Jiří Kobza

O polynomických řešeních homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 11 (1971), No. 1, 37--49

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119962`

1971 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 33

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

O POLYNOMICKÝCH ŘEŠENÍCH HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

JIŘÍ KOBZA

(Předloženo 31. března 1970)

KAPITOLA PRVNÍ

Pro diferenciální rovnici

$$p(x)u'' + q(x)u' + [r(x) + \lambda'] u = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ jsou spojitými funkcemi v intervalu j a λ' je reálný parametr, byl v pracích [1], [3] řešen problém, který budeme označovat problém (P): Nalézt všechny takové trojice funkcí $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, spojitých v intervalu j, pro které existuje posloupnost reálných čísel $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ a posloupnost polynomů reálné proměnné $\{P_\nu(x)\}_{\nu=0}^{\infty}$ tak, že pro $\lambda = \lambda'_n$ je $P_n(x)$ partikulárním řešením dif. rovnice (1) v intervalu j [$P_n(x)$ je polynom stupně n].

Poznámka: Dvě posloupnosti $\{P_\nu(x)\}$, $\{Q_\nu(x)\}$, které odpovídají téže posloupnosti $\{\lambda'_\nu\}$, budeme považovat za totéž řešení problému (P), jestliže pro všechna $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ je $Q_\nu(x) = k_\nu P_\nu(x)$, kde k_ν jsou nenulové konstanty. O řešitelnosti problému (P) pro dif. rovnici (1) platí následující věty (viz [3]).

Věta 1: Jestliže problém (P) má pro dif. rovnici (1) řešení, pak v intervalu j platí $r(x) = r =$ konst., $q(x) = \delta + \varepsilon x$, $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, kde $\delta, \varepsilon, \alpha, \beta, \gamma$ jsou reálné konstanty.

Označme $r + \lambda' = \lambda$; podle věty 1 může mít problém (P) řešení jen pro dif. rovnici

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, u'' + (\delta + \varepsilon x)\, u' + \lambda u = 0. \tag{u}$$

Věta 2: Problém (P) pro dif. rovnici (u) při $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$ nemá řešení.

Lineární transformací nezávisle proměnné lze každou dif. rovnici (u) převést na jeden z t. zv. normálních typů této rovnice. Stačí pak studovat řešitelnost problému (P) jen pro tyto normální typy. V dalším uvedeme úplný výčet normálních typů dif. rovnice (u) a příslušná řešení problému (P).

1. Pro $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\varepsilon \neq 0$ je normálním typem rovnice (u) dif. rovnice

$$xu' + \lambda u = 0. \tag{I}$$

Ta má pro $\lambda = \lambda_n = -n$ partikulární řešení $u = P_n(x) = x^n$.

2. Pro $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$, $\varepsilon \neq 0$ je normálním typem rovnice (u) rovnice

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0, \text{ je-li } \alpha\varepsilon < 0, \tag{II$_1$}$$

rovnice

$$u'' + 2xu' + \lambda u = 0, \text{ je-li } \alpha\varepsilon > 0. \tag{II$_2$}$$

Rovnice (II_1) má pro $\lambda = \lambda_n = 2n$ za partikulární řešení Hermiteův polynom

$$u(x) = H_n(x) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^\nu 2^{n-\nu}(2\nu - 1)!! \binom{n}{2\nu} x^{n-2\nu}.$$

Rovnice (II_2) má pro $\lambda = \lambda_n = -2n$ partikulární řešení

$$u(x) = \bar{H}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} 2^{n-\nu}(2\nu - 1)!! \binom{n}{2\nu} x^{n-2\nu}.$$

3. Pro $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ je normálním typem rovnice (u) dif. rovnice

$$xu'' + (k + 1 - x)\, u' + \lambda u = 0. \tag{III}$$

Věta 3: Problém (P) pro dif. rovnici (III) má při libovolném k jediné řešení. Je-li $k \neq -1, -2, \ldots$, je pro $\lambda = \lambda_n = n$ partikulárním řešením rovnice (III) Laguerrův polynom n-tého stupně

$$u(x) = L_n^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \binom{n + k}{n + \nu} x^\nu.$$

