František Machala

O množině středů křivek konstantní křivosti hyperbolické roviny, které se dotýkají dané křivky konstantní křivosti a přímky

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 11 (1971), No. 1, 73--88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119966`

1971 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 33

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

O MNOŽINĚ STŘEDŮ KŘIVEK KONSTANTNÍ KŘIVOSTI HYPERBOLICKÉ ROVINY, KTERÉ SE DOTÝKAJÍ DANÉ KŘIVKY KONSTANTNÍ KŘIVOSTI A PŘÍMKY

FRANTIŠEK MACHALA

(Předloženo 22. 5. 1969)

I

V reálné rozšířené eukleidovské rovině uvažujme Beltrami-Kleinův model hyperbolické roviny o absolutní kružnici k. Definice pojmů H-bodu, ideálního H-bodu, absolutního H-bodu, křivky konstantní křivosti a H-kuželosečky, kterých budeme v dalším používat, jsou uvedeny v lit. [3].

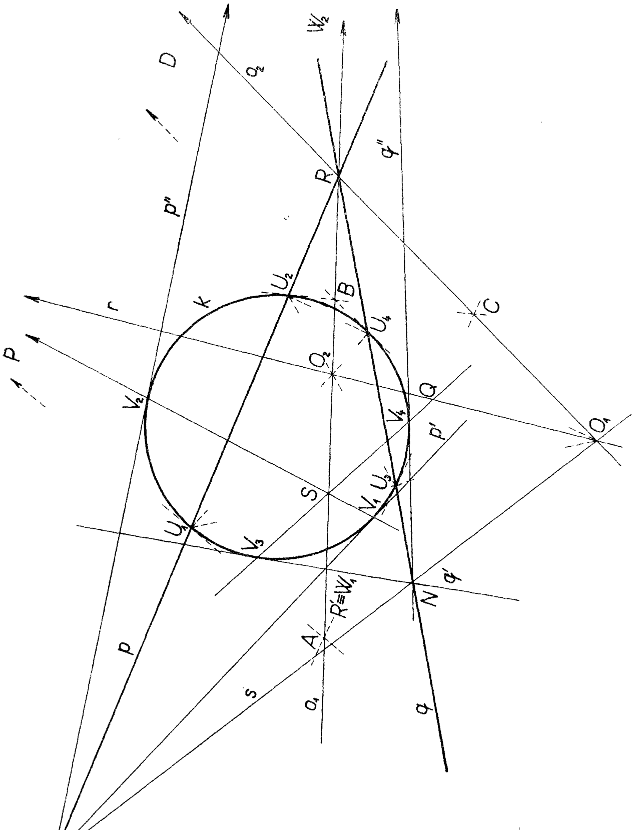
Každou sečnu p absolutní kružnice k budeme nazývat H-přímkou. Mějme dán bod S, jeho poláru s vzhledem k absolutní kružnici k a H-přímku p, $p \neq s$, $S \notin p$, která protíná přímku s v ideálním H-bodě. Pak existuje jediná křivka Φ konstantní křivosti o H-středu S, která se dotýká přímky p. Tuto křivku označíme $\Phi(S, p)$. Jestliže H-přímka p neprotíná přímku s v ideálním H-bodě, pak neexistuje křivka Φ o H-středu S, která se dotýká přímky p.

Mějme dány dvě různé H-přímky p, q, které protínají absolutní kružnici k v bodech U_1, U_2, U_3, U_4 (obr. 1). Průsečík R přímek p, q je diagonálním bodem čtyřrohu $U_1U_2U_3U_4$, jehož další diagonální body označme O_1, O_2. Přímky $o_1 \equiv RO_2$, $o_2 \equiv RO_1$, $r \equiv O_1O_2$ jsou diagonály tohoto čtyřrohu. Tečny v bodech U_1, U_3 a U_2, U_4 resp. U_2, U_3 a U_1, U_4 k absolutní kružnici k se protínají v bodech A, B resp. C, D na přímce o_1 resp. o_2. Body A, B resp. C, D rozdělují přímku o_1 resp. o_2 na dvě části AB, $A \infty B$ resp. CD, $C \infty D$.

(1) a) Předpokládejme, že bod R není absolutní H-bod. Všechny body právě jedné části AB, $A \infty B$ resp. CD, $C \infty D$ mají tu vlastnost, že jejich poláry protínají přímky p, q současně v ideálních H-bodech. Tuto část označíme $\overline{AB}$ resp. $\overline{CD}$.

b) jestliže je bod R absolutním H-bodem, pak je možno volit označení tak, že body A, B určují na přímce o_1 dvě části, z nichž jednu označíme $\overline{AB}$ stejně jako v případě a. Přímka o_2 je pak tečna absolutní kružnice k v bodě R a proto část $\overline{CD}$ na přímce o_2 neexistuje.

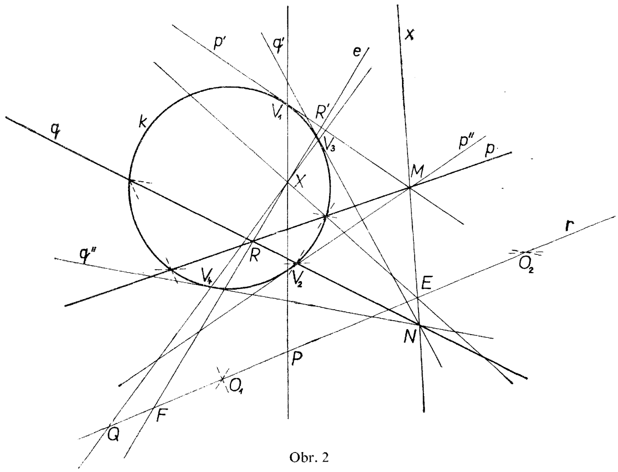
Označme P, Q póly přímek p, q, zvolme libovolný bod $S \neq R$ části $\overline{AB}$ přímky o_1 a jeho poláru označme s. Protože $S \in \overline{AB}$, jsou průsečíky M, N přímek p, q s přímkou s


M
p
s
a_1
q
A
$R' \equiv W_1$
N
q'
U_1
V_3
S
V_1
U_3
p'
V_4
Q
O_1
V_2
k
O_2
U_4
C
r
U_2
B
P
R
q''
p''
D
a_2
W_2

