \varrho}{V} \cdot \frac{2r}{\varrho}} \quad \text{neboli}$$

(25) $$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{2r}{V}}.$$

To je známý vztah pro vlastní frekvenci kulového Helmholtzova rezonátoru nebo válcového rezonátoru Königova s daným otvorem o poloměru r a o daném objemu V dutiny. Veličina c je rychlost zvuku ve vzduchu za dané absolutní teploty T, tj. $c = c_0 \cdot \frac{T}{T_0}$, kde $T_0 = 273{,}15°$ C a $c_0 = 331{,}6$ m . s^{-1}.

B. Elektrické a akustické analogie

1. Magnetická a akustická indukčnost

V obvodu střídavého elektrického napětí $u = u_0 \sin \omega t$ (obr. 4), kde protéká indukčností L proud $i = i_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, platí, že

$$u = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

Zvolíme-li akustický tlak $p = p_0 \sin \omega t$ jako analogickou veličinu k elektrickému napětí u a necháme působit tento tlak na plyn hustoty ϱ v trubici délky l a průřezu S (viz obr. 1), tu uvádí působení tlakové síly plyn v trubici do pohybu s objemovým zrychlením $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$, kde $U = Sv$ je objemová rychlost plynu v trubici. Omezíme se opět na prostor, jehož rozměry jsou malé proti vlnové délce λ. Lze pak analogicky psát

$$p = L_a \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}, \tag{27}$$

kde $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Sv)}{\mathrm{d}t} = S \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = S \cdot \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}$.

Poněvadž podle 2. pohybového zákona $F = ma$, neboli v našem případě

$$pS = Sl\varrho \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{a tedy}$$

$$pS = l\varrho \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \quad \text{čili}$$

$$p = \frac{l\varrho}{S} \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}, \tag{28}$$

plyne z porovnání vztahů (27) a (28), že akustická indukčnost

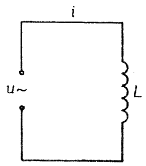
$$L_a = \frac{l\varrho}{S}. \tag{29}$$

Vzhledem k tomu, že pro pohyb plynu v otevřené trubici délky l a poloměru r je třeba délku zvětšit o Rayleighovu korekci $\frac{1}{2}\pi r$, je

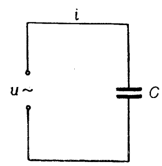
$$L_a = \frac{\left(l + \frac{1}{2}\pi r\right)\varrho}{S}. \tag{30}$$

Pro trubici válcového tvaru je $S = \pi r^2$ a tedy

$$L_a = \frac{\left(l + \frac{1}{2}\pi r\right)\varrho}{\pi r^2}.$$



Obr. 4



Obr. 5

Zmenšuje-li se délka l trubice k nule, je akustická indukčnost L_a kruhového otvoru

(31) $$L_a = \frac{\varrho}{2r}.$$

2. Elektrická a akustická kapacita

Pro elektrický obvod o kapacitě C platí známý vztah (obr.5)

(32) $$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{C}i.$$

Analogický vztah pro akustický obvod (obr. 2) lze psát ve tvaru

(33) $$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{C_a}U,$$

kde p je akustický tlak, U objemová rychlost plynu, jenž byl proměnnou akustickou tlakovou silou uveden v pohyb, a konstanta C_a představuje tzv. akustickou kapacitu obvodu.

Z nauky o pružnosti je známo, že relativní změna objemu tekutiny $\frac{dV}{V}$, je úměrná změně tlaku, tedy

(34) $$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{C'}dp.$$

kde C' je modul objemové pružnosti uvažovaného tekutého prostředí. Poslední rovnici lze přepsat na tvar

$$dp = -\frac{C'}{V}dV.$$

Ale $dV = Sv \,.\, dt = U \,.\, dt$, takže

(35) $$\frac{dp}{dt} = -\frac{C'}{V}U.$$

V nauce o vlnění se odvozuje vztah pro rychlost c postupné podélné vlny v tekutém prostředí

(36) $$c = \sqrt{\frac{C'}{\varrho}} \quad \text{neboli} \quad C' = c^2\varrho \,.$$

Po dosazení posledního vztahu do (35) je konečně

(37) $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{c^2\varrho}{V}\,U \,.$$

Porovnáme-li rovnice (32) a (37), dostáváme pro akustickou kapacitu dutiny o objemu V, vyplněné tekutým prostředím hustoty ϱ, vztah

(38) $$C_\mathrm{a} = \frac{V}{c^2\varrho} \,.$$

3. Elektrický a akustický odpor. Reaktance

Elektrický odpor R vodiče je konstantou ve známém Ohmově zákoně, vyjadřujícím závislost mezi elektrickým napětím u a proudem i, kde u, i nechť jsou periodicky proměnné veličiny,

(39) $$u = R \,.\, i \,.$$

Podobný vztah platí i v akustice, nahradíme-li napětí u ekvivalentní akustickou veličinou p a proud i objemovou rychlostí U, tj.