Je-li $k = -N$, $N = 1, 2, \ldots$, je pro $\lambda = \lambda_n = n$ partikulárním řešením rovnice (III)

$$u(x) = P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu, \qquad a_\nu = \binom{n}{\nu} \frac{1}{(N-1)\ldots(N-\nu)} \qquad \text{pro } n \leqq N - 1,$$

$$u(x) = P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-N} a_{N+\nu} x^{N+\nu}, \qquad a_{N+\nu} = (-1)^\nu \binom{n-N}{\nu} \frac{1}{(N+1)\ldots(N+\nu)}$$

$$\text{pro } n > N - 1.$$

4. Pro $\gamma \neq 0$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \gamma(x - a)^2$ je normálním typem rovnice (u) rovnice

$$x^2u'' + (k + 1)\, xu' + \lambda u = 0, \text{ je-li } \delta + a\varepsilon = 0, \tag{IV$_1$}$$

rovnice

$$x^2u'' + [(k + 1)\, x - 1]\, u' + \lambda u = 0, \text{ je-li } \delta + a\varepsilon \neq 0. \tag{IV$_2$}$$

Věta 4: Problém (P) pro dif. rovnici (IV_1)

1° má jediné řešení, je-li $k \neq -N$, $N = 1, 2, \ldots$. Pro $\lambda = \lambda_n = -n(n + k)$ je partikulárním řešením rovnice (IV_1) $u(x) = x^n$;

2° má nekonečně mnoho řešení, je-li $k = -N$. Pro $\lambda = \lambda_n = -n(n + k)$ je partikulárním řešením rovnice (IV_1) $u(x) = x^n$ a pro $\frac{N}{2} < n \leqq N$ též $u(x) = x^n + k_m x^m$, kde k_m je lib. konstanta, $m = N - n$.

Problém (P) pro dif. rovnici (IV_2)

1° má jediné řešení, je-li $k \neq N$, $N = 1, 2, \ldots$; pro $\lambda = \lambda_n - n(n + k)$ je partikulárním řešením rovnice (IV_2)

$$u(x) = P_n^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu} \nu! \binom{n}{\nu} \binom{-n-k}{\nu} x^\nu.$$

2° nemá řešení, je-li $k = -N$, $N = 1, 2, \ldots$, neboť hodnotám $\lambda = \lambda_n = -n(n + k)$ pro $\frac{N}{2} < n \leqq N$ odpovídají polynomy stupně nižšího než n.

5. Pro $\gamma \neq 0$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$ je normálním typem rovnice (u) při $\Delta > 0$ rovnice

$$x(1 - x)\, u'' + [k - (s + 1)\, x]\, u' + \lambda u = 0, \tag{V_1}$$

při $\Delta < 0$ rovnice

$$(x^2 + 1)\, u'' + (d + ex)\, u' + \lambda u = 0. \tag{V_2}$$

Věta 5: Problém (P) pro dif. rovnici (V_1)

1° má jediné řešení při $k \neq -N$, $s \neq -M$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, $M = 1, 2, \ldots$. Pro $\lambda = \lambda_n = n(n + s)$ je partikulárním řešením rovnice (V_1) Jacobiho polynom n-tého stupně

$$u(x) = P_n(k, s; x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{(n + s)_{(\nu)}}{k_{(\nu)}} x^\nu,$$

kde $z_{(\nu)} = z(z + 1) \ldots (z + \nu - 1)$.

2° má jediné řešení pro $k = -N$, $s \neq -M$; pro $\lambda = \lambda_n = n(n + s)$ je partikulárním řešením rovnice (V_1)

$$u(x) = P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left[\binom{N}{\nu}\right]^{-1} \binom{n + s + \nu - 1}{\nu} x^\nu, \qquad \text{je-li } n \leqq N,$$

$$u(x) = P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-N-1} \frac{(N - n - 1)_{(\nu)} (N + n + s + 1)_{(\nu)}}{\nu! (N + 2)_{(\nu)}} x^{N+1+\nu}, \qquad \text{je-li } n > N.$$

3° nemá řešení pro $k \neq -N$, $s = -M$; pro $\left[\frac{M}{2}\right] < n \leqq M$ odpvídá hodnotě $\lambda = \lambda_n$ polynom stupně nižšího než n.

4° má pro $k = -N$, $s = -M$ řešení právě tehdy, je-li M rovno jednomu z čísel $2N$, $2N + 1$, $2N + 2$. V těchto případech má problém (P) pro dif. rovnici (V_1) nekonečně mnoho řešení. Pro $\lambda = \lambda_n = n(n + s)$ počítáme koeficienty partikulárního řešení rovnice (V_1) $u(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu n} x^\nu$ z rekurentního vztahu $(\nu + 1)(\nu - N)\, a_{\nu+1,x} = (\nu - n)(n + \nu - M)\, a_{\nu n}$, ve kterém můžeme libovolně zvolit koeficienty a_{0n}, $a_{N+1,n}$.

