Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

František Krutský

Zobecnění teorému symetrizace

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 11 (1971), No. 1, 51--59

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119964`

1971 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 33

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

ZOBECNĚNÍ TEORÉMU SYMETRIZACE

FRANTIŠEK KRUTSKÝ

(Předloženo 30. 6. 1970)

V knize N. Bourbaki: „Algebra – algebraické struktury, lineární a pololineární algebra", je uvedena následující věta:

Teorém symetrizace: Nechť T je všude definovaný komutativní asociativní zákon komposice prvků množiny E. Pak je možno určit množinu $\bar{E}$, komutativní asociativní zákon komposice $\bar{\mathsf{T}}$ prvků této množiny a podmnožinu A množiny $\bar{E}$, uzavřenou vzhledem k zákonu $\bar{\mathsf{T}}$ tak, aby byly splněny následující podmínky:

1. Existuje isomorfismus množiny E (opatřené zákonem T), přiřazující každému regulárnímu prvku z E prvek z A, který je symetrizovatelný v $\bar{E}$.

2. $\bar{E}$ je nejmenší uzavřená množina, která obsahuje sjednocení A a množiny A' prvků, které jsou symetrické právě ke všem možným regulárním prvkům z A.

Přitom uvedené podmínky určují množinu $\bar{E}$ jednoznačně (s přesností až na isomorfismus) a každý regulární prvek z $\bar{E}$ je symetrizovatelný.

V uvedené knize je tato věta dokazována tak, že se nejprve provede jistý rozbor úlohy a poté se provede konstrukce množiny $\bar{E}$ (se zákonem komposice $\bar{\mathsf{T}}$) tak, aby byly splněny požadované podmínky. V tomto článku provedeme zcela jinou konstrukci množiny $\bar{E}$ (se zákonem komposice $\bar{\mathsf{T}}$), která je odlišná od uvedené (mohli bychom říci klasické) konstrukce. Současně bude touto novou konstrukcí rozšířena platnost teorému symetrizace na ten případ, kdy nepředpokládáme komutativitu zákona T na E, ale místo toho požadujeme, aby každý regulární prvek množiny E byl centrální, což můžeme považovat za jisté zobecnění uvedené věty. Zákon komposice $\bar{\mathsf{T}}$ na $\bar{E}$ však v tomto případě nemusí být komutativní, což však není podstatné, podstatná je otázka symetrizace.

Kdyby se požadovala pouze asociativnost zákona T na E, není možné dokázat větu obdobnou k teorému symetrizace. Viz A. Malcev: On the immersion of an algebraic ring into a field. Math. Annalen díl 113, 1937, str. 686–691.

Dříve než přikročíme k vlastní konstrukci, uvedeme si dvě pomocné věty. Při vlastní konstrukci pak předpokládáme znalost některých základních definic a vět, které budeme používat.

Lemma 1: Nechť $\bar{\mathrm{T}}$ je asociativní zákon komposice prvků množiny $\bar{E}$, nechť $A \subset \bar{E}$, $A' \subset \bar{E}$ jsou množiny uzavřené vzhledem k zákonu $\bar{\mathrm{T}}$, přičemž A' je množina prvků, které jsou symetrické ke všem regulárním prvkům z A. Pak množina $A \bar{\mathrm{T}} A'$ je nejmenší uzavřená množina, která obsahuje sjednocení $A \cup A'$.

Důkaz: Množina $A \bar{\mathrm{T}} A'$ je uzavřená vzhledem k zákonu $\bar{\mathrm{T}}$ a obsahuje neutrální prvek množiny $\bar{E}$: Jelikož množiny A, A' jsou uzavřené vzhledem k $\bar{\mathrm{T}}$ a zákon komposice $\bar{\mathrm{T}}$ je asociativní a prvky množiny A' jsou centrální (neboť jsou regulární), tak platí

$$(A \bar{\mathrm{T}} A') \bar{\mathrm{T}} (A \bar{\mathrm{T}} A') = A \bar{\mathrm{T}} (A' \bar{\mathrm{T}} A) \bar{\mathrm{T}} A' = A \bar{\mathrm{T}} (A \bar{\mathrm{T}} A') \bar{\mathrm{T}} A' = (A \bar{\mathrm{T}} A) \bar{\mathrm{T}} (A' \bar{\mathrm{T}} A') = A \bar{\mathrm{T}} A'.$$

Prvek $a' \in A'$ je symetrický k jistému prvku $a \in A$, který je regulární. Tedy prvek $a \bar{\mathrm{T}} a' \in A \bar{\mathrm{T}} A'$. Ale $a \bar{\mathrm{T}} a' = e$, kde e je neutrální prvek množiny $\bar{E}$ vzhledem k $\bar{\mathrm{T}}$.

