Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Miroslav Laitoch

Homogene lineare zu sich selbst begleitende Differentialgleichung zweiter Ordnung

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 11 (1971), No. 1, 61--72

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119965`

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

1971 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 33

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc

HOMOGENE LINEARE ZU SICH SELBST BEGLEITENDE DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

MIROSLAV LAITOCH

(Eingelangt am 31. März 1969)

I. Problemstellung: Betrachten wir eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = Q(t) \,.\, y, \tag{Q}$$

wo der Koeffizient Q eine in einem offenen Intervall j definierte und daselbst eine stetige Ableitung zweiter Ordnung besitzende Funktion bezeichnet. (Es ist also $Q \in C^{(2)}$).

Ist μ eine Lösung der Differentialgleichung (Q), so schreiben wir kurz $\mu \in (Q)$. Die Menge aller reellen Zahlen wird mit R bezeichnet. Es seien $\alpha, \beta \in R$ zwei Zahlen, für welche $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ gilt. Falls $\alpha^2 - \beta^2 Q(t) \neq 0$ für $t \in j$ ist, dann stellt die Funktion

$$z = \frac{\alpha u + \beta u'}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q|}},$$

wo $u \in (Q)$ ist, eine Lösung der Differentialgleichung

$$z'' = Q_1(t) \,.\, z, \tag{Q$_1$}$$

mit dem vermöge der Gleichheit

$$Q_1(t) = Q(t) + \frac{3}{4}\beta^4 Q'^2(t) \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 Q(t)]^{-2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\beta^2 Q''(t) \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 Q(t)]^{-1} + \alpha\beta Q'(t) \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 Q(t)]^{-1} \tag{1.1}$$

im Intervall j definierten Koeffizienten Q_1 dar.

In den weiteren Betrachtungen wird die Differentialgleichung (Q_1) als begleitende Gleichung der Differentialgleichung (Q) mit der Basis $[\alpha, \beta]$ genannt. (Siehe [1]).

Wir wollen uns nun mit der Frage befassen, für welche Koeffizienten Q die Differentialgleichung (Q) bei gegebener Basis $[\alpha, \beta]$ zu sich selbst begleitend ist. Zu diesem Behufe unterscheiden wir drei mögliche Fälle der Basis $[\alpha, \beta]$:

$$1.\ \alpha \neq 0,\quad \beta = 0; \qquad 2.\ \alpha \neq 0,\quad \beta \neq 0;$$
$$3.\ \alpha = 0,\quad \beta \neq 0.$$

Fall 1. Hierbei ist immer $Q_1(t) \equiv Q(t)$ in j für jede $Q \in C^{(2)}$. Somit ist die Differentialgleichung (Q) für jede Basis $[\alpha, 0]$, $\alpha \neq 0$ immer zu sich selbst begleitend, wie es sich aus (I.1) für $\beta = 0$ ergibt. Dieser Fall ist für uns nicht interessant.

Fall 2. Setzen wir hier $\frac{\alpha}{\beta} = \mu(\neq 0)$ ein, so läßt sich der Koeffizient Q_1 der Differentialgleichung (Q_1) in j durch folgende Gleichheit ausdrücken:

$$Q_1 = Q + \frac{3}{4} Q'^2(\mu^2 - Q)^{-2} + \frac{1}{2} Q''(\mu^2 - Q)^{-1} + \mu Q'(\mu^2 - Q)^{-1}.$$

Die Identität $Q_1 \equiv Q$ ist genau dann erfüllt, wenn Q der Differentialgleichung

$$\frac{3}{4} Q'^2(\mu^2 - Q)^{-2} + \frac{1}{2} Q''(\mu^2 - Q)^{-1} + \mu Q'(\mu^2 - Q)^{-1} = 0, \qquad \mu \neq 0, \quad \text{(I.2)}$$

genügt.

Fall 3. Dieser ist ein Sonderfall vom Fall 2. und zwar wenn $\mu = 0$ und $Q(t) \neq 0$ in j ist. Dann liefert die Bedingung $Q_1 \equiv Q$ für Q folgende Differentialgleichung

$$\frac{3}{4} Q'^2 Q^{-2} - \frac{1}{2} Q'' Q^{-1} = 0. \qquad \text{(I.3)}$$

II. Integration der Differentialgleichungen für den Koeffizienten Q.

Diskussion zu Fall 2. Wir beschäftigen uns jetzt näher mit Fall 2. Die Integration der Differentialgleichung (I.2) wird folgendermaßen durchgeführt:

Da $\mu^2 - Q(t) \neq 0$ für $t \in j$ ist, setzen wir in (I.2) $\mu^2 - Q(t) = X(t)$ ein, woraus $-Q'(t) = X'(t)$, $-Q''(t) = X''(t)$ folgt und für X erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{3}{4} \frac{X'^2}{X^2} - \frac{1}{2} \frac{X''}{X} - \mu \frac{X'}{X} = 0. \qquad \textbf{(II.1)}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die im Interval $j = (-\infty, \infty)$ der Differentialgleichung

$$X' = 0, \qquad \text{(II.2)}$$

genügende Funktion $X \equiv k \neq 0$ die Lösung der Gleichung (II.1) ist.

