Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jiří Zeman

Über asymptotische Eigenschaften von Integralen der Sturm- Liouvilleschen Differentialgleichung mit sog. Übergangspunkt

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 11 (1971), No. 1, 163--177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119935

1971 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 33

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

ÜBER ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN VON INTEGRALEN DER STURM—LIOUVILLESCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG MIT SOG. ÜBERGANGSPUNKT

JIŘÍ ZEMAN

(Eingelangt am 31. März 1970)

EINLEITUNG

In [2], Absatz 4.5 behandelt A. Erdélyi das Verhalten von Integralen der Sturm–Liouvilleschen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + [\lambda^2 p(t) + r(t, \lambda)]\, y = 0, \tag{y}$$

für $\lambda \to +\infty$, $t \in \langle a, b \rangle$, wo $p(t)$ im Punkte $c \in (a, b)$ einen einfachen Nullpunkt besitzt.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das Verhalten von Integralen der DGl (y), wobei $p(t)$ im Punkte $c \in (a, b)$ einen $2k - 1$ fachen Nullpunkt besitzt und $\lambda \to +\infty$.

Im Kapitel I. wird ein gewißes Paar von linear unabhängigen Integralen der DGl

$$z'' + \lambda^2 t^{2k-1} z = 0 \tag{z}$$

konstruiert und einige ihre Eigenschaften abgeleitet. Im Punkte $t = 0$ ändert das beliebige Integral der DGl (z) wesentlich seine Eigenschaften (von Nicht-Oszillation zu Oszillation). Hiervon stammt auch die Benennung „Übergangspunkt" der DGl. Zur Erfassung dieser Eigenschaften wenden wir die transzendenten (Besselschen) Funktionen an.

Im Kapitel II. wurde die Transformation von Integralen der DGl (z) nach [1] auf die Integrale der DGl

$$Y'' + [\lambda^2 \varphi^{2k-1}(t)\, \varphi'^2 + \{\varphi, t\}]\, Y = 0, \tag{Y}$$

benutzt. Die Formeln (20), (24) und (24') erklären die Integralen der DGl (y) mit Hilfe von Integralen der DGl (Y) für $t \in \langle a, b \rangle$, $\lambda \to +\infty$.

Abschliessend wird noch eine Spezialisierung für $k = 1$ durchgeführt. Dieser Fall wird in [2] betrachtet.

I.

DIE EIGENSCHAFTEN VON INTEGRALEN DER DGL

$$z'' + \lambda^2 t^{2k-1} z = 0$$

1. Die Konstruktion eines Fundamentalsystems von Lösungen der DGl $u'' + x^{2k-1}u = 0.$

Satz 1.1. Sei k eine natürliche Zahl. Die Funktionen $u_1(x)$, $u_2(x)$ definiert mittels der Formeln

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(2k+1)n+1},$$

wo

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2k+1)^{2n+\frac{1}{2k+1}} \,.\, \Gamma(n+1) \,.\, \Gamma\left(n+1+\frac{1}{2k+1}\right)}, \tag{1}$$

$$u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{(2k+1)n},$$

wo

$$b_n = \frac{(-1)^n}{(2k+1)^{2n-\frac{1}{2k+1}} \,.\, \Gamma(n+1) \,.\, \Gamma\left(n+1-\frac{1}{2k+1}\right)}, \tag{1'}$$

bilden im Intervall $(-\infty, +\infty)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGl

$$u'' + x^{2k-1}u = 0, \tag{u}$$

und

$$W(u_1, u_2) = -(2k+1)\,\pi^{-1} \,.\, \sin \pi(2k+1)^{-1}.$$

Satz 1.2: Die Funktionen $u_1(x)$, $u_2(x)$ *seien durch die Formeln* (1), (1′) ***definiert.*** *Dann bilden die Funktionen*

$$U_1(x) = \frac{1}{2k+1}[u_1(x) + u_2(x)], \tag{2}$$

$$U_2(x) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2k+1}}[u_2(x) - u_1(x)], \tag{2'}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGl (u) im Intervall $(-\infty; +\infty)$ und es gilt

$$W(U_1, U_2) = -\pi^{-1}.$$

Von der Richtigkeit der vorangehenden Sätze kann man sich durch Einsetzen überzeugen.

In den Sätzen I.3 – I.5 als auch in der Bemerkung I. ist $x > 0$; in den Sätzen I.6 und I.7 ist $x \geqq 0$. Der Kürze halber setzen wir $\frac{2}{2k+1} x^{\frac{2k+1}{2}} = \xi$; k ist eine natürliche Zahl.