Množina $A \bar{\mathrm{T}} A'$ obsahuje $A \cup A'$, neboť pro libovolný prvek $a \in A$, $b \in A$ platí $a = a \bar{\mathrm{T}} e = a \bar{\mathrm{T}} (b \bar{\mathrm{T}} b') = (a \bar{\mathrm{T}} b) \bar{\mathrm{T}} b' \in \bar{\mathrm{T}} A'$. Podobně se dokáže vztah $A' \subset A \bar{\mathrm{T}} A'$. Průnik všech uzavřených množin, které obsahují $A \cup A'$ je také uzavřená množina – tedy podle ([2], Rez § 6 n° 5) existuje nejmenší taková množina uzavřená. Označme si ji M. Jistě platí $M \subset A \bar{\mathrm{T}} A'$. Ale také obráceně platí $A \bar{\mathrm{T}} A' \subset M$. Když $x \in A \bar{\mathrm{T}} A' \Rightarrow x = a_1 \bar{\mathrm{T}} a'_2$, $a_1 \in A$, $a'_2 \in A' \Rightarrow a_1 \in A \cup A'$, $a'_2 \in A \cup A' \Rightarrow a_1, a'_2 \in M$ a jelikož M je uzavřená, také $a_1 \bar{\mathrm{T}} a'_2 = x \in M$.

A tedy $A \bar{\mathrm{T}} A' = M$, což bylo dokázati.

Lemma 2: Každý regulární prvek z $A \bar{\mathrm{T}} A' = \bar{E}$ je symetrizovatelný v $\bar{E}$ vzhledem k zákonu komposice $\bar{\mathrm{T}}$. (Množiny A, A' značí totéž, co v minulém lemmatu).

Důkaz: Nechť $x \bar{\mathrm{T}} y'$ je regulární prvek z $\bar{E}$ ($x \in A$, $y' \in A'$), pak také prvek $(x \bar{\mathrm{T}} y') \bar{\mathrm{T}} y = x$ je regulární v $\bar{E}$ neboť komposice dvou regulárních prvků je regulární prvek. Prvek x je také regulární v $A \subset \bar{E}$, neboť když ze vztahu $x \bar{\mathrm{T}} x_1 = x \bar{\mathrm{T}} x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ pro všechna $x_1, x_2 \in \bar{E}$, platí toto také pro všechna $x_1, x_2 \in A \subset \bar{E}$ a x je tedy regulární v A a tudíž podle předpokladu je prvek x symetrizovatelný v $\bar{E} \Rightarrow$ prvek $x \bar{\mathrm{T}} y'$ je symetrizovatelný v $\bar{E}$ neboť součin dvou symetrizovatelných prvků z $\bar{E}$ je opět symetrizovatelný prvek v $\bar{E}$.

Dříve než započneme s vlastní konstrukcí, shrňme si, co bude naším úkolem. Předpokládáme, že na množině E je všude definovaný asociativní zákon T a každý regulární prvek z E je vzhledem k tomuto zákonu centrální. Naším úkolem nyní bude definovat množinu $\bar{E}$ a asociativní zákon $\bar{\mathrm{T}}$ na $\bar{E}$ a isomorfismus f množiny E na uzavřenou podmnožinu $A \subset \bar{E}$ (s indukovaným zákonem $\bar{\mathrm{T}}$) tak, aby

1. $\bar{E}$ měla neutrální prvek vzhledem k $\bar{\mathrm{T}}$
2. $f(x)$ bylo symetrizovatelné v $\bar{E}$ pro každý regulární prvek $x \in E$.
3. $\bar{E}$ byla nejmenší uzavřená množina, která obsahuje A a A'.

Poznámka: Budeme nadále předpokládat, že množina všech regulárních prvků množiny E, kterou budeme značit E^*, není prázdná.

A nyní již provedeme vlastní konstrukci.

Definice 1: Nechť $\top$ je všude definovaný zákon komposice prvků množiny E. Levou (respektive pravou) translací, která odpovídá prvku $a \in E$, se nazývá zobrazení $x \to a \top x$ (respektive $x \to x \top a$) množiny E do sebe. Levé a pravé translace, které odpovídají prvku $a \in E$ se budou značit γ_a a δ_a, to jest

$$\gamma_a(x) = a \top x, \qquad \delta_a(x) = x \top a.$$

Označení 1: Písmenem $\mathscr{F}$ si označíme systém všech podmnožin $X \subset E$, které mají následující vlastnost:
existuje takové $y \in E^*$, pro které $\delta_y(E) \subset X$.

Věta 1: Průnik dvou podmnožin z $\mathscr{F}$ patří opět $\mathscr{F}$.