Ist $X'(t_0) \neq 0$, so existiert ein Intervall $i \subset j$ derart, daß $t_0 \in i$ und $X'(t) \neq 0$ im Intervall i ist. In diesem Intervall läßt sich die Gleichung (II.1) in der Gestalt

$$\frac{1}{2} X'X^{-1} \left[\frac{3}{2} X'X^{-1} - X''X'^{-1} - 2\mu \right] = 0$$

schreiben.

Da $X'X^{-1} \neq 0$ im Intervall i ist, ergibt sich aus dem Vorhergehenden

$$\frac{3}{2} X'X^{-1} - X''X'^{-1} - 2\mu = 0. \qquad \text{(II.3)}$$

Integrieren wir (II.2), so erhalten wir $X = k$ (Konstante), $k \neq 0$.

Integrieren wir (II.3), so erhalten wir sukzessiv $\ln |X'| = \frac{3}{2} \ln |X| - 2\mu t + A$, dh. $|X'| \,.\, |X|^{-\frac{3}{2}} = \exp(-2\mu t + A)$ und weiter $-2\varepsilon\varepsilon' |X|^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\mu} \exp$

$(-2\mu t + A) + B$, wo $\varepsilon = \operatorname{sgn} X$, $\varepsilon' = \operatorname{sgn} X'$, woraus sich nach Umformungen ergibt: $|X| = 16\mu^2 . [\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^{-2}$. Folglich bekommen wir entweder $X = 16\mu^2 [\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^{-2}$, wenn $\operatorname{sgn} X = 1$ ist, oder $X = -16\mu^2$ [exp $(2\mu t + A) - 2\mu B]^{-2}$, wenn $\operatorname{sgn} X = -1$ ist. Falls $\mu B > 0$, muß in beiden Fällen $t \neq \dfrac{A - \ln(2\mu B)}{2\mu}$ vorausgesetzt werden. Berechnen wir nun $X'(t)$, ist es leicht einzusehen, dass $i = j = (-\infty, \infty)$ mit eventueller Ausnahme von Punkt $t = A - \ln(2\mu B)/2\mu$ ist.

Es gilt also: Die Differentialgleichung (I.2) hat im Intervall $(-\infty, \infty)$ entweder die allgemeine Lösung

$$Q = \mu^2 - k, \qquad k \neq 0, \tag{II.G2}$$

oder

$$Q = \mu^2 - 16\mu^2 . [\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^{-2}, \tag{II.G2a}$$

$$Q = \mu^2 + 16\mu^2 . [\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^{-2}. \tag{II.G2b}$$

Es sei hier noch bemerkt, daß der Koeffizient Q die Funktion μ darstellt, was seine Abhängigkeit vom Quotienten $\mu = \dfrac{\alpha}{\beta}$ besagt.

Diskussion zu Fall 3. Im vorliegenden Falle läßt sich die Differentialgleichung (I.3) in der Form

$$|Q|^{\frac{1}{2}} . (|Q|^{-\frac{1}{2}})'' = 0$$

schreiben. Diese Differentialgleichung wird einfach integriert und die Lösungen lassen sich folgendermaßen ausdrücken:

$$Q(t) = \frac{-1}{(At + B)^2}, \tag{II.G3a}$$

$$Q(t) = +\frac{1}{(At + B)^2}. \tag{II.G3b}$$

Es sei noch bemerkt, daß der Koeffizient Q keine Funktion μ darstellt, was bedeutet, daß er von der Basiswahl unabhängig ist.