Obr. 1

ideální H-body. Proto poláry SP, PQ bodů M, N protínají absolutní kružnici k v bodech V_1, V_2, V_3, V_4. Přímky o_1, O_1S jsou diagonály úplného čtyřrohu $V_1V_2V_3V_4$, neboť z vlastností úplného čtyřrohu $U_1U_2U_3U_4$ plyne $(p, q, o_1, o_2) = -1$ a z toho $[PQO_1O_2]$[1]). Pak také $(SP, SQ, SO_1, SO_2) = -1$, přičemž přímky SO_1, $SO_2 \equiv o_1$ jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní kružnici k. Tečny p', q' resp. p'', q'' sestrojené v bodech V_1, V_3 resp. V_2, V_4 absolutní kružnice k se proto protínají v bodě W_1 resp. W_2 přímky o_1. Přitom přímky p', p'' resp. q', q'' procházejí bodem M resp. N.

Věta 1. Množinou H-středů křivek konstantní křivosti, které se dotýkají H-přímek p, q jsou části $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ přímek o_1, o_2.



Obr. 2

Důkaz: 1. Zvolme si libovolný bod $S \neq R$ části $\overline{AB}$. Dokážeme, že křivka $\Phi(S, p)$ se dotýká přímky q, t. zn., že je křivkou Φ^*.[2]) V perspektivní kolineaci $\psi(S, s, p \to p')$ odpovídá křivce $\Phi(S, p)$ absolutní kružnice k. Bodu R odpovídá v této kolineaci bod $R' \equiv o_1 . p'$. To podle předchozího znamená, že $R' \equiv W_1$ a $\psi(q) = q'$. Protože je přímka q' tečna absolutní kružnice k, je přímka q tečna křivky $\Phi(S, p)$ a tato je křivkou Φ^*. Stejně ukážeme, že každý bod $W \neq S$ části $\overline{CD}$ je H-středem křivky Φ^*.

[1]) Viz úmluvu 1 v lit. [3].

[2]) Každou křivku konstantní křivosti, vyhovující podmínkám věty, označíme Φ^*.

Jestliže je bod R H-bodem, pak $R \in \overline{AB}$, $R \in \overline{CD}$ a křivka Φ^* o H-středu R je dvojnásobným bodem. V ostatních případech $R \notin \overline{AB}$, $R \notin \overline{CD}$.

2. Dokážeme, že neexistuje další H-střed křivky Φ^*. Zvolme libovolný bod X, který neleží na přímkách o_1, o_2, r. Jestliže polára bodu X neprotíná obě přímky p, q v ideálních H-bodech, pak zřejmě neexistuje křivka Φ^* o H-středu X. Předpokládejme tedy, že polára x bodu X protíná obě přímky p, q v ideálních H-bodech (obr. 2). Pak polára bodu M resp. N protíná absolutní kružnici k v bodech V_1, V_2 resp. V_3, V_4. Dokážeme nejdříve, že přímky $e \equiv RX$, EX, kde E je pól přímky e, nejsou diagonály úplného čtyřrohu $V_1V_2V_3V_4$. Body E, $F \equiv e \,.\, r$ náležejí involuci sdružených pólů na přímce r. K této involuci náleží i dvojice O_1, O_2. V části 1 důkazu je ukázáno, že $(PQO_1O_2) = -1$. Proto nemůže být $(PQEF) = -1$, neboť pak by body P, Q byly samodružné body uvažované involuce, což není možné. Platí tedy také $(PX, QX, e, EX) \neq -1$ a přímky e, EX nemohou být diagonálami úplného čtyřrohu $V_1V_2V_3V_4$. To znamená, že tečny p', p'', q', q'' ke kružnici k v bodech V_1, V_2, V_3, V_4 se neprotínají na žádné z přímek e, EX. Uvažujme nyní křivku $\Phi(X, p)$ a kolineaci $\psi(X, x, p \to p')$. Pak $\psi(R) = R'$, kde $R' \equiv p' \,.\, e$, čili $R' \notin q'$, $R' \notin q''$. Přímce q odpovídá v kolineaci ψ přímka NR různá od přímek q', q''. Proto není přímka q tečnou křivky $\Phi(X, p)$ a tato křivka není křivkou Φ^*. Snadno se přesvědčíme, že také na přímkách o_1, o_2, r neleží mimo části $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ žádný další H-střed křivky Φ^*.

II

Mějme dánu regulární křivku Φ konstantní křivosti o H-středu S, která je obrazem absolutní kružnice k v perspektivní kolineaci ψ. Zvolme dva různé body N', G' absolutní kružnice k a sestrojme body $N = \psi(N')$, $G = \psi(G')$ křivky Φ. Pak se přímky NG, $N'G'$ protínají v bodě R poláry s bodu S (obr. 3). Označme t_N, t_G tečny křivky Φ v bodech N, G a N^+, G^+ jejich póly vzhledem k absolutní kružnici k. Uvažujme dále involutorní kolineaci β o středu R a ose r, kde r je polára bodu R. V této kolineaci je kružnice k invariantní a proto $\beta(N') = G'$, $\beta(SN') = SG'$. Z toho pak $\beta(N) = G$ a $\beta(t_N) = t_G$, čili také $\beta(N^+) = G^+$.

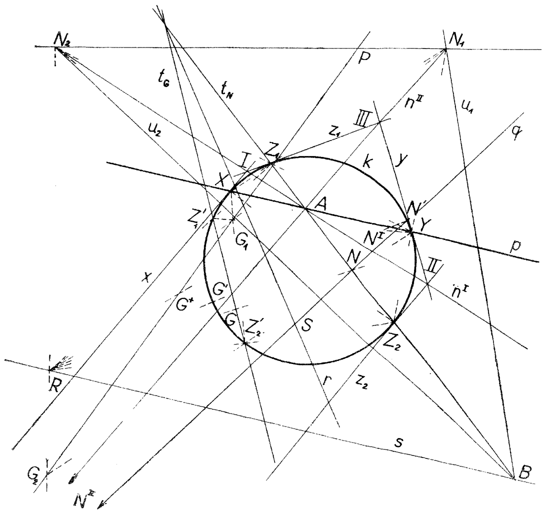
(2) Přímka N^+G^+ prochází bodem R.