Důkaz: Nechť $X_1 \in \mathscr{F}$, $X_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow X_1 \subset E$, $X_2 \subset E$ a existují prvky $y_1 \in E^*$, $y_2 \in E^*$ tak, že $\delta_{y_1}(E) \subset X_1$, $\delta_{y_2}(E) \subset X_2$. Máme dokázat, že také $X_1 \cap X_2 \in \mathscr{F}$. Ihned vidíme, že $X_1 \cap X_2 \subset E$. Stačí nalézt takové $y_3 \in E^*$, aby platilo $\delta_{y_3}(E) \subset X_1 \cap X_2$. Za y_3 vezměme $y_1 \top y_2$. Prvek $y_3 = y_1 \top y_2 \in E^*$, neboť množina všech regulárních prvků vzhledem k asociativnímu zákonu komposice je uzavřená. Přitom platí

$$\delta_{y_1 \top y_2}(E) = E \top (y_1 \top y_2) = (E \top y_1) \top y_2 \subset E \top y_2 \subset X_2,$$
$$\delta_{y_1 \top y_2}(E) = E \top (y_1 \top y_2) = E \top (y_2 \top y_1) = (E \top y_2) \top y_1 \subset E \top y_1 \subset X_1.$$

Z posledních dvou vztahů plyne $\delta_{y_1 \top y_2}(E) \subset X_1 \cap X_2$. Patří tedy také $X_1 \cap X_2$ do $\mathscr{F}$.

Označení 2: Označme písmenem Φ množinu všech funkcí, definovaných na množinách z $\mathscr{F}$ a nabývajících hodnot z E, které mají tuto vlastnost: vezmeme-li libovolné $f \in \Phi$ a $X \in \mathscr{F}$, pak $f^{-1}(X)$ patří $\mathscr{F}$.

Poznámka: $f^{-1}(X)$ značí množinu všech vzorů prvků množiny X při zobrazení f (to jest takových prvků z E), jejichž obrazy při zobrazení f padnou do X.

Definice 2: Na množině Φ si definujme binární relaci R následujícím způsobem: prvek $f \in \Phi$ je v relaci R s prvkem $g \in \Phi$ (značíme fRg) právě tehdy, když existuje taková množina $X \in \mathscr{F}$, že zúžená zobrazení f a g na X se ztotožňují.

Věta 2: Relace R na Φ je relací ekvivalence na Φ.

Důkaz: Když $f \in \Phi$, $g \in \Phi$, $fRg \Leftrightarrow$ existuje taková množina $X \in \mathscr{F}$, že zúžení f a g na X se ztotožňují, neboli $f_X = g_X$.

1. Mohu rozhodnout pro každá dvě zobrazení f, $g \in \Phi$, zda fRg nebo $f \operatorname{non} Rg$.

2. Relace R na Φ je reflexivní. Neboť pro každé $f \in \Phi$ platí fRf. Existuje totiž pro každé $f \in \Phi$ množina $X \in \mathscr{F}$ (a sice ta, na které je f definována), pro kterou platí $f_X = f_X$.

3. Relace R na Φ je symetrická. Neboť pro každá dvě zobrazení $f \in \Phi$, $g \in \Phi$ pro která platí fRg, platí rovněž gRf. Když platí fRg, existuje taková množina $X \in \mathscr{F}$, že

pro každý prvek $x \in X$ platí $f(x) = g(x)$ a tedy také $g(x) = f(x)$ pro každý prvek $x \in X$ a z toho plyne gRf.

4. Relace R na Φ je transitivní. Platí-li totiž současně fRg, gRh, platí také fRh. Když platí fRg, existuje množina $X \in \mathscr{F}$ tak, že $f_X = g_X$, když gRh, existuje množina $Y \in \mathscr{F}$ tak, že $g_Y = h_Y$. Jelikož průnik $X \cap Y \in \mathscr{F}$ podle věty 1 a jelikož platí pro zúžení funkcí f, g, h, na $X \cap Y$ vztah $f_{X \cap Y} = g_{X \cap Y} = h_{X \cap Y}$, plyne z toho $f_{X \cap Y} = h_{X \cap Y}$ a tedy fRh.

Jelikož relace R na Φ je relace ekvivalence, způsobuje rozklad množiny Φ na třídy ekvivalentních prvků (funkcí). Příslušnou faktorovou množinu množiny Φ podle této relace si označme $\psi = \Phi/R$. Třídu ekvivalentních funkcí, do které patří funkce f budeme značit $[f]$.

Lemma 3: Nechť funkce $f \in \Phi$ je definována na množině $A \in \mathscr{F}$. Nechť množina $X \subset A$ je z $\mathscr{F}$. Pak zúžení funkce f na X je z Φ, (neboli $f_X \in \Phi$).

Důkaz: Funkce f_X je definována na množině $X \in \mathscr{F}$ a nabývá hodnot z E, neboť platí pro všechny prvky $x \in X$ vztah $f_X(x) = f(x) \in f(A) \subset E$. Zbývá dokázat, že pro každou množinu $Z \in \mathscr{F}$ platí $f_X^{-1}(Z) \in \mathscr{F}$. Pro každé $Z \in \mathscr{F}$ platí $f^{-1}(Z) \in \mathscr{F}$, neboť $f \in \Phi$. Průnik $X \cap f^{-1}(Z) \in \mathscr{F}$ podle věty 2. Ale průnik $X \cap f^{-1}(Z) = f_X^{-1}(Z)$.