III. Explizite Darstellung von Integralen der Differentialgleichungen (Q) mit den Koeffizienten (II.G2) – (II.G3b).

Fall 2. Betrachten wir den Koeffizienten (II.G2) und folglich die Differentialgleichung

$$y'' = (\mu^2 - k) . y, \tag{III.G2}$$

$k \neq 0$. Nunmehr erhalten wir das allgemeine Integral in den folgenden expliziten Formen:

$$y = c_1 \exp(\sqrt{\mu^2 - k}\, t) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu^2 - k}\, t) \tag{III.J2$_1$}$$

falls $\mu^2 - k > 0$, bzw.

$$y = c_1 + c_2 t \tag{III.J2$_2$}$$

falls $\mu^2 - k = 0$, bzw.

$$y = c_1 \sin \sqrt{k - \mu^2}\, t + c_2 \cos \sqrt{k - \mu^2}\, t, \tag{III.J2$_3$}$$

falls $\mu^2 - k < 0$.

Betrachten wir den Koeffizienten (II.G2a) und (II.G2b) und folglich die Differentialgleichungen

$$y'' = \left\{\mu^2 - \frac{16\mu^2}{[\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^2}\right\} y, \tag{III.G2a}$$

$$y'' = \left\{\mu^2 + \frac{16\mu^2}{[\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^2}\right\} y. \tag{III.G2b}$$

Falls $\mu B > 0$ ist, nehmen wir an, daß $t \neq \dfrac{A - \ln(2\mu B)}{2\mu}$ ist.

Die Integration wird also unter der Voraussetzung durchgeführt, daß $B \neq 0$ ist. Mittels der sukzessiven Substitutionen

1. $y(t) = \eta(\tau)$, wo $\tau = \exp(-2\mu t + A)$, $\tau' = -2\mu\tau$ und da $y'(t) = \eta'(\tau)\,.\,\tau' = -2\mu\tau\eta'(\tau)$, $y''(t) = 4\mu^2\tau\eta'(\tau) + 4\mu^2\tau^2\eta''(\tau)$,

2. $u(\tau) = \tau^{\frac{1}{2}}\eta(\tau)$, in welcher $\eta(\tau) = \tau^{-\frac{1}{2}}u(\tau)$, $\eta'(\tau) = -\frac{1}{2}\tau^{-\frac{3}{2}}u(\tau) + \tau^{-\frac{1}{2}}u'(\tau)$, $\eta''(\tau) = \frac{3}{4}\tau^{-\frac{5}{2}}u(\tau) - \tau^{-\frac{3}{2}}u'(\tau) + \tau^{-\frac{1}{2}}u''(\tau)$,

3. $u(\tau) = (\tau - 2\mu B)\; v(\xi)$, wo $\xi = \ln \dfrac{\tau}{|\tau - 2\mu B|}$, $\xi' = \dfrac{-2\mu B}{\tau(\tau - 2\mu B)}$ und da

$$u'(\tau) = v(\xi) - \frac{2\mu B}{\tau} v'(\xi),\quad u''(\tau) = \left[\frac{-2\mu B}{\tau(\tau - 2\mu B)} + \frac{2\mu B}{\tau^2}\right] v'(\xi) + \frac{4\mu^2 B^2}{\tau^2(\tau - 2\mu B)} v''(\xi)$$

gehen die erwähnten Differentialgleichungen (III.G2a), (III.G2b) in die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\mu^2 B^2 v''(\xi) - \mu^2 B^2 v'(\xi) + v(\xi) = 0$$

bzw.

$$\mu^2 B^2 v''(\xi) - \mu^2 B^2 v'(\xi) - v(\xi) = 0$$

über. Hiervon und durch inverse Substitutionen gelangen wir zur expliziten Darstellung des allgemeinen Integrals für die Differentialgleichung (III.G2a) in der Form

$$y(t) = |\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|^{\frac{1}{2}} \,.\, \left[k_1 \left(\frac{\exp(-2\mu t + A)}{|\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|}\right)^{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu^2 B^2}}} + k_2 \left(\frac{\exp(-2\mu t + A)}{|\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|}\right)^{-\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\mu^2 B^2}}}\right], \tag{III.J2a$_1$}$$

falls $|\mu B| > 2$ ist, oder

$$y(t) = |\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|^{\frac{1}{2}} . \left[k_1 + k_2 \ln \frac{\exp(-2\mu t + A)}{|\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|}\right] \tag{III.J2a$_2$}$$

falls $|\mu B| = 2$, oder

$$y(t) = |\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|^{\frac{1}{2}} \,.$$
$$.\left[k_1 \sin \sqrt{\frac{1}{\mu^2 B^2} - \frac{1}{4}} \ln\left(\frac{\exp(-2\mu t + A)}{|\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|}\right) + \right.$$
$$\left. + k_2 \cos \sqrt{\frac{1}{\mu^2 B^2} - \frac{1}{4}} \ln\left(\frac{\exp(-2\mu t + A)}{|\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|}\right)\right] \qquad \text{(IIIJ2a}_3\text{)}$$

falls $|\mu B| < 2$ ist.