(3) Označme Z_1, Z_2 resp. Z_1', Z_2' průsečíky přímky t_N resp. t_G s absolutní kružnicí k tak, že $\beta(Z_1) = Z_1'$, $\beta(Z_2) = Z_2'$. Pak přímky Z_1Z_1', Z_2Z_2' procházejí bodem R.

Zvolme dále H-přímku p, která protíná absolutní kružnici k v bodech X, Y a její pól označme P. Sestrojme na přímce PN^+ resp. PG^+ body N_1, N_2 resp. G_1, G_2 takové, že platí $[PN^+N_1N_2]$ resp. $[PG^+G_1G_2]$. Tyto body jsou diagonální body čtyřrohu XYZ_1Z_2 resp. $XYZ_1'Z_2'$. Označení můžeme volit tak, že $N_1 \equiv XZ_1 \,.\, YZ_2$, $N_2 \equiv XZ_2 \,.\, YZ_1$, $G_1 \equiv XZ_2' \,.\, YZ_1'$, $G_2 \equiv XZ_1' \,.\, YZ_2'$.

(4) Jestliže uvažujeme šestiúhelník $Z_1Z_1'YZ_2Z_2'X$ resp. $Z_1Z_1'XZ_2Z_2'Y$ vepsaný kružnici k, pak body R, N_1, G_1 resp. R, N_2, G_2 leží na příslušné Pascalově přímce.

Věta 2. Nechť je dána regulární křivka Φ konstantní křivosti a H-přímka p, jejíž pól je P. Označme k^+ kuželosečku, která odpovídá křivce Φ v polaritě indukované absolutní kružnicí k. Množinou bodů G_1, G_2, pro které platí $[PG^+G_1G_2]$, kde $G^+ \in k^+$, jsou dvě kuželosečky k_1, k_2, perspektivně kolineární s křivkou Φ o ose s kolineace.

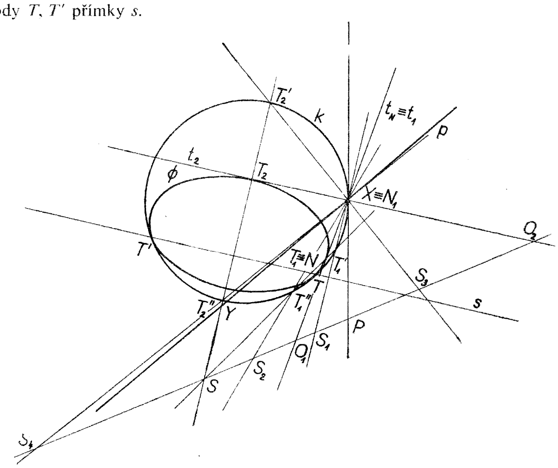


Obr. 3

Důkaz: Zvolme obecný bod $N^+ \in k^+$, sestrojme body N_1, N_2, pro které $[PN^+N_1N_2]$ a uvažujme perspektivní kolineace $\varkappa_1(P, s, N^+ \to N_1)$, $\varkappa_2(P, s, N^+ \to N_2)$ (obr. 3). Zvolme další bod $G^+ \in k^+$ a sestrojme body G_1, G_2 vlastnosti $[PG^+G_1G_2]$. Při vhodném označení se podle (2), (4) přímky N_1G_1, N^+G^+ resp. N_2G_2, N^+G^+ protínají v bodě R na přímce s. Pak $G_1 = \varkappa_1(G^+)$, $G_2 = \varkappa_2(G^+)$. Množina bodů G_1 resp. G_2 je kuželosečka $k_1 = \varkappa_1(k^+)$ resp. $k_2 = \varkappa_2(k^+)$. Kuželosečka k^+ odpovídá křivce Φ v kolineaci $\gamma(S, s, N \to N^+)$ a proto $k_1 = \varkappa_1\gamma(\Phi) = \mu_1(\Phi)$, $k_2 = \varkappa_2\gamma(\Phi) = \mu_2(\Phi)$. Protože jsou kolineace γ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ perspektivní o ose s, jsou také kolineace μ_1, μ_2 perspektivní o ose s. Tím je důkaz ukončen.

(5) Předpokládejme, že přímka PS je H-přímka a označme N jeden z průsečíků této přímky s křivkou Φ. Pak $N^+ \in PS$ a protože platí $[PN^+N_1N_2]$, je jeden z bodů N_1, N_2 H-bod a druhý ideální H-bod.

Protože kolineace μ_1 resp. μ_2 je složením kolineací γ, $\varkappa_1$ resp. γ, $\varkappa_2$ o středech S, P, leží středy O_1, O_2 těchto kolineací na přímce PS. Předpokládejme, že tečna t_N křivky Φ v jistém bodě N prochází absolutním H-bodem X přímky p (obr. 4). Pak $N^+ \in PX$ a jestliže sestrojíme body N_1, N_2 takové, že $[PN^+N_1N_2]$, je jeden z nich, třeba N_1, totožný s bodem X. Platí $\mu_1(N) = X$. Jestliže označíme t_1 tečnu kuželosečky k_1 v bodě X, pak $t_N \equiv t_1$, přímka t_N je v kolineaci μ_1 samodružná a prochází jejím středem O_1. Stejnou úvahu můžeme provést pro druhou tečnu vedenou bodem X ke křivce Φ. Středy O_1, O_2 kolineací μ_1, μ_2 jsou průsečíky přímky PS s tečnami t_1, t_2, vedenými z bodu X ke křivce Φ. Jestliže označíme T_1, T_2 body dotyku tečen t_1, t_2, pak $\mu_1(O_1, s, T_1 \to X)$, $\mu_2(O_2, s, T_2 \to X)$. Kuželosečky k_1, k_2 tedy procházejí absolutními H-body přímky p. Současně však procházejí absolutními H-body T, T' přímky s.