Věta 3: Nechť funkce $f \in \Phi$ je definována na množině $A \in \mathscr{F}$, nechť funkce $g \in \Phi$ je definována na množině $B \in \mathscr{F}$. Nechť existuje množina $X \subset B$, která patří $\mathscr{F}$ $(X \in \mathscr{F})$ a pro kterou platí $g(X) \subset A$. Označíme-li pomocí g_X zúžené zobrazení g na X, patří složené zobrazení $h = f_0 g_X$ do Φ. $(f_0 g_x = f(g_X))$.

Důkaz: Funkce $h = f_0 g_x$ je definována na množině $X \in \mathscr{F}$ a nabývá hodnot z E, neboť pro každé $x \in X$ platí $h(x) = f(g_X(x)) \in E$. Zbývá dokázat, že pro každé $Z \in \mathscr{F}$ platí $h^{-1}(Z) \in \mathscr{F}$. Ale podle [2] str. 363, odst. 11 platí $h^{-1}(Z) = g_X^{-1}(f^{-1}(Z)) = g_X^{-1}(C)$, kde $C = f^{-1}(Z) \in \mathscr{F}$. Nechť Z je libovolná množina z $\mathscr{F}$, pak $f^{-1}(Z) \in \mathscr{F}$ neboť $f \in \Phi$ a $g_X \in \Phi$, dále $g_X^{-1}(C) \in \mathscr{F}$ a tedy $h = fg_x \in \Phi$.

Věta 4: Ke každým dvěma funkcím $f \in \Phi$, $g \in \Phi$ můžeme určit ve Φ funkci h, rovnou $h = f_0 g_x$.

Důkaz: Nechť funkce $f \in \Phi$ je definována na $A \in \mathscr{F}$, funkce $g \in \mathscr{F}$ je definována na $B \in \mathscr{F}$. Pak stačí vzít za množinu $X = g^{-1}(A)$ a pro ni platí $X \subset B$, $X \in \mathscr{F}$ (neb $g \in \Phi$ a $A \in \mathscr{F}$) a rovněž $g(X) = g(g^{-1}(A)) \subset A$. Tedy funkce $h = f_0 g_X$ je určena.

Věty 2 a 3 nám umožňují následující definici:

Definice 3: Nechť f, g jsou libovolné funkce z Φ. Nechť funkce f je definována na množině $A \in \mathscr{F}$, funkce g je definována na množině $B \in \mathscr{F}$. Pak komposicí $f \perp g$ těchto dvou funkcí rozumíme funkci $h = f_0 g_X$, kde pro X platí $X \in \mathscr{F}$, $X \subset B$, $g(X) \subset A$. Zkráceně píšeme $f \perp g = f_0 g_X$.

Věta 5: Komposice $\perp$ prvků množiny Φ je kompatibilní s relací ekvivalence R, definované na této množině. Třída ekvivalentních funkcí, do které patří funkce $h = f \perp g = f_0 g_x$ je nezávislá na volbě množiny X.

Důkaz: Nejprve dokážeme druhou část věty. Vezměme tedy místo X nějakou jinou podmnožinu $Y \subset B$, $Y \in \mathscr{F}$, $g(Y) \subset A$ a dokážeme, že $(f_0 g_X)\ R(f_0 g_Y)$. Funkce $f_0 g_x$ je definována na množině $Y \in \mathscr{F}$, funkce $f_0 g_Y$ je definována na množině $X \in \mathscr{F}$, existuje tedy množina $X \cap Y = Z$, $Z \in \mathscr{F}$, $Z \subset B$ na niž obě funkce $f_0 g_X$, $f_0 g_Y$ jsou definovány a platí $g_X(Z) = g_Y(Z)$ a tedy platí $f(g_X(c) = f(g_Y(c)$ pro všechna $c \in X \cap Y = Z \in \mathscr{F}$. A tudíž platí $(f_0 g_X)\ R(f_0 g_Y)$. Jestliže f, g, h, jsou tři funkce z Φ a platí fRh, mám dokázat, že také $(f \perp g)\ R(h \perp g)$ a $(g \perp f) = (g \perp h)$. Když fRh, existuje taková množina $Z \in \mathscr{F}$, $Z \subset A \cap C$, že platí $f_Z = h_Z$. Za množinu X zvolme v prvém případě $g^{-1}(Z)$. Pak platí $X \subset B$ (kde B je definiční obor funkce g), $X \in \mathscr{F}$, neboť $g \in \Phi$, $g(X) \subset A$ (definiční obor funkce f), $g(X) \subset C$ (definiční obor funkce h) neboť $g(x) \subset Z$. Tedy funkce $f_0 g_X$ a $h_0 g_X$ jsou definovány a platí pro všechna $a \in X\ g_X(a) \in Z$. A jelikož pro všechny prvky $p \in Z$ platí $h(p) = f(p)$, máme $h(g_X(a)) = f(g_X(a))$ pro všechna $a \in X \in \mathscr{F}$ a tedy $(f \perp g)\ R(h \perp g)$. Ve druhém případě zvolme za $X = Z \cap f^{-1}(B)$. Pro X platí $X \in \mathscr{F}$ neboť $Z \in \mathscr{F}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$, $f(X) \subset B$, $h(X) \subset B$, $X \subset A$, $X \subset C$, neboť $X \subset Z$. Tudíž jsou funkce $g_0 f_X$, $g_0 h_X$ definovány a platí $(g \perp f)\ R(g \perp h)$, neboť pro všechna $d \in X$ platí $g(f_X(d)) = g(h_X(d))$.