Ähnlicherweise ergibt sich für die Differentialgleichung (III.G2b) diese explizite Darstellung des allgemeinen Integrals:

$$y(t) = |\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|^{\frac{1}{2}} . \left[k_1 \left(\frac{\exp(-2\mu t + A)}{|\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|}\right)^{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\mu^2 B^2}}} + \right.$$
$$\left. + k_2 \left(\frac{\exp(-2\mu t + A)}{|\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B|}\right)^{-\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\mu^2 B^2}}}\right]. \qquad \text{(III.J2b)}$$

Im Falle $B = 0$ nehmen die Differentialgleichungen (III.G2a) und (III.G2b) folgende Gestalten an:

$$y'' = \{\mu^2 - 16\mu^2 . [\exp(4\mu t - 2A]\} . y, \qquad \text{(IIIG2as)}$$

bzw.

$$y'' = \{\mu^2 + 16\mu^2 . [\exp(4\mu t - 2A]\} . y. \qquad \text{(III.G2bs)}$$

Vermöge der sukzessiven Substitutionen

1. $y(t) = \eta(\tau)$, wo $\tau = \exp(-2\mu t + A), \tau' = -2\mu\tau, \tau'' = 4\mu^2\tau$, und da $y'(t) = = -2\mu\tau . \eta'(\tau)$, $y''(t) = 4\mu^2\tau\eta'(\tau) + 4\mu^2\tau^2\eta''(\tau)$,

2. $u(\tau) = \tau^{\frac{1}{2}} . \eta(\tau)$ in welcher $\eta(\tau) = \tau^{-\frac{1}{2}}u(\tau)$, $\eta'(\tau) = -\frac{1}{2}\tau^{-\frac{3}{2}}u(\tau) + \tau^{-\frac{1}{2}}u'(\tau)$, $\eta''(\tau) = \frac{3}{4}\tau^{-\frac{5}{2}}u(\tau) - \tau^{-\frac{3}{2}}u'(\tau) + \tau^{-\frac{1}{2}}u''(\tau)$,

gehen die erwähnten Differentialgleichungen in die Differentialgleichungen $\tau^4 u''(\tau) + + 4u(\tau)$ mit dem allgemeinen Integral

$$u = \tau\left(k_1 . \sin\frac{2}{\tau} + k_2 . \cos\frac{2}{\tau}\right),$$

bzw. $\tau^4 u''(\tau) - 4u(\tau) = 0$ mit dem allgemeinen Integral

$$u = \tau(k_1 . e^{\frac{2}{\tau}} + k_2 e^{-\frac{2}{\tau}}),$$

über. (Siehe [2], Nr. 2.34.)

Hiervon und mittels der inversen Substitutionen erhalten wir für die erwähnten Gleichungen nachstehende explizite Darstellungen des allgemeinen Integrals:

$$y(t) = \exp\left(-\mu t + \frac{A}{2}\right) . [k_1 \sin 2\exp(2\mu t - A) + k_2 . \cos 2\exp(2\mu t - A)], \qquad \textbf{(III.J2as)}$$

bzw.

$$y(t) = \exp\left(-\mu t + \frac{A}{2}\right) . [k_1 \, e^{2\exp(2\mu t - A)} + k_2 \, . \, e^{-2\exp(2\mu t - A)}]. \quad \text{(III.J2bs)}$$

Fall 3. Betrachten wir den Koeffizienten (II.G3a) und (II.G3b) und folglich die Differentialgleichungen

$$y'' = \frac{-1}{(At - B)^2} \, y, \qquad A \neq 0, \qquad \text{(III.G3a)}$$

$$y'' = \frac{1}{(At + B)^2} \, y, \qquad A \neq 0. \qquad \text{(III.G3b)}$$

Vermöge der Substitution $y(t) = \eta(\tau)$, wo $\tau = \ln | At + B |$, gehen die betrachteten Gleichungen in die Gleichungen

$$A^2\eta''(\tau) - A^2\eta'(\tau) + \eta(\tau) = 0,$$

bzw.

$$A^2\eta''(\tau) - A^2\eta'(\tau) - \eta(\tau) = 0$$

über. Hiervon und durch inverse Substitutionen erhalten wir im Intervall $(-\infty, \infty)$ $t \neq -\frac{B}{A}$ folgende explizite Darstellungen des allgemeinen Integrals für die Differentialgleichung (III.G3a):

$$y(t) = | At + B |^{\frac{1}{2}} (k_1 \, | At + B |^{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{A^2}}} + k_2 \, | At + B |^{-\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{A^2}}} \quad \text{(III.J3a}_1\text{)}$$

falls $| A | > 2$, bzw.

$$y(t) = | At + B |^{\frac{1}{2}} . (k_1 + k_2 \ln | At + B |), \qquad \text{(III.J3a}_2\text{)}$$

falls $| A | = 2$, bzw.

$$y(t) = | At + B |^{\frac{1}{2}} .$$

$$. \left(c_1 \sin \sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{1}{4}} \ln | At + B | + c_2 \cos \sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{1}{4}} \ln | At + B |\right) \quad \text{(III.J3a}_3\text{)}$$

falls $| A | < 2$ ist.