Věta 6: Problém (P) pro dif. rovnici (V_2)

1° *má jediné řešení, je-li* $e \neq -M$, $M = 1, 2, 3, \ldots$; *pro* $\lambda = \lambda_n = -n(n + e - 1)$ *je partikulárním řešením rovnice* (V_2) $u(x) = \sum_{v=0}^{n} a_{vn}x^v$, *kde* a_{vn} *se pro* $v = n - 1$, $n - 2, \ldots, 1$ *počítají z rekurentních vztahů*

$$a_{n-1,n} = \frac{nd}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} a_{nn}, \qquad a_{vn} = \frac{v+1}{\lambda_v - \lambda_n}[(v+2)a_{v+2,n} + da_{v+1,n}];$$

2° *má jediné řešení, je-li* $e = -M$, M *je sudé číslo*, $d = 0$; *pro* $\lambda = \lambda_n = -n(n + e - 1)$ *je partikulárním řešením rovnice* (V_2) $u(x) = \sum_{v=0}^{n} a_{vn}x^v$, *kde* a_{vn} *se počítají z rekurentního vztahu* $(\lambda_v - \lambda_n)\, a_{vn} = (v + 2)(v + 1)\, a_{v+2,n}$, $v = n - 2$, $n - 4, \ldots$ *(vyskytují se jen mocniny stejné parity jakou má n)*;

3° *nemá řešení, je-li* $e = -M$, M *je liché číslo*, $d = 0$, *nebo* $e = -M, d \neq 0$; *v těchto případech pro* $\frac{M+1}{2} < n \leqq M + 1$ *odpovídají hodnotám* $\lambda = \lambda_n$ *polynomy stupně nižšího než n.*

KAPITOLA DRUHÁ

Uvažujme diferenciální rovnici

$$p(x)y'' + q(x)y' + [r(x) + \lambda] = 0, \tag{y}$$

kde koeficienty $p(x)$, $q(x) \in C^{(1)}(j)$, $p(x) \neq 0$ pro $x \in j$, $r(x) \in C(j)$.*) Mějme problém (fP):

Nalézt všechny trojice funkcí $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, pro které existuje

- posloupnost reálných čísel $\{\lambda_v\}_{v=0}^{\infty}$
- posloupnost polynomů $\{P_v(x)\}_{v=0}^{\infty}[P_n(x)$ je polynom stupně $n]$
- funkce $f(x) \neq$ konst.

tak, že pro $\lambda = \lambda_n$ je $y(x) = y_n(x) = f(x) \,.\, P_n(x)$ partikulárním řešením rovnice (y).

Věta 7: Nechť $f(x) \in C^{(2)}(j)$, $f(x) \neq 0$ *pro* $x \in j$. *Problém (fP) pro rovnici (y) má v intervalu j právě tehdy řešení* $\{\lambda_v\}$, $\{fP_v\}$ *když platí*

1° $f(x)$ *je na intervalu j řešením dif. rovnice*

$$p(x)f'' + q(x)f' + [r(x) + \lambda_0]f = 0. \tag{f}$$

*) Symbolem $C^{(k)}(j)$ označujeme třídu všech funkcí, které mají v intervalu j spojité k-té derivace, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2° *pro* $\mu = \mu_n = \lambda_n - \lambda_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ *je* $P_n(x)$ *partikulárním řešením rovnice*

$$p(x)\,u'' + \left[2p(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + q(x)\right]u' + \mu u = 0. \qquad (u_f)$$

Důkaz: Má-li rovnice (y) partikulární řešení $y = fu$, pak u je partikulárním řešením rovnice

$$pfu'' + (2pf' + qf)\,u' + [pf'' + qf' + (r + \lambda)f]\,u = 0. \qquad (2)$$

Z předpokladu o řešitelnosti problému (fP) pro rovnici (y) plyne pro $\lambda = \lambda_0$, $y = fP_0$ platnost vztahu $[pf'' + qf' + (r + \lambda_0)f]\,P_0 = 0$ a tedy platnost podmínky 1°. Rovnici (2) můžeme pak psát takto

$$pfu'' + (2pf' + qf)\,u' + (\lambda - \lambda_0)\,fu + [pf'' + qf' + (r + \lambda_0)f]\,u = 0.$$

Užijeme-li dokázaného tvrzení 1° a předpokladu $f \neq 0$, plyne odtud důkaz tvrzení 2°.

Platí-li naopak 1°, 2°, pak pro $y = fP_n$, $\lambda = \lambda_n$ platí $py'' + qy' + (r + \lambda_n)\,y = p(f''P_n + 2f'P_n' + fP_n'') + q(f'P_n + fP_n') + (r + \lambda_n)\,P_n = pfP_n'' + (2pf' + qf)\,P_n' + (\lambda_n - \lambda_0)\,fP_n + [pf'' + qf' + (r + \lambda_0)f]\,P_n = 0$, t. j. problém ($fP$) pro rovnici ($y$) má řešení $\{\lambda_\nu\}$, $\{fP_\nu\}$.