Věta 6: Nechť pro prvky z Φ platí fRg, hRk. Pak platí $(f \perp h)\ R(g \perp k)$.

Důkaz: Podle předchozí věty platí $(f \perp h)\ R(g \perp h)$ a $(g \perp h)\ R(g \perp k)$. Vzhledem k transitivitě relace R pak platí $(f \perp h)\ R(g \perp k)$.

Poznámka: Předchozí věta nám říká, že třída, do které patří komposice prvků z Φ je nezávislá na volbě reprezentantů z té které třídy navzájem ekvivalentních prvků a druhá část věty nám říká, že je tato třída nezávislá na volbě množiny X.

Definice 4: Na množině $\psi = \Phi/R$ definujeme rovnost tříd a komposici tříd následujícím způsobem:

a) $[f] = [g] \Leftrightarrow fRg$,
b) $[f] \perp [g] = [f \perp g]$.

Třída $[f \perp g]$ se nazývá komposice třídy funkce f a třídy funkce g.

Poznámka: Rovnost tříd je základní rovnost na množině ψ.

Věta 7: Množina ψ je vzhledem k zákonu komposice $\perp$, definovaném v definici 4 pologrupa s jednotkovým prvkem.

Důkaz: Zákon komposice $\perp$ prvků množiny ψ je všude definovaným zákonem na ψ. (Podle věty 3 a 4). Rovněž je tento zákon kompatibilní se zavedenou rovností na ψ. (Podle věty 5). Zbývá dokázat, že zákon komposice je asociativní a že existuje v ψ jednotkový prvek vzhledem k tomuto zákonu.

Chceme dokázat, že platí $[k] \perp ([h] \perp [g]) = ([k] \perp [h]) \perp [g]$ pro každé tři třídy $[k]$, $[h]$, $[g]$ z množiny ψ.

Nechť funkce g, h, k z Φ jsou representanti příslušných tříd $[g]$, $[h]$, $[k]$ z ψ. Přitom nechť funkce g je definována na $G \in \mathscr{F}$, funkce h na $H \in \mathscr{F}$ a funkce k na $K \in \mathscr{F}$. Jelikož $h \in \Phi$, platí $h^{-1}(K) \in \mathscr{F}$. Označme $Y = h^{-1}(K) \cap H$, pak $y \subset H$, $h(Y) \subset K$ a podle věty 1 je $Y \in \mathscr{F}$ a tedy $g^{-1}(Y) \in \mathscr{F}$ neboť $g \in \Phi$. Označme $X = g^{-1}(Y) \cap G$. Pak $X \subset G$ $X \in \mathscr{F}$ a $g(X) \subset Y \subset H$. Tedy platí $[h] \perp [g] = [h \perp g] = [h_0 g_X] = [l]$. Funkce l je zobrazení X do K neboť platí pro každé $x \in X$: $l(x) = h_0(g_{X0}(x)) \in h(Y) \subset K$ a tedy platí $(l(X) \subset K)$ $[k] \perp [l] = [k] \perp (h_0 g_X] = [k \perp (h_0 g_X)] = [k_0(h_0 g_X)]$. Přitom g_X je zobrazení X do Y, zúžené zobrazení h_Y je zobrazení Y do K a z toho plyne $h_{Y0} g_X = h_0 g_X$.

Jelikož skládání zobrazení je asociativní (viz [3] str. 31), platí na množině $X \in \mathscr{F}$ $k_0(h_0 g_X) = k_0(h_{Y0} g_X) = (k_0 h_Y)_0\, g_X$ a tedy platí $[k] \perp ([h] \perp [g]) = ([k] \perp [h]) \perp [g]$. Což bylo dokázati, neboť platí $[k] \perp ([h] \perp [g]) = [k_0(h_0 g_X)] = [(k_0 h_Y)_0\, g_X] = [k_0 h_Y] \perp$ $\perp [g] = [k \perp h] \perp [g] = ([k] \perp [h]) \perp [g]$. Nechť i je identické zobrazení na množině E. Pak $i \in \Phi$ a $[i] \in \psi$ je jednotkový prvek v ψ vzhledem k zákonu komposice $\perp$ na ψ. Funkce i je definována na množině $E \subset E$ a nabývá hodnot z E. Pro každou množinu $X \in \mathscr{F}$ platí $i^{-1}(X) = X \in \mathscr{F}$, tedy $i \in \Phi$ a $[i]$ je jeho třída. Pro každou třídu $[f] \in \psi$ pak platí a) $[i] \perp [f] = [f]$, b) $[f] \perp [i] = [f]$.