Satz I.3: Es gelten die Formeln

$$u_1(x) = x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2k+1}}(\xi), \qquad u_2(x) = x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2k+1}}(\xi), \tag{3}$$

$$u_1(-x) = -x^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2k+1}}(\xi), \qquad u_2(-x) = x^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2k+1}}(\xi), \tag{3'}$$

wo $J_{\frac{1}{2k+1}}\left(J_{-\frac{1}{2k+1}}\right)$ *bzw.* $I_{\frac{1}{2k+1}}\left(I_{-\frac{1}{2k+1}}\right)$ *die Besselschen Funktionen bzw. die modifizierten Besselsfunktionen 1-ter Art mit dem Index* $\frac{1}{2k+1}\left(-\frac{1}{2k+1}\right)$ *sind.*

Beweis: Die Gültigkeit der Formeln (3), (3′) beweisen wir mit Hilfe von Formeln (1), (1′) durch Heranziehung von Reihenentwicklungen der Funktionen $J_{\pm\frac{1}{2k+1}}$, $I_{\pm\frac{1}{2k+1}}$ (siehe etwa [4]).

Bemerkung I. Nach den Sätzen I.1 – I.3 lassen sich die Funktionen U_1, U_2 in der Form

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2k+1}\left[J_{-\frac{1}{2k+1}}(\xi) + J_{\frac{1}{2k+1}}(\xi)\right], \\ U_2(x) &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\pi}{2k+1}}\left[J_{-\frac{1}{2k+1}}(\xi) - J_{\frac{1}{2k+1}}(\xi)\right], \end{aligned} \tag{4}$$

darstellen. Es gelten ebenfals die Formeln

$$\begin{aligned} U_1(-x) &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2k+1}\left[I_{-\frac{1}{2k+1}}(\xi) - I_{\frac{1}{2k+1}}(\xi)\right], \\ U_2(-x) &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\pi}{2k+1}}\left[I_{-\frac{1}{2k+1}}(\xi) + I_{\frac{1}{2k+1}}(\xi)\right]. \end{aligned} \tag{4'}$$

2. *Asymptotische Eigenschaften der Integralen $U_1(x)$, $U_2(x)$ für $x \to \infty$ und ihre weiteren Eigenschaften*

Durch Anwendung von asymptotischen, ein Glied enthaltenden Formeln für die Funktionen $J_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ (siehe etwa [4]), lassen sich leicht zwei folgende Sätze beweisen. Das Symbol „O" wird im Sinne von [2] verwendet.

Satz I.4. Es gelten die Formeln

$$U_1(x) = \frac{2\cos\dfrac{\pi}{2(2k+1)}}{\pi^{\frac{1}{2}}(2k+1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2k-1}{4}}}\left[\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) + O(\xi^{-1})\right] \quad \text{für } x \to +\infty,$$
$$U_2(x) = \frac{(2k+1)^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}\left[\cos\dfrac{\pi}{2(2k+1)}\right]x^{\frac{2k-1}{4}}}\left[-\sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) + O(\xi^{-1})\right] \quad \text{für } x \to +\infty. \tag{5}$$

Satz I.5. Es gelten die Formeln

$$U_1(-x) = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2k+1}}{\pi^{\frac{1}{2}}(2k+1)^{\frac{1}{2}}\,.\,x^{\frac{2k-1}{4}}}\,e^{-\xi}[1 + O(\xi^{-1})] \quad \text{für } x \to +\infty,$$
$$U_2(-x) = \frac{(2k+1)^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}\left(\sin\dfrac{\pi}{2k+1}\right).\,x^{\frac{2k-1}{4}}}\,e^{\xi}[1 + O(\xi^{-1})] \quad \text{für } x \to +\infty. \tag{5'}$$

Bemerkung 2. Offensichtlich sind die Funktionen U_1, U_2 im Intervall $(-\infty, 0\rangle$ positiv. Aus den Formeln (5′) sehen wir, daß $\lim\limits_{x\to-\infty} U_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} U_2(x) = +\infty$. Aus der DGl (u) folgt, daß das Integral $U_1(U_2)$ im Intervall $(-\infty, 0)$ eine wachsende (abnehmende) Funktion ist.

Durch Anwendung von Formeln (5) und (5′) beweisen wir zwei folgende Sätze.