Poznámka: Podle věty 1 z kapitoly prvé je pro splnění podmínky 2° věty 7 nutné, aby platilo

$$p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \qquad (k)$$

$$2p(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + q(x) = \delta + \varepsilon x \qquad (1n)$$

pro jistá reálná čísla α, β, γ; δ, ε.

Věta 8: Nechť $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, $p(x) \neq 0$ pro $x \in j$, $q(x) \in C^{(1)}(j)$. *Problém* (fP) *pro rovnici* (y) *má právě tehdy řešení, když platí*

1° $$f(x) = \exp\frac{1}{2}\int\frac{1}{p}(\delta + \varepsilon x - q)\,\mathrm{d}x, \qquad (f_{1n})$$

2° *problém* (P) *pro rovnici* (u_f) *má pro zvolená* δ, ε *řešení,*

3° $$r(x) + \lambda_0 = (\delta + \varepsilon x - q)(2p' - q - \delta - \varepsilon x)/4p - \frac{1}{2}(\varepsilon - q'). \qquad (r)$$

Důkaz: Má-li problém (fP) pro rovnici (y) řešení, pak z věty 7 vyplývá platnost podmínky 2°; dále platí ($1n$), odkud úpravou a integrací dostaneme podmínku 1°. Úpravou a derivací vztahu (1n) dostaneme

$$f' = f(\delta + \varepsilon x - q)/2p,$$

$$f'' = f[(\varepsilon - q')\,p - p'(\delta + \varepsilon x - q)]/2p^2 + f(\delta + \varepsilon x - q)^2/4p^2.$$

Dosazením do (f) dostaneme pro funkci r(x) podmínku 3°.

Naopak, platí-li podmínky 1°, 2°, 3°, pak pro funkci $f(x)$ platí

$$pf'' + qf' + (r + \lambda_0) f = \frac{1}{2}(\varepsilon - q') f - p'f(\delta + \varepsilon x - q)/2p + f(\delta + \varepsilon x - q)^2/4p +$$

$$+ qf(\delta + \varepsilon x - q)/2p + f(\delta + \varepsilon x - q)(2p' - q - \delta - \varepsilon x)/4p - \frac{1}{2} f(\varepsilon - q') =$$

$$= f(\delta + \varepsilon x - q)^2/4p + qf(\delta + \varepsilon x - q)/4p - f(\delta + \varepsilon x - q)(\delta + \varepsilon x)/4p = 0,$$

tedy funkce $f(x)$ vyhovuje rovnici (f). Podmínka 1° je ekvivalentní vztahu (1n), podmínka 2° zabezpečuje splnění podmínky 2° věty 7. Podle věty 7 tedy problém (fP) pro rovnici (y) má řešení.

V tabulce I uvádíme závislost normálního typu dif. rovnice (u_f) a funkce $f(x)$ na koeficientech α, β, γ; δ, ε a funkci $q(x)$. Funkce $r(x)$ ve všech případech musí vyhovovat vztahu (r).

Poznámka k tabulce I: u norm. typů I, II, III nemá problém (P) pro dif. rovnici (u_f) řešení, je-li $\varepsilon = 0$. V ostatních případech tuto skutečnost vyznačujeme v tabulce vodorovnou čarou.

Příklady:

1. Dif. rovnice $(x + 1) y' + [\ln(x + 1) + \lambda] y = 0$ má v intervalu $j = (-1, +\infty)$ pro $\lambda = 1 - n$ partikulární řešení

   $y(x) = (1 + x)^{n - \frac{1}{2}\ln(1+x) - 1}$

2. Dif. rovnice

   $$y'' + 2xy' + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}x^2 + \lambda\right) y = 0$$

   má v intervalu $j = (-\infty, +\infty)$ pro $\lambda = n$ partikulární řešení

   $$y(x) = \exp\left(-\frac{3}{4}x^2\right) H_n\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

   (H_n ... viz kap. první).