a) Ze třídy $[f]$ vybereme jako representanta zobrazení $f \in \Phi$, které je definováno na množině $A \in \mathscr{F}$ a nabývá hodnot $f(A) \subset E$. Pak platí $[i] \perp [f] = [i \perp f] = [i_0 f_A] = [f]$, neboť zobrazení $i_0 f_A$ a f nabývají pro všechna $c \in A \in \mathscr{F}$ týchž hodnot.

b) Pro $A \in \mathscr{F}$ jsou zobrazení i a i_A ekvivalentní neboť nabývají pro všechna $c \in A$ týchž hodnot. Za representanta třídy $[i]$ můžeme vzít tudíž zobrazení $i_A \in \Phi$. Pak platí $[f] \perp [i] = [f \perp i] = [f_0 i_A] = [f]$ neboť pro všechna $c \in A \in \mathscr{F}$ nabývají zobrazení $f_0 i_A$ a f týchž hodnot (zobrazení f je definováno na $A \in \mathscr{F}$).

Věta 8: Pro každé $a \in E$ levá translace γ_a patří Φ.

Důkaz: Nechť a je libovolný prvek z E. Levá translace γ_a je zobrazení které každému prvku $x \in E$ přiřazuje prvek $a \top x \in E$. Je to tedy zobrazení definované na $E \in \mathscr{F}$ a nabývající hodnot z E. ($E \in \mathscr{F}$ neboť $E \subset E$ a existuje $y^* \in E^*$ tak, že $E \top y^* \subset E$, neboť $E^* \neq 0$).

Zbývá dokázat, že pro libovolné $X \in \mathscr{F}$ platí $\gamma_a^{-1}(X) \in \mathscr{F}$, neboli $\gamma_a^{-1}(x) \subset E$ a že se dá najít $y^* \subset E^*$ tak, že $E \top y^* \subset \gamma_a^{-1}(X)$.

Nechť tedy $X \in \mathscr{F}$ pak existuje takové $y_1^* \in E^*$, že $E \top y_1^* \subset X$. Množina $\gamma_a^{-1}(X)$ je množina všech $c \in E$, pro která platí $a \top c \in X$. Tedy $\gamma_a^{-1}(x) \subset E$. Víme, že platí $a \top E \subset E$, dále $(a \top E) \top y_1^* \subset E \top y_1^* \subset X$. Jelikož jsme na E předpokládali asociativní zákon, označený symbolem $\top$, platí $(a \top E) \top y_1^* = a \top (E \top y_1^*)$ pro všechny prvky z E. Tedy $a \top (E \top y_1^*) \subset X$. Pro každý prvek $b \in E \top y_1^* \subset E$ tedy platí $a \top b \subset$ $\subset X \Rightarrow b \in \gamma_a^{-1}(X) \Rightarrow E \top y_1^* \subset \gamma_a^{-1}(X)$.

Za y^* stačí tedy položit $y_1^* \subset E^*$.

Věta 9: Označíme-li množinu všech tříd tvaru $[\gamma_x]$ z ψ pro všechna možná $x \in E$ jako $\overline{\Psi}$, je zobrazení $x \to [\gamma_x]$ isomorfní zobrazení E na $\overline{\Psi}$.

Důkaz: Ke každému $x \in E$ je přiřazeno jediné γ_x a tím také jediná třída $[\gamma_x] \in \overline{\Psi}$. Přitom je zobrazení $x \to [\gamma_x]$ zobrazení E na ψ, protože ke každé třídě $[\gamma_x]$ lze přiřadit jistý prvek z E jako vzor. Navíc je toto zobrazení $x \to [\gamma_x]$ vzájemně jednoznačné. Když $a \neq b$ $[\gamma_a] \neq [\gamma_b]$, neboť kdyby platilo $[\gamma_a] = [\gamma_b]$, musila by existovat taková množina $X \in \mathscr{F}$, pro kterou by platilo $(\gamma_a)_x = (\gamma_b)_x$ pro všechny prvky z X. Jelikož $X \in \mathscr{F}$, existuje takové $y^* \subset E^*$, že $E \top y^* \subset X$. Jelikož $E^* \subset E$, $E^* \neq 0$, muselo by pro regulární prvek $c \in E^*$ platit $c \top y^* \in X$. Přitom je $c \top y^*$ regulární, neboť komposice dvou regulárních prvků je regulární prvek v E. Pak z $(\gamma_a)_x = (\gamma_b)_x$ plyne pro regulární prvek $c \top y^* \in X$ rovnost $a \top (c \top y^*) = b \top (c \top y^*) \Rightarrow a = b$. Neboť $c \top y^* \in E^*$ a to by byl spor s předpokladem $a \neq b$.