Obr. 4

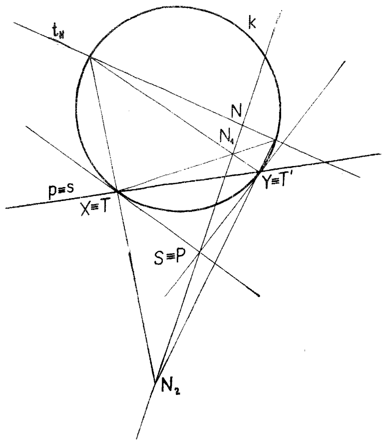
(6) Body X, Y, T, T' a jen tyto body jsou průsečíky kuželoseček k_1, k_2 s absolutní kružnicí k.

Označme ψ_1, ψ_2 perspektivní kolineace o středu S a ose s, ve kterých absolutní kružnici k odpovídá křivka Φ. Pak $k_1 = \mu_1\psi_1(k) = \delta_1(k)$, $k_1 = \mu_1\psi_2(k) = \delta_2(k)$, $k_2 = \mu_2\psi_1(k) = \delta_3(k)$, $k_2 = \mu_2\psi_2(k) = \delta_4(k)$. Středy S_1, S_2, S_3, S_4 kolineací δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 leží opět na přímce PS. Na obr. 4 jsou sestrojeny body T_1', T_1'', T_2', T_2'', pro které platí $X = \delta_1(T_1')$, $X = \delta_2(T_1'')$, $X = \delta_3(T_2')$, $X = \delta_4(T_2'')$. Pak $S_1 \equiv XT_1' \,.\, PS$, $S_2 \equiv XT_1'' \,.\, PS$, $S_3 \equiv XT_2' \,.\, PS$, $S_4 \equiv XT_2'' \,.\, PS$.

(7) Tečny vedené z bodů S_1, S_2 resp. S_3, S_4 k absolutní kružnici k a jen tyto přímky, jsou společné tečny kuželoseček k, k_1 resp. k, k_2.

Předpokládejme, že přímka p není tečnou křivky Φ.

a) Nechť $p \neq s$. Označení můžeme volit tak, že $X \neq T, T'$. Pak jsou body O_1, X, T_1 resp. O_2, X, T_2 navzájem různé a body X, T_1, T_2 neleží na ose s. Kolineace $\mu_1(O_1, s, T_1 \to X)$, $\mu_2(O_2, s, T_2 \to X)$ jsou regulární a kuželosečky k_1, k_2 jsou také regulární.



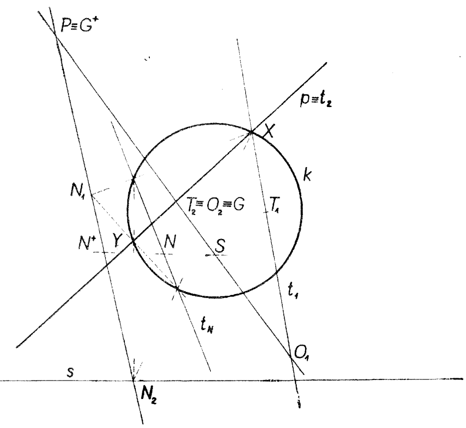
Obr. 5

b) Nechť $p \equiv s$. Pak $S \equiv P$, O_1, O_2. Sestrojme obecný bod N_1 resp. N_2 kuželosečky k_1 resp. k_2 (obr. 5). Pak N_1, $N_2 \notin s$, N_1, $N_2 \neq S$ a kolineace $\mu_1(S, s, N \to N_1)$, $\mu_2(S, s, \to N_2)$ jsou regulární a kuželosečky k_1, k_2 jsou také regulární.

Předpokládejme, že přímka p je tečnou křivky Φ, čili např. $t_2 \equiv p$. Veďme bodem X druhou tečnu t_1 ke křivce Φ. Pak kolineace $\mu_1(O_1, s, T_1 \to X)$ je regulární (obr. 6). Kolineace $\mu_2(O_2, s, T_2 \to X)$ je singulární, neboť $T_2 \equiv O_2$. Zvolme libovolný bod $N \neq T_2$ křivky Φ a sestrojme k němu příslušné body N_1, N_2 kuželoseček k_1, k_2, t. zn. body, pro které platí $[PN^+N_1N_2]$. Pak podle (3) platí že $N_2 \in s$. Přímka s náleží kuželosečce k_2. Jestliže zvolíme $T_2 \equiv G$, pak $P \equiv G^+$ a podle úmluvy 1 z lit. [3] náleží přímka p kuželosečce k_2. Kuželosečka k_2 je složená z přímek p, s.

Všimněme si nyní podrobněji kuželoseček k_1, k_2 v závislosti na druhu křivky Φ a vzájemné poloze křivky Φ a přímky p. Budeme zkoumat především ty vlastnosti kuželoseček k_1, k_2, které budeme potřebovat v části III.

1. Předpokládejme, že křivka Φ je H-kružnice a nechť přímka p není její tečnou. Pak je každá z kuželoseček k_1, k_2 regulární a protíná podle (6) absolutní kružnici k v bodech X, Y a jen v těchto bodech. Z konstrukce středů S_1, S_2, S_3, S_4 kolineací δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 plyne, že křivky k, k_1 resp. k, k_2 se v bodech X, Y nedotýkají. Existují proto právě dvě různé společné tečny kuželoseček k, k_1 resp. k, k_2. Jestliže je přímka p tečnou křivky Φ, pak má kuželosečka k_1 popsané vlastnosti a kuželosečka k_2 je složená z přímek p, s.