3. Dif. rovnice

   $$(1 + 2x) y'' + x(1 - x) y' + \left[\frac{(1 - x)^2}{4(1 + 2x)}(3 - x + x^2) + 1 - x + \lambda\right] y = 0$$

   má v intervalu $j = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ pro $\lambda = n$ partikulární řešení

   $$y(x) = (1 + 2x)^{9/16} . \exp\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{8}x\right) L_n^{(-1/4)}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right),$$

   (L_n ... Laguerrův polynom, viz kapitolu první)

Tab. I

$p(x)$, označení	$\varepsilon, \delta; k, s$	Norm. typ	Druh polynomů, věta	$f(x)$	j, poznámka
$p(x) \equiv 0$	$\varepsilon \neq 0$	I	x^n	$\exp\left[-\int \frac{r(x) + \lambda_0}{\delta + \varepsilon x}\,\mathrm{d}x\right]$	$-\delta/\varepsilon \notin j$, $r(x) \in C(j)$ lib.
$p(x) \equiv \alpha \neq 0$	$\varepsilon \neq 0$ $\quad \alpha\varepsilon < 0$ $\alpha\varepsilon > 0$	II₁ II₂	$H_n(x)$ $\bar{H}_n(x)$	$\exp\left[\frac{\varepsilon x^2}{4\alpha} + \frac{\delta x}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\int q(x)\,\mathrm{d}x\right]$	$j = (-\infty, \infty)$
$p(x) = \alpha + \beta x, \beta \neq 0$ $k + 1 = \delta/\beta - \alpha\varepsilon/\beta^2$	$k \neq 1, -2, \ldots$ $k = -1, -2, \ldots$	III	$L_n^{(k)}(x)$ $P_n(x)$, věta 3	$(\alpha + \beta x)^{-(k+1)/2} \exp\left[\frac{\varepsilon x}{2\beta} - \frac{1}{2}\int \frac{q(x)}{\alpha + \beta x}\,\mathrm{d}x\right]$	$-\alpha/\beta \notin j$
$p(x) = \gamma(x - a)^2, \gamma \neq 0$ $k + 1 = \varepsilon/\gamma$	$\delta + a\varepsilon = 0$ $\quad k \neq -N$ $N = 1, 2, \ldots$ $\quad k = -N$ $k \neq +N$ $\delta + a\varepsilon \neq 0$ $\quad k = -N$	IV₁ IV₂	x^n $k^n + k_m x^m, m = N - n$ $P_n^{(k)}(x)$, věta 4 –	$(x - a)^{\varepsilon/2\gamma} \,.\, \exp\left[-\frac{\delta + a\varepsilon}{2\gamma}\frac{1}{x - a} - \frac{1}{2}\int \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x\right]$	$a \notin j$
$p(x) = \gamma(x - a)(x - b)$, $\gamma \neq 0, a < b$ $k = (\delta + a\varepsilon)/\gamma(b - a)$ $s + 1 = \varepsilon/\gamma$	$k \neq -N, s \neq -M$ $N = 0, 1, \ldots$ $k = -N, s \neq -M$ $k \neq -N, s = -M$ $M = 1, 2, \ldots$ $k = -N, s = M$	V₁	$P_n(k, s; x)$ věta 5 – věta 5	$(x - a)^A (x - b)^B \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x\right]$ $A = (\delta + a\varepsilon)/2\gamma(a - b) = \frac{1}{2}k;$ $B = (\delta + b\varepsilon)/2\gamma(b - a) = \frac{1}{2}(s + 1 - k)$	$a, b \notin j$
$p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \gamma \neq 0$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ $d = (\delta + a\varepsilon)/b\gamma$; $e = \varepsilon/\gamma$ $a = -\beta/2\gamma$, $b = \sqrt{-\Delta}/2\gamma$	$e \neq -M, M = 1, 2, \ldots$ $e = -M$, M sudé, $d = 0$ $e = -M$, M liché, $d = 0$ $e = -M, d \neq 0$	V₂	věta 6 – –	$[p(x)]^{\varepsilon/4\gamma} \,.\, \exp\left[(d/2)\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{-\Delta}} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2}\int \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x\right]$	$j = (-\infty, \infty)$

4. Dif. rovnice

$$x^2y'' + x(2x + 1)y' + [x(x + 1) + \lambda] = 0,$$

má v intervalu $j = (-\infty, +\infty)$ pro $\lambda = -n^2$ partikulární řešení $y(x) = x^n e^{-x}$.

5. Dif. rovnice

$$(1 - x^2)y'' + x^3y' +$$
$$+ \frac{1}{4}\left[6x^2 + 2 + \frac{1}{1 - x}(x^2 - x + 2)(x^3 - 6x^2 - x - 2) + 4\lambda\right]y = 0$$

má v intervalu $j = (-1, +1)$ pro $\lambda = n^2$ partikulární řešení

$$y(x) = \exp\left(\frac{1}{4}x^2\right)(1 - x)^{-5/4}(1 + x)^{3/4}\, T_n\left(\frac{x + 1}{2}\right),$$

$\Big(T_n \ldots$ Čebyševův polynom prvního druhu; je to speciální případ Jacobiho polynomů pro $k = \frac{1}{2}, s = 0\Big)$.