Množiny E a $\overline{\Psi}$ jsou tedy ekvivalentní a zbývá dokázat, že platí $[\gamma_{x \top y}] = [\gamma_x] \perp [\gamma_y]$ pro každé dva prvky $x, y \in E$. Ale $[\gamma_{x \top y}] = [\gamma_{x\,0}\gamma_y]$ neboť platí pro libovolný prvek $z \in E$ vztah $\gamma_{x \top y}(z) = [x \top y) \top z = x \top (y \top z) = \gamma_x(\gamma_y(z))$ a tedy pro všechna $z \in E$ platí vztah $\gamma_{x \top y} = \gamma_{x\,0}\gamma_y$. Jelikož zobrazení γ_x je zobrazení E do E, γ_y je také zobrazení E do E, $E \in \mathscr{F}$, platí vztah $[\gamma_{x\,0}\gamma_y] = [\gamma_x \perp \gamma_y] = [\gamma_x] \perp [\gamma_y]$. Což bylo dokázati. Tedy množiny E a $\overline{\Psi}$ jsou isomorfní.

Věta 10: Když prvek $a \in E^*$, tak ke třídě $[\gamma_a] \in \overline{\Psi}$ existuje v ψ třída symetrická.

Důkaz: Nejprve dokážeme, že zobrazení, inversní k zobrazení γ_a patří k Φ a pak, že jeho třída (vzhledem k relaci R na Φ) je symetrická ke třídě $[\gamma_a]$.

Zobrazení γ_a je zobrazení E na množinu $a \top E$ a je prosté, protože a je regulární prvek z E. Z toho plyne, že k němu existuje zobrazení inversní, které budeme značit γ'_a. Zobrazení inversní γ'_a je definováno na množině $a \top E \subset E$ a nabývá hodnot z E. Přitom $a \top E \in \mathscr{F}$, neboť $a \top E \subset E$ a existuje $a \in E^*$ tak, že $\delta_a(E) \subset a \top E$, protože platí $a \top E = E \top a$.

Zbývá dokázat, že pro libovolné $X \in \mathscr{F}$ platí $[\gamma_a'^{-1}) (X) \in \mathscr{F}$. Ale $(\gamma_a'^{-1}) (X) = P$ je množina všech $a \top y \in a \top E$, kde $y \in E \cap X$ neboli $P = a \top (X \cap E)$. Jelikož $X \cap E \in \mathscr{F}$, existuje $y_1^* \in E^*$ tak, že $E \top y_1^* \subset X \cap E \Rightarrow a \top (E \top y_1^*) \subset a \top (X \cap E) = P$. Ale $a \top (E \top y_1^*) = E \top (a \top y_1^*)$, neboť prvek a je regulární a tudíž podle předpokladu také centrální.

Nalezli jsme tedy prvek $a \top y_1^* \in E^*$, pro který $E \top (a \top y_1^*) \subset P$, $P \subset E$ a z toho všeho plyne, že zobrazení γ'_a patří Φ. Jeho třídu budeme značit $[\gamma'_a]$. Zobrazení γ_a přiřazuje každému prvku $z \in E$ prvek $a \top z$ (je definováno na množině E), zobrazení γ'_a přiřazuje každému prvku $a \top z \in a \top E$ prvek z E (je definováno na množině $a \top E \in \mathscr{F}$). Přitom platí $[\gamma'_a] \perp [\gamma_a] = [\gamma'_a \perp \gamma_a] = [\gamma'_{a0}\gamma_a] = [i]$, kde i je identické zobrazení na E. Pro každé $z \in E$ totiž platí $(\gamma'_{a0}\gamma_a)(z) = \gamma'_a(\gamma_a(z)) = \gamma'_a(a \top z)$ a tedy zobrazení $\gamma'_{a0}\gamma_a$ a zobrazení i nabývají na množině $E \in \mathscr{F}$ týchž hodnot $\Rightarrow [\gamma'_{a0}\gamma_a] = [i]$.

Dále platí $[\gamma_a] \perp [\gamma'_a] = [\gamma_a \perp \gamma'_a] = [\gamma_{a0}\gamma'_a] = [i]$, neboť pro každé $z \in a \top E \in \mathscr{F}$ nabývají zobrazení $\gamma_{a0}\gamma'_a$ a zobrazení i týchž hodnot. Pro každé $z = a \top p \in a \top E$ totiž platí $(\gamma_{a0}\gamma'_a)(z) = \gamma_a(\gamma'_a(z)) = \gamma_a(\gamma'_a(a \top p)) = \gamma_a(p) = a \top p = z$. Čímž jsme dokázali, že třída $[\gamma'_a]$ je symetrickou třídou ke třídě $[\gamma_a]$ vzhledem k zákonu komposice $\perp$ na množině ψ.

Tím jsme úlohu, kterou jsme si vytýčili na počátku splnili a dokázali jsme si následující větu:

Věta 11: Nechť T je všude definovaný asociativní zákon komposice prvků množiny E, přičemž každý regulární prvek množiny E vzhledem k tomuto zákonu je centrální. Pak je možno určit množinu $\bar{E}$ a asociativní zákon komposice $\bar{\mathrm{T}}$ prvků této množiny, přičemž každý regulární prvek množiny $\bar{E}$ vzhledem k $\bar{\mathrm{T}}$ je centrální tak, že jsou splněny následující podmínky:

1. Existuje isomorfismus f množiny E (opatřené zákonem T) na uzavřenou podmnožinu $A \subset \bar{E}$ (A je opatřená zákonem, indukovaným zákonem $\bar{\mathrm{T}}$), který každému regulárnímu prvku z E přiřazuje prvek z A, který je symetrizovatelný v $\bar{E}$.