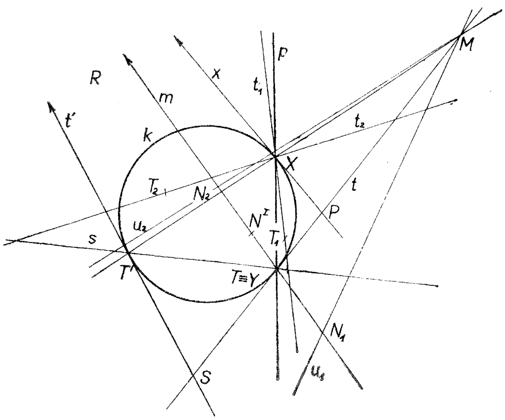
Obr. 6

2. Předpokládejme, že křivka Φ je H-ekvidistanta o H-středu S. Každá z kuželoseček k_1, k_2 protíná absolutní kružnici k v bodech X, Y, T, T', které ovšem nemusí být vždy navzájem různé. Zvolme absolutní H-bod $X \neq T$, T' a veďme jím tečny t_1, t_2 ke křivce Φ, jejich body dotyku označme T_1, T_2 (obr. 4). Průsečíky přímky ST_1 resp. ST_2 s absolutní kružnicí k označme T_1', T_1'' resp. T_2', T_2''. Každá přímka různá od SX obsahující bod S a procházející vnitřkem úhlu $\sphericalangle\, T_1ST_2$, protíná přímky XT_1', XT_1'' v H-bodech a přímky XT_2', XT_2'' v ideálních H-bodech nebo obráceně. Každá přímka procházející bodem S a neobsahující bod úhlu $\sphericalangle\, T_1ST_2$, protíná přímky XT_1', XT_1'', XT_2', XT_2'' v ideálních H-bodech.

a) Nechť přímka p nemá s křivkou Φ žádný bod společný. Pak její H-body jsou různé od bodů T, T'. Jeden z nich označíme X. Přímka PS prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle\, T_1ST_2$. Podle (7) jsou její průsečíky s přímkami XT_1', XT_1'', XT_2', XT_2'' středy S_1,

S_2, S_3, S_4 kolineací δ_1, δ_2, δ_3, δ_4. Označení můžeme volit tak, že S_1, S_2 jsou H-body a S_3, S_4 jsou ideální H-body. Neexistují žádné společné tečny kuželoseček k, k_1 a existují čtyři společné tečny kuželoseček k, k_2.

b) Nechť je přímka p sečna křivky Φ, neprocházející absolutním H-bodem křivky Φ. Pak přímka PS protíná přímky XT_1', XT_1'', XT_2', XT_2'' v ideálních H-bodech. Existují čtyři různé tečny kuželoseček k, k_1 resp. k, k_2.



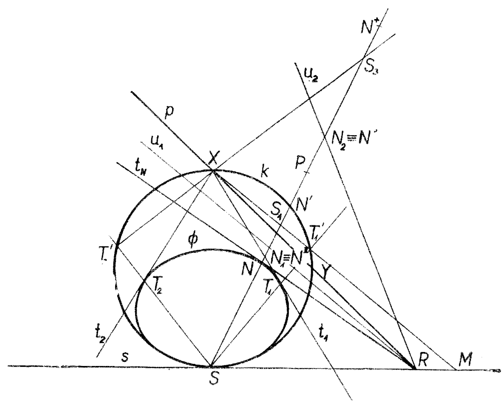
Obr. 7

c) Nechť přímka p prochází právě jedním absolutním H-bodem křivky Φ, např. bodem T. Pak $SP \equiv ST \equiv t$. Kuželosečky k, k_1 resp. k, k_2 se v bodě $T \equiv Y$ dotýkají. Podle předchozího jsou středy kolineací δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 ideální H-body. Existují právě tři společné tečny kuželoseček k, k_1 resp. k, k_2, neboť $S_1T \equiv S_2T \equiv t$ resp. $S_3T \equiv$ $\equiv S_4T \equiv t$. Kuželosečka k_1 resp. k_2 je určena tečnou t s bodem dotyku T, tečnou $t_1 \equiv XT_1$ s bodem dotyku X a bodem T' resp. tečnou t s bodem dotyku T, tečnou $t_2 \equiv XT_2$ s bodem dotyku X a bodem T' (obr. 7). Přitom přímka TX prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle T_1XT_2$. Pak na oblouku $\widehat{T'TX}$ jedné z kuželoseček, např. k_1, neleží ideální H-body a na oblouku $\widehat{T'TX}$ druhé kuželosečky k_2 neleží absolutní H-body. Proto každá přímka procházející bodem T vnitřkem úhlu $\sphericalangle T'TX$ protíná kuželosečku k_1 resp. k_2 v ideálním H-bodě resp. v H-bodě. Označme $M \equiv T'X \, . \, t$. Polára m bodu M k absolutní kružnici k je současně polárou kuželoseček k_1, k_2. Přímka m prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle T'TX$. Protíná tedy kuželosečku k_1 kromě bodu S v ideálním H-bodě N_1 a kuželosečku k_2 v H-bodě N_2. Tečna $u_1 \equiv N_1M$ resp. $u_2 \equiv N_2M$ v bodě N_1 resp. N_2 kuželosečky k_1 resp. k_2 nemá s absolutní kružnicí k společný bod resp. je sečnou absolutní kružnice k.

d) Nechť je $p \equiv s$. Pak $X \equiv T$, $Y \equiv T'$ a kuželosečky k_1, k_2 se dotýkají absolutní kružnice k v bodech T, T'. Kuželosečka k_1 je H-ekvidistanta, kuželosečka k_2 neobsahuje H-body a žádná její tečna není H-přímka (obr. 5).

e) Nechť je přímka p tečna křivky Φ. Pak existují čtyři různé společné tečny kuželoseček k, k_1. Kuželosečka k_2 je složena z přímek p, s.

3. Předpokládejme, že křivka Φ je H-horocykl. Každá z kuželoseček k_1, k_2 protíná absolutní kružnici k v bodech X, Y a dotýká se jí v bodě S. Zvolme absolutní H-bod $X \neq S$, veďme jím tečny t_1, t_2 ke křivce Φ a jejich body dotyku označme T_1, T_2 (obr. 8). Průsečíky přímek ST_1, ST_2 s absolutní kružnicí k označme T_1', $T_1'' \equiv$



Obr. 8

$\equiv S$, T_2', $T_2'' \equiv S$. Pak $S_2 \equiv S_4 \equiv S$ a $S_1 \equiv XT_1'.SP$, $S_3 \equiv XT_2'.SP$. Každá přímka různá od SX, procházející bodem S vnitřkem úhlu $\sphericalangle\ T_1ST_2$, protíná jednu z přímek XT_1', XT_2' v H-bodě a druhou v ideálním H-bodě. Přímky, procházející bodem S vně úhlu $\sphericalangle\ T_1ST_2$, protínají přímky XT_1', XT_2' ve dvou ideálních H-bodech.