Věta 9: Nechť $f(x) \in C^{(2)}(j)$, $f(x) \neq 0$ pro $x \in j$, $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ a platí

1° $$q(x) = \delta + \varepsilon x - 2p\frac{f'}{f}, \tag{q_{1n}}$$

2° $$r(x) + \lambda_0 = -\frac{1}{f}(pf'' + qf'), \tag{r_f}$$

*3° problém (P) pro rovnici (u_f) má pro zvolená δ, ε řešení $\{\mu_\nu\}$, $\{P_\nu(x)\}$.
Pak problém (fP) pro rovnici (y) má řešení $\{\lambda_\nu\} = \{\lambda_0 + \mu_\nu\}$, $\{fP_\nu(x)\}$.*

Důkaz: Za uvedených předpokladů platí vztahy (k), ($1n$), (f) a jsou splněny podmínky 1°, 2° věty 7.

Příklad: $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)}$, $p(x) = 1 - x^2$.
Rovnice $(1 - x^2)y'' - xy' + (1 + \lambda)y = 0$ má pro $\lambda = n(n + 2)$ partikulární řešení $y(x) = \sqrt{(1 - x^2)}\,.\, U_n\left(\frac{x + 1}{2}\right)$, kde $U_n(x)$ je n-tý Čebyševův polynom druhého druhu $\Big($speciální případ Jacobiho polynomů pro $k = \frac{3}{2}, s = 2\Big)$.

*Věta 10: Nechť $r(x) \in C(j)$, $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \neq 0$ pro $x \in j$. Jestliže dále platí
1° $f(x)$ je v intervalu $j_1 \subset j$ partikulárním řešením rovnice*

$$pf'' + (\delta + \varepsilon x)f' + (r + \lambda_0)f = 2p\frac{f'^2}{f}, \tag{3}$$

2° funkce $q(x)$ vyhovuje podmínce (q_{1n}), 3° *problém (P) pro dif. rovnici* (u_f) *má řešení* $\{\mu_\nu\}$, $\{P_\nu(x)\}$,

pak problém (fP) pro rovnici (y) má řešení $\{\lambda_\nu\} = \{\lambda_0 + \mu_\nu\}$, $\{fP_\nu(x)\}$ *v intervalu* j_1.

Důkaz: Podmínky 1°, 2° této věty jsou ekvivalentní podmínkám 1°, 2° věty 9, třetí podmínka je stejná v obou větách. Protože rovnice (3) je nelineární, její partikulární řešení existuje jen v jistém intervalu $j_1 \subset j$.

Věta 11: Nechť $r(x) \in C(j)$, $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \neq 0$ *pro* $x \in j$. *Jestliže dále platí*

1° $q(x)$ *je v intervalu* $j_2 \subset j$ *partikulárním řešením rovnice*

$$(q/p)' + \frac{1}{2}(q/p)^2 = \varepsilon/p - p'(\delta + \varepsilon x)/p^2 + (\delta + \varepsilon x)^2/2p^2 + 2(r + \lambda_0)/p, \tag{4}$$

2° $f(x)$ *vyhovuje vztahu* (f_{1n}),

3° *problém (P) pro rovnici* (u_f) *má pro zvolená* δ, ε *řešení* $\{\mu_\nu\}$, $\{P_\nu(x)\}$,

pak problém (fP) pro rovnici (y) má řešení $\{\lambda_\nu\} = \{\lambda_0 + \mu_\nu\}$, $\{fP_\nu(x)\}$ *v intervalu* j_2.

Důkaz: Podmínka 1° vznikla úpravou vztahu (f) a použitím (1n), podmínka 2° je ekvivalentní podmínce (1n). Jsou tedy splněny podmínky věty 7. V důsledku nelinearity rovnice (4) je existence jejího partikulárního řešení zajištěna jen v jistém intervalu $j_2 \subset j$.

KAPITOLA TŘETÍ

Některé zvláštní případy diferenciální rovnice (y).