Für die Differentialgleichung (III.Gb) erhalten wir folgende Darstellungen des allgemeinen Integrals:

$$y(t) = | At + B |^{\frac{1}{2}} \left(k_1 \, | At + B |^{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{A^2}}} + k_2 \, | At + B |^{-\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{A^2}}}\right). \quad \text{(III.J3b)}$$

Der Fall $A = 0$, $B \neq 0$ führt zu den Differentialgleiehungen

$$y'' = \frac{-1}{B^2} \, y, \qquad \text{(III.G3as)}$$

$$y'' = \frac{1}{B^2} \, y, \qquad \text{(III.G3bs)}$$

mit den allgemeinen Integralen

$$y = k_1 \sin \frac{t}{|B|} + k_2 \cos \frac{t}{|B|} \tag{III.J3as}$$

bzw.

$$y = k_1 e^{\frac{t}{|B|}} + k_2 e^{-\frac{t}{|B|}}. \tag{III.J3bs}$$

IV. Linearer Raum von Lösungen der Differentialgleichung (Q).

Im vorliegenden Absatz wollen wir noch einen Weg zur Lösung unseres Problems darlegen. Betrachten wir wiederum die Differentialgleichung

$$y'' = Q(t)\, y, \tag{Q}$$

$t \in j$. Da die Gleichung (Q) zu sich selbst begleitend ist, hat sie neben der Lösung u auch noch die Funktion $\frac{\alpha u + \beta u'}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q|}}$ als Lösung, wobei $\alpha^2 - \beta^2 Q(t) \neq 0$ in j, $\beta \neq 0$ vorausgesetzt wird. Betrachtet man nun die Abbildung A, die jeder Lösung $u \in (Q)$ eine Lösung $\frac{\alpha u + \beta u'}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q|}} \in (Q)$ zuordnet, ist es leicht einzusehen, daß A eine lineare Abbildung der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung (Q) in sich ist. Suchen wir also Normallösungen u d.h. derartige nichttrivialen Lösungen u, für welche in der Abbildung A

$$uA \equiv \frac{\alpha u + \beta u'}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q|}} = su, \tag{IV.1}$$

gilt, wo $s \in R$ eine Nichtnullkonstante ist.

Da $\beta \neq 0$ ist, legen wir $\frac{\alpha}{\beta} = \mu$.

Durch Umformung bekommen wir aus (IV.1)

$$\frac{\mu u + u'}{\sqrt{|\mu^2 - Q|}} = su, \tag{IV.2}$$

wobei $\mu^2 - Q(t) \neq 0$ in j ist. Hiervon

$$u' = (s\sqrt{|\mu^2 - Q|} - \mu) \,.\, u,$$
$$u'' = [s(\sqrt{|\mu^2 - Q|})' + (s\sqrt{|\mu^2 - Q|} - \mu)^2] \,.\, u.$$

Setzt man nun in (Q) anstelle von y die Lösung u mit der Nebenbedingung (IV.1) ein, so erhält man

$$u \,.\, [s(\sqrt{|\mu^2 - Q|})' + (s\sqrt{|\mu^2 - Q|} - \mu)^2 - Q] = 0,$$

und durch Umformung

$$s^2 + \frac{(\sqrt{|\mu^2 - Q|})' - 2\mu\sqrt{|\mu^2 - Q|}}{|\mu^2 - Q|}\, s + \frac{\mu^2 - Q}{|\mu^2 - Q|} = 0. \tag{ch}$$

Die Gleichung (ch) ist die charakteristische Gleichung der linearen Abbildung A. Da $\dfrac{(\sqrt{|\mu^2 - Q|})' - 2\mu\sqrt{|\mu^2 - Q|}}{|\mu^2 - Q|} = \dfrac{-\varepsilon Q' - 4\mu|\mu^2 - Q|}{2|\mu^2 - Q|^{3/2}}$, wo $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\mu^2 - Q)$, sehen wir, daß die Gleichheit (IV.1) genau dann aufgelöst wird, wenn

$$\frac{-\varepsilon Q' - 4\mu|\mu^2 - Q|}{2|\mu^2 - Q|^{3/2}} = c, \tag{IV.3}$$

wo $c \in R$ eine Konstante ist.