a) Nechť přímka p nemá s křivkou Φ společný bod. Pak přímka PS prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle\ T_1ST_2$ a jeden z bodů S_1, S_3, na př. S_1, je H-bodem a druhý je ideálním H-bodem (obr. 8). Existuje jediná společná tečna s křivek k, k_1 a tři společné tečny křivek k, k_2. Označme $N \neq S$ průsečík přímky PS s křivkou Φ. Pak bod $N^+ = \gamma(N)$ leží na přímce PS a podle (5) je jeden z bodů $N_1 = \varkappa_1(N^+)$, $N_2 =$

$= \varkappa_2(N^+)$ H-bodem a druhý je ideálním H-bodem. Protože je bod S_1 vnitřním bodem úsečky XT_1', oddělují se dvojice bodů X, T_1' a S_1, M, kde $M \equiv XT_1' . s$. Z kolineace δ_1 plyne, že se oddělují také dvojice N_1, N' a S_1, S, kde $N' \neq S$ je průsečík přímky PS s absolutní kružnicí k. Tečna $u_1 \equiv RN_1$ resp. $u_2 \equiv RN_2$ kuželosečky k_1 resp. k_2 v bodě N_1 resp. N_2 je polára bodu N_2 resp. N_1, kde $R \equiv p . s$.

b) Nechť je přímka p sečna křivky Φ, neprocházející bodem S. Pak přímka PS leží vně úhlu $\sphericalangle\, T_1ST_2$ a protíná přímky XT_1', XT_2' v ideálních H-bodech. Existují tři společné tečny kuželoseček k, k_1 resp. k, k_2. Podle (5) je jeden z průsečíků N_1, $N_2 \neq S$ přímky PS s kuželosečkami k_1, k_2 H-bodem a druhý je ideálním H-bodem. Bod N_1 resp. N_2 je pólem tečny $u_2 \equiv RN_2$ resp. $u_1 \equiv RN_1$ kuželosečky k_1 resp. k_2 v bodě N_1 resp. N_2, kde $R \equiv p . s$.

c) Nechť přímka p prochází bodem S, čili $S \equiv Y$. Pak $PS \equiv s$. Body S_1, S_3 jsou ideální H-body a S_1, $S_3 \in s$. Existují dvě společné tečny kuželoseček k, k_1 resp. k, k_2. Bod S je trojnásobným průsečíkem těchto kuželoseček, čtvrtým průsečíkem je bod X.

d) Nechť je přímka p tečna křivky Φ v bodě N. Pak je S_1 ideální H-bod a existují tři společné tečny kuželoseček k, k_1. Přímka PS protíná podle úmluvy 1 v lit. [3] kuželosečku k_1 kromě bodu S ještě v bodě P, který je ideální H-bod. Bod N je pólem tečny u_1 kuželosečky k_1 v bodě P. Kuželosečka k_2 je složena z přímek p, s.

III

V lit. [3] je uvedeno šest druhů H-kuželoseček. Tento výčet nyní doplníme (viz lit. [2]).

7. H-kuželosečka k_1 se nazývá vydutá hyperbola, jestliže obsahuje čtyři absolutní H-body a jestliže existují čtyři společné tečny kuželoseček k, k_1 (obr. 9a).

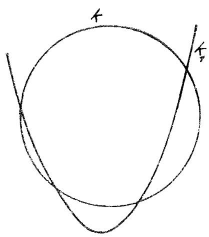
8. H-kuželosečka k_1 se nazývá hyperbolická parabola, jestliže se dotýká absolutní kružnice k v bodě S, obsahuje další dva různé absolutní H-body a existují tři společné tečny s, t_1, t_2 kuželoseček k, k_1. Nechť s je tečna absolutní kružnice k v bodě S. Přímka RS, kde $R \equiv t_1 . t_2$, protíná kuželosečku k_1 kromě bodu S ještě v ideálním H-bodě. (obr. 9b)

9. H-kuželosečka k_1 se nazývá vydutá hyperbolická parabola, jestliže má vlastnosti popsané v 8, avšak průsečík přímky RS s kuželosečkou k_1, různý od S, je H-bod (obr. 9c).

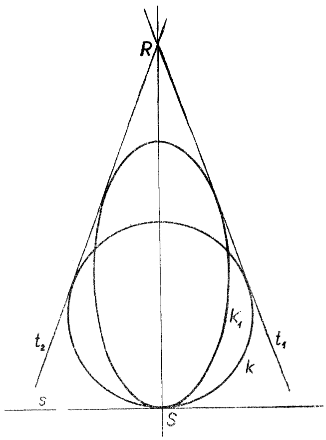
10. H-kuželosečka k_1 se nazývá oskulační parabola, jestliže se dotýká absolutní kružnice k v bodě S a obsahuje kromě toho jediný absolutní H-bod různý od S (obr. 9d).

Uvedených deset druhů H-kuželoseček představuje spolu s H-ekvidistantou úplný výčet regulárních H-kuželoseček.

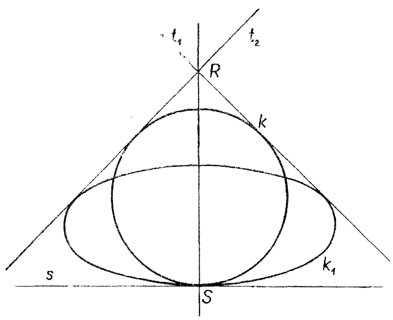
Sestrojme nyní kuželosečky k^{I}, k^{II}, odpovídající v polaritě indukované absolutní kružnicí k kuželosečkám k_1, k_2, popsaným v paragrafu II. Zvolme si libovolný bod $N \in \Phi$ a sestrojme body $N_1 = \mu_1(N)$, $N_2 = \mu_2(N)$. Poláry n^{I}, n^{II} bodů N_1, N_2 jsou tečny kuželoseček k^{I}, k^{II}. Označme $A \equiv t_N \,.\, p$. Pak $n^{\mathrm{I}} \equiv AN_2$, $n^{\mathrm{II}} \equiv AN_1$ (obr. 3). Jestliže dále označíme $B \equiv t_N \,.\, s$, pak přímky $u_1 \equiv BN_1$, $u_2 \equiv BN_2$ jsou tečny kuželoseček k_1, k_2 v bodech N_1, N_2. Body $N^{\mathrm{I}} \equiv q \,.\, n^{\mathrm{I}}$, $N^{\mathrm{II}} \equiv q \,.\, n^{\mathrm{II}}$, kde $q \equiv SN$,