Satz I.6. Es bestehen positive Konstanten C_1, C_2 derart, daß

$$|U_1(x)| \leqq \frac{C_1}{1 + x^{\frac{2k-1}{4}}},$$
$$|U_2(x)| \leqq \frac{C_2}{1 + x^{\frac{2k-1}{4}}}, \tag{6}$$

gilt.

Satz I.7. Es bestehen positive Konstanten C_3, C_4, C_3', C_4' derart, daß

$$C_3' \frac{e^{-\xi}}{1 + x^{\frac{2k-1}{4}}} \leqq U_1(-x) \leqq C_3 \frac{e^{-\xi}}{1 + x^{\frac{2k-1}{4}}},$$
$$C_4' \frac{e^{\xi}}{1 + x^{\frac{2k-1}{4}}} \leqq U_2(-x) \leqq C_4 \frac{e^{\xi}}{1 + x^{\frac{2k-1}{4}}} \tag{7}$$

gilt.

3. Transformation der unabhängigen Veränderlichen

Satz I.8. Sei $\lambda > 0$. *Die Funktionen*

$$z_1(t) = U_1\left(\lambda^{\frac{2}{2k+1}} t\right), \qquad z_2(t) = U_2\left(\lambda^{\frac{2}{2k+1}} t\right) \tag{8}$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGl

$$z'' + \lambda^2 t^{2k-1} z = 0 \tag{z}$$

im Intervall $(-\infty, +\infty)$ *und es gilt*

$$W(z_1, z_2) = -\lambda^{\frac{2}{2k+1}} \pi^{-1}.$$

Beweis: Die Behauptung des Satzes erhalten wir, indem wir $x = = \lambda^{\frac{2}{2k+1}} t$ setzen.

Bemerkung 3. Sei $t \geqq 0$, $\lambda > 0$. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\frac{2}{2k+1} t^{\frac{2}{2k+1}} = = \vartheta (\geqq 0)$. Wählen wir in den Formeln (6) und (7): $x = \lambda^{\frac{2}{2k+1}} t$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} |z_1(t)| &\leqq \frac{C_1}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} t^{\frac{2k-1}{4}}}, \\ |z_2(t)| &\leqq \frac{C_2}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} t^{\frac{2k-1}{4}}}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} C_3' \frac{e^{-\vartheta\lambda}}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} t^{\frac{2k-1}{4}}} &\leqq z_1(-t) \leqq C_3 \frac{e^{-\vartheta\lambda}}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} t^{\frac{2k-1}{4}}}, \\ C_4' \frac{e^{\vartheta\lambda}}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} t^{\frac{2k-1}{4}}} &\leqq z_2(-t) \leqq C_4 \frac{e^{\vartheta\lambda}}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} t^{\frac{2k-1}{4}}}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Konstanten C_i, C_i' in (9) und (10) sind die aus den Sätzen I.6. und I.7.

II.

DIE STURM—LIOUVILLESCHE DGL 2. ORDNUNG MIT SOG. ÜBERGANGSPUNKT

1. Transformation von Integralen der DGl (z)

Satz II.1. Die Funktionen $z_1(t)$, $z_2(t)$ *seien linear unabhängige Integrale der DGl* (z) *im Intervall* $(-\infty; +\infty)$, *durch die Formeln* (8) *definiert, und* $W(z_1, z_2)$ *ihre Wronskische Determinante.* $\varphi(t)$ *sei eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

$$1^\circ\ \varphi(t) \in C^3,\quad \varphi'(t) > 0 \quad \text{für} \quad t \in (\beta_1, \beta_2)$$
$$2^\circ\ -\infty \leqq \lim_{t\to\beta_1+} \varphi(t) < \lim_{t\to\beta_2-} \varphi(t) \leqq +\infty. \tag{V$_1$}$$

Wir definieren im Intervall (β_1, β_2) die Funktion $Q(t)$ vermöge der Gleichung

$$Q(t) = \lambda^2 \varphi^{2k-1}(t) \,.\, \varphi'^2(t) + \{\varphi, t\},$$

wo

$$\{\varphi, t\} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'''(t)}{\varphi'(t)} - \frac{3}{4} \frac{\varphi''^2(t)}{\varphi'^2(t)}.$$

Dann bilden die Funktionen

$$Y_1(t) = \frac{z_1[\varphi(t)]}{\varphi'^2(t)}, \qquad Y_2(t) = \frac{z_2[\varphi(t)]}{\varphi'^2(t)} \tag{11}$$

im Intervall (β_1, β_2) ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGl

$$Y'' + Q(t)\, Y = 0, \tag{Y}$$

und es gilt

$$W(Y_1, Y_2) = W(z_1, z_2) = -\lambda^{\frac{2}{2k+1}} \pi^{-1}.$$

Der Beweis wird durch Einsetzen von Integralen (11) in die DGl (Y) geführt.