A. Beachten wir zunächst, daß für $c \neq 0$ im Falle $c > 0$, $\mu < 0$ oder $c < 0$, $\mu < 0$ die Funktion

$$Q = \mu^2 - k,$$

(wo $k = \pm \dfrac{4\mu^2}{c^2} \neq 0$) die Lösung der vorangehenden Differentialgleichung (IV.3) für die Funktion Q ist. Vergleiche mit (II.G2).

B. Wird $\mu^2 - Q(t) \neq 0$ in j vorausgesetzt, erhalten wir aus (IV.3)

$$\frac{-\varepsilon\, \mathrm{d}Q}{2c|\mu^2 - Q|^{3/2} + 4\mu|\mu^2 - Q|} = \mathrm{d}t.$$

Wenn wir diese Gleichung mit separierten Variablen integrieren, finden wir leicht, daß

$$Q = \mu^2 - \frac{4\varepsilon\mu^2}{\{\exp[-2\mu(t + k)] - \varepsilon'' c\}^2},$$

wo $\varepsilon'' = \operatorname{sgn}(c\sqrt{|\mu^2 - Q|} + 2\mu)$ ist. Es können somit zwei Sonderfälle eintreten. Für $\mu \neq 0$ und $\varepsilon = 1$ erhalten wir

$$Q = \mu^2 - \frac{4\mu^2}{\{\exp[-2\mu(t + k)] - \varepsilon'' c\}^2}$$

und desgleichen für $\mu \neq 0$ und $\varepsilon = -1$

$$Q = \mu^2 + \frac{4\mu^2}{\{\exp[-2\mu(t + k)] - \varepsilon'' c\}^2}.$$

Diese Resultaten stimmen mit den Formeln (II.G2a) bzw. (IIG2b) auf Seite 62 überein, wenn dabei

$$A = -2\mu k + \ln 2, \qquad B = \frac{\varepsilon'' c}{\mu}$$

gewählt wird.

C. Wird $\mu = 0$ vorausgesetzt, erhält man für Q die Differentialgleichung

$$\frac{(1 - Q|^{1/2})'}{|-Q|} = C$$

und nachher durch Umformung

$$\frac{-\varepsilon Q'}{2|-Q|^{3/2}} = c,$$

wo $\varepsilon = \operatorname{sgn}(-Q)$, $c \in R$ eine Konstante ist. Wenn wir diese Gleichung integrieren, bekommen wir

$$Q = \frac{-\varepsilon}{(ct + k)^2}\,.$$

Dieses Resultat stimmt mit den Formeln (IIG3a) bzw. (II.G3b) auf Seite 62 in Fällen $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = -1$ überein, wenn dabei

$$A = c, \qquad B = k,$$

gewählt wird.

V. Diskussion der charakteristischen Gleichung. Die charakteristische Gleichung (ch) hat somit unter der Bedingung (IV.3) die Form

$$s^2 + cs + \varepsilon = 0, \tag{ch*}$$

wobei $c \in R$ eine willkürliche Konstante, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\mu^2 - Q)$ angibt. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung werden durch die Formel

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \varepsilon} \qquad \text{für } c \neq 0,$$

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-\varepsilon} \qquad \text{für } c = 0,$$

gegeben.

Ein Blick darauf zeigt uns, daß die charakteristische Gleichung (ch) unter Voraussetzung $\mu^2 - Q(t) \neq 0$ in j von Null verschiedene Wurzeln liefert und dies im Falle $c \neq 0$

α) zwei reelle verschiedene Wurzeln, falls entweder a) $\varepsilon = -1$, c beliebig,
oder b) $\varepsilon = 1$, $|c| > 2$

β) eine Doppelwurzel, falls $\varepsilon = 1$, $|c| = 2$,

γ) zwei komplexe konjugierte Wurzeln, falls $\varepsilon = +1$, $|c| < 2$ ist; und im Falle $c = 0$,

α′) zwei reelle verschiedene Wurzeln, falls $\varepsilon = -1$,

γ′) zwei komplexe konjugierte Wurzeln, falls $\varepsilon = 1$ ist.

VI. Explizite Darstellung von Normallösungen.

Fall $\mu \neq 0$, $c \neq 0$.