Věta 12: Nechť $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \neq 0$ *pro* $x \in j$.
Problém (fP) pro rovnici

$$p(x)\,y'' + \left(\frac{1}{4p(x)}(ax^2 + bx + c) + \lambda\right)y = 0 \tag{y_1}$$

má právě tehdy řešení $\{\lambda_\nu\}$, $\{fP\nu\}$ *v intervalu j, jestliže platí*

1° δ, ε *jsou reálným řešením soustavy*

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon(2\gamma - \varepsilon), \\ b &= 2\delta(2\gamma - \varepsilon), \\ c &= -2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - \delta^2, \end{aligned} \tag{5}$$

2° *rovnice* $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,u'' + (\delta + \varepsilon x)\,u' + \mu u = 0$, $\mu = \lambda - \lambda_0$
má pro $\mu = \mu_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *řešení* $u = P_n(x)$,

3° $$f(x) = \exp \int \frac{\delta + \varepsilon x}{2p(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz: Nechť problém (fP) pro rovnici (y_1) má řešení $\{\lambda_\nu\}$, $\{fP_\nu\}$; pak podle věty 8 (pro případ $q \equiv 0$) platí 3°, 2°. Ze vztahu (r) dostaneme nyní vztah

$$r(x) + \lambda_0 = [\![-2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - \delta^2 + 2\delta(2\gamma - \varepsilon)\,x + \varepsilon(2\gamma - \varepsilon)\,x^2]\!]/4p$$

kde $r(x) = \dfrac{1}{4p}(ax^2 + bx + c)$. Porovnáním koeficientů na obou stranách dostaneme právě soustavu (5).

Nechť nyní naopak platí 1°, 2°, 3°; pak jsou splněny podmínky věty 8 a tedy problém (fP) pro rovnici (y_1) má řešení $\{\lambda_\nu\}$, $\{fP_\nu\}$.

Poznámka. Soustava (5) má reálná řešení v těchto případech:

1. $a = b = 0, \beta - c - 4\alpha\gamma \leqq 0 \Rightarrow \varepsilon = 2\gamma, \delta = \beta \pm \sqrt{(\beta^2 - c - 4\alpha\gamma)}$,
2. $a = 0, b \neq 0, \gamma \neq 0, c = b(2\beta - b/4\gamma)/ \Rightarrow \varepsilon = 0, \delta = b/4\gamma$,
3. $a \neq 0, b = 0, \alpha \neq 0, a = -c(2\gamma + c/2\alpha)/2\alpha \Rightarrow \varepsilon = -c/2\alpha, \delta = 0$,
4. $a \neq 0, b \neq 0, \gamma^2 \geqq a \Rightarrow \delta = b\varepsilon/2a, \varepsilon = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - a}$,
   jestliže současně platí $c = -2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - \delta^2$.

Příklad: Rovnice $y'' + \left(n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x^2\right)y = 0$ má partikulární řešení $y(x) = D_n(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{4}\right) . H_n\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Funkce $D_n(x)$ mají v literatuře název „*funkce parabolického válce*", $H_n(x)$ jsou Hermiteovy polynomy.

Věta 13: Problém (fP) pro diferenciální rovnici

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,y'' + \lambda y = 0, \tag{y_2}$$

má řešení právě tehdy, jestliže pro čísla δ, ε platí

1° *pro rovnici* $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,u'' + (\delta + \varepsilon x)\,u' + \mu u = 0$ *má řešení problém* (P);
2° *mezi čísly* α, β, γ *a* $\delta, \varepsilon, \lambda_0$ *platí vztahy*

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\gamma - 2\lambda_0\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon^2,\\
&2\delta\gamma - 2\lambda_0\beta = \varepsilon\delta,\\
&\beta\delta - \alpha\varepsilon - 2\alpha\lambda_0 = \frac{1}{2}\delta^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Důkaz: Nechť problém (fP) má pro rovnici (y_2) řešení. Dosaďme $q(x) \equiv r(x) \equiv 0$ do vztahu (f_{1n}) a odtud do (f). Dostaneme

$$(\delta + \varepsilon x)\,p'(x) - (\varepsilon + 2\lambda_0)\,p(x) = \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon x)^2.$$

Dosazením za $p(x)$ a porovnáním koeficientů na obou stranách dostaneme právě soustavu (6).

Platí-li naopak 1°, 2°, pak jsou splněny podmínky věty 7 a problém (fP) pro rovnici (y_2) má tedy řešení.