Bemerkung 4. Wählen wir die Zahlen a, b so, daß $\beta_1 < a < b < \beta_2$ gilt, und betrachten wir die DGl (Y) für $t \in \langle a, b\rangle$, so läßt sich durch geeignete Wahl der Funktion $\varphi(t)$ erzielen, daß ein einziger Punkt $c \in (a, b)$ derart besteht, daß $\varphi(c) = 0$ gilt.

2. *Übergangspunkte*

Die Sturm- Liouvillesche DGl 2. Ordnung hat die Form

$$y'' + [\lambda^2 p(t) + r(t, \lambda)]\, y = 0, \tag{y}$$

wo $p(t)$, $r(t, \lambda)$ stetige Funktionen der Veränderlichen t im Intervall $\langle a, b\rangle$ sind; $\lambda \geqq \lambda_0 > 0$ ist ein Parameter.

Ist $\operatorname{sgn} p(t) =$ konst. für $t \in \langle a, b\rangle$, sind die asymptotischen Eigenschaften von Integralen der DGl (y) für $\lambda \to +\infty$ bekannt (siehe etwa [2]). Wir wollen nun den Fall betrachten, wo diese Forderung nicht erfüllt ist.

Definition II.1. Sei k eine natürliche Zahl und $p(t) \in C^{2k}$ für $t \in \langle a, b\rangle$. Den Punkt $t_0 \in \langle a, b\rangle$, in welchem

$$p(t_0) = p'(t_0) = \ldots = p^{(2k-2)}(t_0) = 0; \qquad p^{(2k-1)}(t_0) \neq 0,$$

gilt, wollen wir als Übergangspunkt der DGl (y) von $2k - 1$. Ordnung bezeichnen.

Nehmen wir an, daß die Funktionen $p(t)$, $r(t, \lambda)$ in der DGl (y) folgende Eigenschaften besitzen:

$p(t)$: 1° $p(t) \in C^{2k}$ für $t \in \langle a, b \rangle$.

2° Der Punkt $c \in (a, b)$ ist ein Übergangspunkt der DGl (y) von $2k - 1$. Ordnung.

3° $p(t) \neq 0$ für $t \neq c$, $t \in \langle a, b \rangle$.

4° $p^{(2k-1)}(c) > 0$, so daß $p(t) < 0$ für $t \in \langle a, c)$ und $p(t) > 0$ für $t \in (c, b\rangle$.

5° Setzen wir

$$\int_c^t | p(s) |^{\frac{1}{2}} \, ds = P(t) \quad \text{für} \quad t \in \langle a, b \rangle, \tag{V_2}$$

ist die Funktion

$$\Psi(t) = \ln \frac{P'(t)}{| P(t) |^{\frac{2k-1}{2k+1}}} \in C^2$$

für $t \in \langle a, b \rangle$.

$r(t, \lambda)$: 1° $r(t, \lambda)$ ist definiert auf der Menge $\mathcal{M} = \{\langle a, b \rangle \times \langle \lambda_0, +\infty)\}$.

2° $r(t, \lambda)$ ist beschränkt auf $\mathcal{M}$, d. h. $| r(t, \lambda) | \leqq M$. $\quad (V_3)$

3° Für ein beliebiges $\lambda \in \langle \lambda_0, +\infty)$ ist $r(t, \lambda)$ eine stetige Funktion von $t \in \in \langle a, b \rangle$.

Bemerkung 5. Die Eigenschaften (V_2) besitzt z. B. die Funktion $p(t) = (t - c)^{2k-1}$ in beliebigem im Innern den Punkt c enthaltenden Intervall, oder die Funktion $p(t) = = \sin^{2k-1}(t - c) - \sin^{2k+1}(t - c)$ im Intervall $\langle a, b \rangle$, wo $-\frac{\pi}{2} + c < a \leqq t \leqq b < < \frac{\pi}{2} + c$.