Obr. 9a



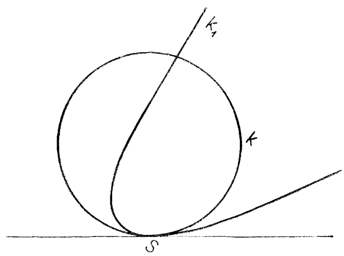
Obr. 9b



Obr. 9c

jsou pak body kuželoseček k^{I}, k^{II}. Body kuželoseček k^{I}, k^{II} leží jen na těch přímkách svazku o středu S, které protínají křivku Φ. Jestliže je kuželosečka k_2 složená z přímek p, s, pak je kuželosečka k^{II} dvojnásobnou přímkou PS.

(8) Přímky n^{I}, n^{II} jsou diagonály úplného čtyřrohu XYZ_1Z_2. Jestliže označíme x, y, z_1, z_2 tečny absolutní kružnice k v bodech X, Y, Z_1, Z_2 a $I \equiv x \,.\, z_1$, $II \equiv \equiv y \,.\, z_2$, $III \equiv x \,.\, z_2$, $IV \equiv y \,.\, z_1$, pak $n^{I} \equiv I\,II$, $n^{II} \equiv III\,IV$ (bod IV není na obr. 3 zakreslen).



Obr. 9d

(9) Jestliže označíme t, t' tečny k absolutní kružnici k v absolutních H-bodech křivky Φ a $C_1 \equiv x \,.\, t$, $C_2 \equiv x \,.\, t'$, $C_3 \equiv y \,.\, t$, $C_4 \equiv y \,.\, t'$, pak body C_1, C_3 resp. C_2, C_4 rozdělují přímku t resp. t' na dvě části. Všechny body jedné z těchto částí mají tu vlastnost, že jejich poláry protínají přímku p v ideálních H-bodech. Tuto část označíme $\overline{C_1C_3}$ resp. $\overline{C_2C_4}$.

Věta 3. Množinou H-středů křivek konstantní křivosti, které se dotýkají dané křivky Φ a H-přímky p, jsou kuželosečky k^{I}, k^{II} a části $\overline{C_1C_3}$, $\overline{C_2C_4}$ společných tečen t, t' absolutní kružnice k a křivky Φ.

Důkaz: 1. Předpokládejme, že přímka p není tečnou křivky Φ.

a) Veďme bodem S sečnu q křivky Φ, jeden její průsečík s touto křivkou označme N. Sestrojme podle předchozího na přímce q body N^{I}, N^{II} kuželoseček k^{I}, k^{II} a tečny n^{I}, n^{II} v těchto bodech (obr. 3). Na přímkách n^{I}, n^{II} uvažujme podle (8) části $\overline{I\,II}$, $\overline{III\,IV}$ ve smyslu (1). Polára u_1 resp. u_2 bodu N^{I} resp. N^{II} protíná přímku t_N v ideálním H-bodě B, proto bod N^{I} resp. N^{II} patří části $\overline{I\,II}$ resp. $\overline{III\,IV}$. Křivky $\Phi(N^{I}, N)$, $\Phi(N^{II}, N)$ se podle věty 1 lit. [3] dotýkají křivky Φ a podle věty 1 se také dotýkají přímky p. Body N^{I}, N^{II} jsou H-středy křivek Φ^*. Podobnou úvahu můžeme provést pro druhý průsečík Q přímky q s křivkou Φ. Pak příslušné body Q^{I}, Q^{II} kuželoseček k^{I}, k^{II} na přímce q jsou opět H-středy křivek Φ^*. Předpokládejme obráceně, že je dána křivka Φ^* o H-středu W na přímce q. Pak se tato křivka podle věty 1 lit. [3]

dotýká křivky Φ buď v bodě N nebo v bodě Q. To znamená, že se dotýká současně přímek p, t_N nebo p, t_Q. Podle věty 1 je bod W průsečíkem přímky q s některou z přímek n^I, n^{II}, q^I, q^{II}, kde q^I, q^{II} jsou tečny kuželoseček k^I, k^{II} v bodech Q^I, Q^{II}. To znamená, že na přímce q neexistuje kromě bodů N^I, N^{II}, Q^I, Q^{II} další H-střed křivky Φ^*.

b) Předpokládejme, že existuje společná tečna t křivky Φ a absolutní kružnice k. Uvažujme podle (9) část $\overline{C_1C_3}$ přímky t a zvolme bod $W \in \overline{C_1C_3}$. Existuje jediná křivka Φ' konstantní křivosti o H-středu W, dotýkající se přímky p. Protože každá křivka konstantní křivosti o H-středu W se podle poznámky 1 lit. [3] dotýká křivky Φ, je křivka Φ' křivkou Φ^*. Jestliže bod W přímky t neleží v části $\overline{C_1C_3}$, pak jeho polára protíná přímku p v H-bodě a neexistuje křivka konstantní křivosti, dotýkající se přímky p.

c) Předpokládejme, že přímka q procházející bodem S nemá s křivkou Φ žádný bod společný. Pak také neprotíná kuželosečky k^I, k^{II}. Podle věty 1 lit. [3] neleží na přímce q žádný H-střed křivky Φ^*.

2. Předpokládejme, že přímka p je tečna křivky Φ v bodě M. Veďme bodem S libovolnou přímku q.

a) V případě, že $q \neq PS$, provedeme důkaz stejně jako v části 1, přičemž v části 1a je $N^{II} \equiv Q^{II} \equiv S$.

b) Předpokládejme, že $q \equiv PS$ a zvolme libovolný bod $W \in q$. Pak je křivka $\Phi(W, M)$ křivkou Φ^*.