Tab. II

Předpoklady	Řešení soustavy (6)		Norm. typ d. r. (u_f)	$f(x)$, j
$\varepsilon \neq 2\lambda_0$, $\varepsilon \neq -2\lambda_0$,	$\alpha = \frac{1}{2}\delta^2/(\varepsilon - 2\lambda_0)$, $\beta = \varepsilon\delta/(\varepsilon - 2\lambda_0)$	$\varepsilon \neq 0$	IV_1	$C(\delta + \varepsilon x)^{(\varepsilon - 2\lambda_0)/\varepsilon}$, $-(\delta/\varepsilon) \notin j$
$\lambda_0 \neq 0$	$\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon^2/(\varepsilon - 2\lambda_0)$	$\varepsilon = 0$	III	(u_f) nemá polynom. řešení
$\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon = -2\lambda_0$	α lib., $\beta = \frac{1}{2}\delta$, $\gamma = \frac{1}{4}$	$\delta^2 = 4\alpha\varepsilon$ $\delta^2 > 4\alpha\varepsilon$ $\delta^2 < 4\alpha\varepsilon$	IV_1 V_1 V_2	$Cp(x)$, $-(\delta/\varepsilon) \notin j$
$\varepsilon = \lambda_0 = \delta = 0$	α, β lib., $\gamma \neq 0$; rovnice (y_2), (u_f) splývají		IV_1, V_1, V_2	$f \equiv C$
$\varepsilon = \lambda_0 = 0$, $\delta \neq 0$	α lib., $\beta = \frac{1}{2}\delta$, $\gamma = 0$		III	(u_f) nemá polynom. řešení
$\varepsilon = 2\lambda_0$, $\varepsilon \neq 0$	nemá řešení			

Tab. III

Předpoklady	Řešení	Norm. typ d. r. (u_f)	$f(x)$
$\gamma \neq 0$, $\Delta \neq 0$	$\varepsilon = \delta = \lambda_0 = 0$	V_1, V_2	$f(x) =$ konst.
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$\varepsilon = 4\gamma$, $\delta = 2\beta$, $\lambda_0 = -2\gamma$; $\Delta > 0$ $\Delta < 0$	V_1 V_2	$Cp(x)$
$\gamma \neq 0$, $\Delta \geqq 0$	$\varepsilon = 2\gamma$, $\lambda_0 = 0$, $\delta = \beta \pm \sqrt{\Delta}$	V_1	$C\,\vert p(x)\vert \left(\frac{2\gamma x + \beta - \sqrt{\Delta}}{2\gamma x + \beta + \sqrt{\Delta}}\right)^{\pm\frac{1}{2}}$
$\gamma \neq 0$, $\Delta = 0$	$\varepsilon \neq 2\gamma$ lib., $n = \varepsilon\beta/2\gamma$, $\lambda_0 = \varepsilon(2\gamma - \varepsilon)/4\gamma$	IV_1	$C\,\vert p(x)\vert^{\varepsilon/4\gamma}$

Soustava (6) je soustavou lineárních rovnic pro koeficienty α, β, γ při daných δ, ε, λ_0. Její řešení a jemu odpovídající normální typ rovnice (u_f) a funkci $f(x)$ udává tabulka II.

Při daných koeficientech α, β, γ je soustava (6) soustavou nelineárních rovnic pro koeficienty δ, ε, λ_0. Její řešení a jemu odpovídající normální typ rovnice (u_f) a funkci $f(x)$ udává tabulka III.

Příklad: Diferenciální rovnice $(x^2 + 3x + 2)\, y'' + \lambda y = 0$ má pro $\lambda = -2 - n(n + 3)$ partikulární řešení

$$y(x) = (x^2 + 3x + 2)\, P_n(2, 3; x + 2),$$

(P_n je n-tý Jacobiho polynom s parametry $k = 2$, $s = 3$).

LITERATURA

[1] *Bochner S.:* Ueber Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. Math. Zeitschrift, 29 (1929), 730—736.

[2] *Kamke E.:* Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, 1959.

[3] *Kobza J.:* O polynomických řešeních homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu Rigorosní práce, PF UP Olomouc, 1969.

Shrnutí

O POLYNOMICKÝCH ŘEŠENÍCH HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

JIŘÍ KOBZA

V článku je studována existence partikulárních řešení diferenciální rovnice (1) tvaru $y = P_n(x)$ nebo $y = f(x) . P_n(x)$ (kde P_n je polynom stupně n) pro jistou posloupnost hodnot parametru λ.

V kapitole prvé je dán přehled výsledků pro polynomická řešení t. zv. normálních typů dif. rovnice (u).

V kapitole druhé jsou odvozeny výsledky pro řešení tvaru $y = f(x)\, P_n(x)$.

V kapitole třetí jsou dokázány podrobné výsledky pro některé speciální případy rovnice (y).

Резюме

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЙИРЖИ КОБЗА

В работе изучается существование частных решений диф. уравнения (1) вида $y = P_n(x)$ или $y = f(x) \,.\, P(x)$ ($P_n(x)$ есть полином степени n) для какой-то последовательности значений параметра λ.

В главе первой дается перечень результатов для полиноминальных решений т. н. нормальных типов диф. уравнения (u).

В главе второй выведены результаты для решений вида $y = f(x) \,.\, P_n(x)$.

В главе третьей доказаны подробные результаты для некоторых частных видов уравнения (y).