Aus der Gleichheit (IV.2)

$$\frac{\mu u + u'}{\sqrt{|\mu^2 - Q|}} = su$$

ergibt sich durch Integration

$$u = e^{-\mu(t+l)}\, e^{s\int\sqrt{|\mu^2 - Q|}\,dt}, \tag{VI.1}$$

$l \in R$.

α) Es seien $s_1 \neq s_2$ zwei reelle Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Wir setzen

$$u_j(t) = e^{-\mu(t+l)}\, e^{s_j\int\sqrt{|\mu^2 - Q|}\,dt}, \qquad j = 1, 2.$$

Leicht berechnen wir, daß $\int \sqrt{|\mu^2 - Q|}\,dt = \ln|1 - \varepsilon'' c e^{2\mu(t+k)}|^{-\frac{1}{c}} + k_1$ und mithin $e^{s_j \int \sqrt{|\mu^2 - Q|}\,dt} = e^{k_1 s_j} . |1 - \varepsilon'' c e^{2\mu(t+k)}|^{-\frac{s_j}{c}}$, wo $\varepsilon'' = \operatorname{sgn}(c\sqrt{|\mu^2 - Q|} + 2\mu)$, $-\frac{s_j}{c} = -\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{c^2}}\right)$ ist; hieraus ergibt sich alsdann die allgemeine Lösung in der Form

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 = e^{-\mu(t+l)} . \left[C_1 e^{k_1 s_1} . |1 - \varepsilon'' c e^{2\mu(t+k)}|^{-\frac{s_1}{c}} + \right.$$

$$\left. + C_2 e^{k_1 s_2} |1 - \varepsilon'' c e^{2\mu(t+k)}|^{-\frac{s_2}{c}}\right] = |e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|^{\frac{1}{2}} .$$

$$. \left[c_1 \left(\frac{\exp[-2\mu(t+k)]}{|\exp[-2\mu(t+k)] - \varepsilon'' c|}\right)^{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{c^2}}} + \right.$$

$$\left. + c_2 \left(\frac{\exp[-2\mu(t+k)]}{|\exp[-2\mu(t+k) - \varepsilon'' c|}\right)^{-\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{c^2}}}\right],$$

worin wir $c_1 = C_1 e^{k_1 s_1 + \mu(k-l)}$, $c_2 = C_2 e^{k_1 s_2 + \mu(k-l)}$ gesetzt haben. Das Resultat stimmt mit den Formeln (III.J2b) bzw. (III.J2a$_1$) auf Seite 63 und dies für den Fall $\varepsilon = -1$ bzw. $\varepsilon = 1$, $|c| > 2$ überein, wenn dabei

$$A = -2\mu k + \ln 2, \qquad B = \frac{\varepsilon'' c}{\mu}$$

gewählt wird, denn in den beiden Fällen wird die allgemeine Lösung durch dasselbe Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

β) Es sei $s_1 = s_2$ eine reelle Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung und sei mit s_0 bezeichnet. Dann ist $s_0 = -\frac{c}{2}$. Leicht kann aus (VI.1) berechnet werden, daß eine Lösung u_1 in der Form

$$u_1 = |e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|^{1/2}$$

besteht.

Wie bekannt, die zweite unabhängige Lösung u_2 ist gegeben durch die Formel

$$u_2 = u_1 \int \frac{dt}{u_1^2} = u_1 \int \frac{dt}{|e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|} = \frac{\varkappa \mu_1}{2\mu\varepsilon'' c} \ln \frac{e^{-2\mu(t+k)}}{|e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|},$$

wobei $\varkappa = \operatorname{sgn}(e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c)$. Die allgemeine Lösung ist von der Gestalt

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 = |e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|^{1/2} \left[C_1 + C_2 \frac{\varkappa}{2\mu\varepsilon'' c} \ln \frac{e^{-2\mu(t+k)}}{|e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|}\right] =$$

$$= |e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|^{1/2} . \left[c_1 + c_2 \ln \frac{e^{-2\mu(t+k)}}{|e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|}\right],$$

wo $c_1 = C_1$, $c_2 = \frac{\varkappa}{2\mu\varepsilon'' c}$ gesetzt wurde.