Proveďme nyní diskusi o druhu H-kuželosečky k^I resp. k^{II} v závislosti na druhu křivky Φ a vzájemné poloze přímky p a křivky Φ. Použijeme k tomu výsledků paragrafu II. Kuželosečka k^I resp. k^{II} odpovídá kuželosečce k_1 resp. k_2 v polaritě indukované absolutní kružnicí k. Proto průsečíku kuželosečky k_1 resp. k_2 s absolutní kružnicí k odpovídá společná tečna kuželosečky k^I resp. k^{II} a absolutní kružnice k. Společné tečně kuželosečky k_1 resp. k_2 a absolutní kružnice k odpovídá průsečík kuželosečky k^I resp. k^{II} s absolutní kružnicí k. Jestliže se kuželosečky k, k_1 resp. k, k_2 dotýkají v jistém bodě, pak se také kuželosečky k, k^I resp. k, k^{II} dotýkají v tomto bodě.

1. Jestliže je křivka Φ H-kružnice a přímka p se jí nedotýká, pak jsou H-křivky k^I, k^{II} polohyperboly. Jestliže je přímka p tečnou křivky Φ, pak je kuželosečka k^I polohyperbola a k^{II} je dvojnásobná přímka PS.

2. Předpokládejme, že je křivka Φ H-ekvidistanta. Pak obecně existují čtyři společné tečny absolutní kružnice k a kuželosečky k^I resp. k^{II}.

a) Nechť přímka p nemá s křivkou Φ společný bod. Pak H-kuželosečka k^I je ideální a H-kuželosečka k^{II} je vydutá hyperbola.

b) Nechť je přímka p sečna křivky Φ, neprocházející absolutním H-bodem křivky Φ. H-kuželosečky k^I, k^{II} jsou vyduté hyperboly.

c) Nechť přímka p prochází právě jedním absolutním H-bodem křivky Φ, např. bodem T. Kuželosečka k^I resp. k^{II} protíná absolutní kružnici k ve dvou různých bodech a v bodě T se jí dotýká. Kromě toho se kuželosečka k^I resp. k^{II} dotýká tečen x, t' absolutní kružnice k sestrojených v bodech X, T'. Průsečík R přímek x, t' leží na přímce m (obr. 7). Pól N^{I} přímky u_1 je H-bodem a pól N^{II} přímky u_2 je ideálním H-bodem (bod N^{II} není na obr. 7 zobrazen). Body N^{I}, N^{II} jsou průsečíky přímky m s kuželosečkami k^{I}, k^{II}. Proto je H-kuželosečka k^{I} vydutá hyperbolická parabola a kuželosečka k^{II} hyperbolická parabola.

d) Nechť platí $p \equiv s$. Kuželosečky k^{I}, k^{II} se dotýkají absolutní kružnice k v bodech T, T'. H-kuželosečka k^{I} je ideální a H-kuželosečka k^{II} je ekvidistanta.

e) Nechť je přímka p tečnou křivky Φ. H-kuželosečka k^{I} je vydutá hyperbola, H-kuželosečka k^{II} je dvojnásobná přímka PS.

3. Předpokládejme, že křivka Φ je H-horocykl. Kuželosečky k^{I}, k^{II} se dotýkají absolutní kružnice k v bodě S. Kromě toho existují obecně další dvě společné tečny x, y kuželoseček k, k^{I} resp. k, k^{II}.

a) Nechť přímka p nemá s křivkou Φ společný bod. Body $N^{I} \equiv N_2$, $N^{II} \equiv N_1$ jsou průsečíky přímky PS s kuželosečkami k^{I}, k^{II} (obr. 8). Kuželosečky k, k^{I} nemají kromě bodu S žádný další bod společný. Protože kuželosečka k^{I} prochází ideálním H-bodem N^{I}, je ideální. Kuželosečka k^{II} protíná absolutní kružnici k kromě bodu S ještě ve dvou různých bodech. Protože je N^{II} H-bod, je H-kuželosečka k^{II} vydutá hyperbolická parabola.

b) Nechť je přímka p sečna křivky Φ, neprocházející bodem S. Průsečíky přímky PS s kuželosečkami k^{I}, k^{II} jsou body $N^{I} \equiv N_2$, $N^{II} \equiv N_1$. Proto je jedna z kuželoseček k^{I}, k^{II} hyperbolická parabola a druhá je vydutá hyperbolická parabola.

c) Nechť přímka p prochází bodem S. Pak se kuželosečky k, k^{I} resp. k, k^{II} dotýkají v bodě S a kromě toho mají jediný další bod společný. Kuželosečky k^{I}, k^{II} jsou oskulační paraboly.

d) Nechť je přímka p tečna křivky Φ v bodě N. Pak existují tři různé společné tečny kuželoseček k, k^{I} a tři různé průsečíky těchto kuželoseček. Přímka PS protíná kuželosečku k^{I} v bodě $N^{I} \equiv N$ a je proto vydutá hyperbolická parabola. Kuželosečka k^{II} je dvojnásobná přímka PS.

LITERATURA

[1] *Hlavatý V.:* Projektivní geometrie 2. Útvary dvojparametrické. Praha 1945.

[2] *Kagan V. F.:* Osnovanija geometrii. Část 2. Moskva 1956.

[3] *Machala F.:* O množině středů křivek konstantní křivosti rozšířené hyperbolické roviny, které procházejí daným bodem hyperbolické roviny a dotýkají se dané křivky konstantní křivosti. Acta Univ. Pal. Olomuciensis, 1969.

Zusammenfassung

ÜBER DIE MENGE DER MITTELPUNKTE VON KURVEN KONSTANTER KRÜMMUNG DER HYPERBOLISCHEN EBENE, DIE EINE GEGEBENE KURVE KONSTANTER KRÜMMUNG UND EINE GEGEBENE GERADE BERÜHREN

FRANTIŠEK MACHALA

In der vorliegenden Arbeit wird die Menge der Mittelpunkte von Kurven konstanter Krümmung der hyperbolischen Ebene gefunden, die eine gegebene Kurve Φ konstanter Krümmung und eine gegebene Gerade p berühren. Weiter wird die volle Diskussion des gegebenen Problems für alle Arten der Kurven und für verschiedene gegenseitige Lagen der Gerade p und der Kurve Φ durchgeführt. Alle Betrachtungen werden synthetisch am Beltrami-Klein-Modell angegeben.