2. *$\bar{E}$ je nejmenší uzavřená množina vzhledem k zákonu komposice $\bar{\mathrm{T}}$, která obsahuje A a A', kde A' je množina všech prvků, které jsou symetrické ke všem možným regulárním prvkům z A. $\bar{E}$ má tvar $A\ \bar{\mathrm{T}}\ A'$.*

Přitom množina $\bar{E}$ je podmínkami 1) a 2) určena jednoznačně, s přesností až na isomorfismus a každý regulární prvek z $\bar{E}$ je symetrizovatelný.

Důkaz: Z vět 3 – 10 je vidět, že množina ψ a na ní definovaný zákon komposice $\perp$, který je asociativní, vyhovují podmínce 1) naší věty. Aby byla splněna i podmínka 2), stačí za $\bar{E}$ vzít množinu $\bar{\Psi} \perp \bar{\Psi}'$ (viz větu pomocnou 1), kde $\bar{\Psi}'$ je množina všech prvků, které jsou symetrické ke všem regulárním prvkům z $\bar{\Psi}$, za množinu $A \subset \bar{E}$ vzít množinu $\bar{\Psi} \subset \bar{\Psi} \perp \bar{\Psi}'$ a místo zákona $\bar{\mathrm{T}}$ na $\bar{E}$ uvažovat zákon komposice $\perp$ na $\bar{\Psi} \perp \bar{\Psi}'$. Že každý regulární prvek z $\bar{E}$ je symetrizovatelný plyne z lemmatu 2.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] *Bourbaki N.:* „Algebra – algebraické struktury, lineární a pololineární algebra". Překlad z franc. Moskva 1962.
[2] *Bourbaki N.:* „Teorie množin". Překlad z franc. Moskva 1965.
[3] *Borůvka O.:* „Úvod do theorie grup". Přírodovědecké nakladatelství. Praha 1952.

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СИММЕТРИЗАЦИИ

ФРАНТИШЕК КРУТСКЫ

В статье доказана теорема:

Пусть T — всюду определеный ассоциативный закон композиции элементов множества E и каждый регулярный элемент множества E относительно закона T — центральный элемент, то можно определить множество $\bar{E}$ и ассоциативный закон композиции $\bar{\mathrm{T}}$ элементов этого множества так, что каждый регулярный

элемент множества $\bar{E}$ относительно закона $\bar{\top}$ — центральный, так чтобы выполнялись следующие условия:

1. существует изоморфизм f множества E (наделенного законом $\top$) на замкнутое подмножество $A \subset \bar{E}$ (A наделено законом, индуцированным законом $\bar{\top}$), относящий каждому регулярному элементу из E элемент из A, симметризуемый в $\bar{E}$.

2. $\bar{E}$ порождается объединением A и множества A' элементов симметричных всевозможным регулярным элементам из A. $\bar{E}$ имеет вид $A \bar{\top} A'$.

При этом множество $\bar{E}$ определено условиями № 1. и 2. однозначно, с точностью до изоморфизма и каждый регулярный элемент из $\bar{E}$ симметризуем.

Zusammenfassung

DIE VERALLGEMEINERUNG DES SYMMETRISATIONSATZES

FRANTIŠEK KRUTSKÝ

In diesem Beitrag wird folgender Satz bewiesen:

Es sei $\top$ ein überall definiertes assoziatives Kompositiongesetz der Elemente einer Menge E, wobei jedes reguläre Element der Menge E in bezug auf dieses Gesetz zentral ist. Alsdann ist es möglich, die Menge $\bar{E}$ und das assoziative Kompositionsgesetz $\bar{\top}$ der Elemente dieser Menge zu bestimmen, wobei jedes reguläre Element von $\bar{E}$ in bezug auf $\bar{\top}$ zentral ist, derart, daß folgende Bedingungen erfült sind:

1. Es existiert ein Isomorphismus f der Menge E (mit definiertem Gesetz $\top$) auf eine geschlossene Untermenge $A \subset \bar{E}$ (A versehen mit dem Gesetz, welches durch das Gesetz $\bar{\top}$ in A induziert wird), der jedem regulären Element der Menge E ein in $\bar{E}$ symmetrisierbares Element von A zuordnet.

2. $\bar{E}$ ist die kleinste geschlossene Menge in bezug auf das Kompositionsgesetz $\bar{\top}$, enthaltend A und A', wo A' eine Menge aller Elemente ist, die zu allen möglichen regulären Elementen von A symmetrisch sind. Die Menge $\bar{E}$ hat die Form $A \bar{\top} A'$.

Dabei ist die Menge $\bar{E}$ durch die Bedingungen 1. und 2. mit einer Genauigkeit bis auf den Isomorphismus eindeutig bestimmt und jedes reguläre Element von $\bar{E}$ ist symmetrisierbar.