Das Resultat stimmt mit der Formel (III.J2a$_2$) auf Seite 64 überein, wenn dabei

$$A = -2\mu k + \ln 2, \qquad B = \frac{\varepsilon'' c}{\mu}$$

gewählt wird, denn in den beiden Fällen wird die allgemeine Lösung durch dasselbe Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

γ) Es seien $s_1 \neq s_2$ zwei komplexe konjugierte Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Dann ist $\varepsilon = 1$, $\frac{s_j}{c} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4}}$, $j = 1, 2$, so daß in Hinsicht auf (VI.1)

$$u_j(t) = e^{-\mu(t+l)} \,.\, e^{s_j \ln |1 - \varepsilon'' c e^{2\mu(t+k)}|^{-(1/c)-k_1}} =$$

$$= e^{-\mu(t+l)} \,.\, |1 - \varepsilon'' c e^{2\mu(t+k)}|^{\frac{1}{2}} \,.\, e^{\pm i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4}} \ln |1 - \varepsilon'' c e^{2\mu(t+k)}|}$$

ist.

Die allgemeine Lösung läßt sich also nach geeigneter Umformung in der Gestalt

$$y = |e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|^{1/2} \,.\, \left[c_1 \sin \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4}} \ln \frac{e^{-2\mu(t+k)}}{|e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|} + \right.$$

$$\left. + c_2 \cos \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4}} \ln \left(\frac{e^{-2\mu(t+k)}}{|e^{-2\mu(t+k)} - \varepsilon'' c|} \right) \right]$$

schreiben.

Das Resultat stimmt mit der Formel (III.J2a$_3$) auf Seite 64 überein, wenn dabei

$$A = -2\mu k + \ln 2, \qquad B = \frac{\varepsilon'' c}{\mu}$$

gewählt wird, denn in den beiden Fällen wird die allgemeine Lösung durch dasselbe Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

Völlig analog läßt sich der Fall $\mu \neq 0$, $c = 0$ betrachten, der zu Formeln (III.J2as), (III.J2bs) führt. Der Fall $\mu = 0$, $c \neq 0$ führt zu Formeln (III.J3a$_1$), (III.J3a$_2$), (III.Ja$_3$) und (III.J3b). Der Fall $\mu = 0$, $c = 0$ führt durch Spezialisierung des vorherigen Falles zu Formeln (III.J3as), (III.J3bs).

Durch direkte Rechnung bekommen wir die Formeln (III.J2$_1$), (III.J2$_2$), (III.J2$_3$).

Abschluß: Leicht durch direkte Rechnung überzeugen wir uns, daß die gefundenen Differentialgleichungen (II.G2), (II.G2a), (II.G2b), (II.G3a), (II.G3b) und ihre Spezialfälle bei der Basis $[\alpha, \beta]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, zu sich selbst begleitend sind.

Wir haben also gezeigt, daß genau die Differentialgleichungen (II.G2), (II.G3a), (II.G3b) sogar bei jeder Basis $[\alpha, \beta]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, zu sich selbst begleitend sind und daß genau die Differentialgleichungen (II.G2a), (II.G2b) bei jeder Basis $[\alpha, \beta]$, für die $\frac{\alpha}{\beta} = \mu$ ist, zu sich selbst begleitend sind.

LITERATUR

[1] *Laitoch M.:* L'équation associée dans la théorie des transformations des équations differentielles du second ordre, Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N., T. 12, 1963.
[2] *Kamke E.:* Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig 1959, (Russ. Ausgabe 1965).

Shrnutí

HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU, KTERÉ JSOU SAMY K SOBĚ PRŮVODNÍ

MIROSLAV LAITOCH

Průvodní rovnicí při bázi $[\alpha, \beta]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ k diferenciální rovnici

$$y'' = Q(t)\, y, \tag{Q}$$

kde koeficient Q je záporný a spojitý pro $t \in j$ nazýváme diferenciální rovnici

$$z'' = Q_1 \,.\, z, \tag{Q$_1$}$$

kde koeficient Q_1 je definován rovností

$$Q_1 = Q + \frac{3}{4}\beta^4 Q'^2[\alpha^2 - \beta^2 Q]^{-2} + \frac{1}{2}\beta^2 Q''[\alpha^2 - \beta^2 Q]^{-1} + \alpha\beta Q'[\alpha^2 - \beta^2 Q]^{-1}.$$

Je ukázáno, že diferenciální rovnice Q je sama k sobě průvodní při bázi $[\alpha, \beta]$ právě v případech, když koeficient Q nabývá těchto vyjádření

$$\begin{aligned}
Q &= \mu^2 - k, \qquad k \neq 0,\\
Q &= \mu^2 - 16\mu^2\,[\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^{-2},\\
Q &= \mu^2 + 16\mu^2\,[\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^{-2},\\
Q &= -(At + B)^{-2},\\
Q &= (At + B)^{-2}.
\end{aligned}$$

Zde A, B jsou reálné konstanty, $\mu = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$.

Ve všech případech jsou odvozena explicitní vyjádření fundamentálních soustav řešení příslušných diferenciálních rovnic.