(40) $$p = R_\mathrm{a} \,.\, U \,,$$

kde R_a je akustický odpor, vyjádřený rovnicí (20), odvozenou již dříve na jiném (mechanickém) základě.

V akustice lze zavést i užitečný pojem akustické indukční reaktance $L_\mathrm{a}\omega$ analogicky k elektrické indukční reaktanci $L\omega$ a také pojem akustické kapacitní reaktance $\frac{1}{C_\mathrm{a}\omega}$, odpovídající elektrické kapacitní reaktanci $\frac{1}{C\omega}$.

4. Diferenciální rovnice pro elektromagnetický a akustický kmitavý obvod

U nucených elektromagnetických kmitů se vloženým střídavým napětím u a se zařazenou indukčností L, kapacitou C a činným odporem R lze při použití 2. Kirchhoffova zákona psát, že

$$R \,.\, i = u - L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{C}\int i \,.\, \mathrm{d}t \,.$$

Derivujeme-li tuto rovnici a upravíme, vychází pro proud i v kmitavém obvodu diferenciální rovnice

(41) $$L \cdot \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,i = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \,.$$

Pro rezonanční kmitočet v obvodu při malém útlumu vychází odtud známý Thomsonův vztah

(42) $$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \,.$$

Pro akustický kmitavý obvod můžeme formulovat obdobnou rovnici vzhledem ke vztahům (40), (27) a (33)

$$R_a U = p - L_a \frac{dU}{dt} - \frac{1}{C_a} \int U \, dt \,.$$

Když píšeme $U = Sv = S \frac{d\xi}{dt}$, zderivujeme znovu poslední rovnici a zkrátíme S, vychází

$$L_a \frac{d^2\xi}{dt^2} + R_a \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{C_a} \xi = \frac{1}{S} \cdot \frac{dp}{dt} \tag{43}$$

a odtud pro rezonanční frekvenci f při malém útlumu plyne

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_a C_a}} \,. \tag{44}$$

5. Výpočet frekvence rezonátoru s kruhovým otvorem.

Jde-li o Helmholtzův nebo Königův rezonátor s dutinou objemu V a s kruhovým otvorem o poloměru r, je frekvence rezonátoru s přihlédnutím ke vztahům (29), (38) a (44)

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{\varrho}{2r} \cdot \frac{V}{c^2 \varrho}}} \qquad \text{čili}$$

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{2r}{V}} \,, \tag{45}$$

což je vztah shodný s rovnicí (25).

V této stati uvedená analogie mezi elektrickými a akustickými veličinami není jediná možná. V odborné akustické literatuře se setkáváme i s jinými analogiemi, z nichž každá je velmi užitečná v teorii elektroakustických měničů i v teorii akustických dolnopropustných, hornopropustných a pásmových filtrů. Informace zde podaná o mechanicko-akustických a akusticko-elektrických analogiích chce být jenom prvním informativním vstupem do oblasti, která jistě není bez zajímavosti pro fyzika, zamýšlejícího se nad užitečností mechanicko-akustických a akusticko-elektrických analogických vztahů.

Katedra fyziky pedagogické fakulty v Plzni

LITERATURA

[1] *Klimeš, B. — Pachner, J. — Říman, E. — Sedláček, K. — Tichý, J.:* Základy fyziky I. NČSAV Praha, 1961.
[2] *Merhaut, J. a kol.:* Příručka elektroakustiky. Praha, 1964.
[3] *Lord Rayleigh:* The Theory of Sound (ruský překlad) GITTL Moskva, 1955.
[4] *Stewart G. W. - Lindsay, R. B.:* Acoustics (něm. překlad). Berlín.
[5] *Reichardt, W.:* Grundlagen der Elektroakustik. Leipzig, 1952.

SHRNUTÍ

NĚKTERÉ AKUSTICKÉ ANALOGIE MECHANICKÝCH A ELEKTRICKÝCH VELIČIN A VZTAHŮ

ANTONÍN ŠPELDA

V článku je uvedeno několik akustických analogií s odpovídajícími mechanickými nebo elektrickými veličinami a vztahy jako vhodná součást výuky akustice na universitních fakultách přírodovědeckého směru. Analogie poskytují zajímavý dílčí pohled na vzájemné souvislosti mezi různými obory fyziky.

ZUSAMMENFASSUNG

EINIGE AKUSTISCHE ANALOGIEN DER MECHANISCHEN UND ELEKTRISCHEN GRÖSSEN UND BEZIEHUNGEN

ANTONÍN ŠPELDA

Im vorliegenden Artikel werden einige akustische Analogien mit den entsprechenden mechanischen oder elektrischen Grössen und Beziehungen angeführt als ein passender Bestandteil des Unterrichts in der Akustik an den Universitätsfakultäten naturwissenschaftlicher Richtung. Die Analogien bieten einen interessanten Teilblick auf einige wechselseitige Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fächern der Physik.