3. *Differentialgleichung* $\varphi^{2k-1} \cdot \varphi'^2 = p(t)$

Satz II.2. Die Funktion $p(t)$ möge im Intervall $\langle a, b \rangle$ die Eigenschaften (V_2) *besitzen. Dann gibt es eine einzige Lösung der nichtlinearen DGl 1. Ordnung*

$$\varphi^{2k-1} \cdot \varphi'^2 = p(t), \tag{φ}$$

die der Anfangsbedingung $\varphi(c) = 0$ genügt und im Intervall $\langle a, b \rangle$ die Eigenschaften (V_1) besitzt.

Beweis:

a) Es ist leicht ersichtlich, daß die Funktion $\varphi(t)$ definiert durch die Beziehungen

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\left\{\dfrac{2k+1}{2} \displaystyle\int_t^c [-p(s)]^{\frac{1}{2}} \, ds\right\}^{\frac{2}{2k+1}} & \text{für } t \in \langle a, c \rangle, \\ \left\{\dfrac{2k+1}{2} \displaystyle\int_c^t p^{\frac{1}{2}}(s) \, ds\right\}^{\frac{2}{2k+1}} & \text{für } t \in \langle c, b \rangle, \end{cases} \tag{12}$$

die einzige, die gegebene Anfangsbedingung erfüllende Lösung der DGl (φ) ist, welche für $t \neq c$ eine stetige, positive Ableitung $\varphi'(t)$ besitzt. Nun ist es leicht einzusehen, daß die Funktion $\varphi'(t)$ auch im Punkte $t = c$ stetig ist und

$$\varphi'(c) = \left[\frac{p^{(2k-1)}(c)}{(2k-1)!}\right]^{\frac{1}{2k+1}} (> 0).$$

b) Durch Ableitung von (φ) nach t erhalten wir

$$(2k - 1)\,\varphi^{2k-2}\varphi'^3 + 2\varphi^{2k-1}\varphi'\varphi'' = p';$$

Durch Umformung ergibt sich

$$\varphi'' = \frac{\varphi'}{2}\left[\frac{p'}{p} - (2k-1)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]. \tag{13}$$

Setzen wir in die eckige Klammer in (13) φ und φ' aus (12) ein und machen wir von der in 5° eingeführten Bezeichnung der Eigenschaft (V_2) Gebrauch, so folgt für $t \in \langle a, b\rangle$:

$$\varphi''(t) = \varphi'(t)\left[\frac{p'(t)}{2p(t)} - \frac{2k-1}{2k+1}\,\frac{|p(t)|^{\frac{1}{2}}}{\int_c^t |p(s)|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s}\right] = \varphi'(t)\,.\,\Psi'(t) \tag{14}$$

und mithin ist die Funktion $\varphi''(t)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ stetig.

c) Für $t \in \langle a, b\rangle$ gilt

$$\varphi'''(t) = \varphi''(t)\,.\,\Psi'(t) + \varphi'(t)\,.\,\Psi''(t), \tag{15}$$

so daß $\varphi'''(t)$ auch in diesem Intervall stetig ist.

4. Eigenschaften von Integralen der DGl (y) *für* $\lambda \to +\infty$

Betrachten wir die DGl

$$y'' + [\lambda^2 p(t) + r(t, \lambda)]\,y = 0 \tag{y}$$

im Intervall $\langle a, b\rangle$, wobei die Funktionen $p(t)$ bzw. $r(t, \lambda)$ die Eigenschaften von (V_2) bzw. (V_3) besitzen.

Betrachten wir ferner die DGl

$$Y'' + [\lambda^2\varphi^{2k-1}(t)\,.\,\varphi'^2(t) + \{\varphi, t\}]\,Y = 0, \tag{Y}$$

im Intervall $\langle a, b\rangle$, wo die Funktion $\varphi(t)$ durch die Formeln (12) gegeben ist. In beiden Gleichungen sei $\lambda \geqq \lambda_0 > 0$.

Durch direkte Rechnung kann man leicht den folgenden Satz beweisen.

Satz II.3. *$Y(t)$ sei ein beliebiges Integral der DGl* (Y) *im Intervall $\langle a, b\rangle$ und $\tau \in \langle a, b\rangle$. $K(t, \tau)$ sei ein im Intervall $\langle a, b\rangle$ die Anfangsbedingungen $K(\tau, \tau) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} K(\tau, \tau) = 1$ erfüllendes Integral der DGl* (Y). *Es sei weiter $t_0 \in \langle a, b\rangle$. Sodann genügt die Lösung der Integralgleichung (IGl)*

$$y(t) = Y(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\, y(\tau)\, d\tau, \tag{y, Y}$$

der DGl (y) *im Intervall* $\langle a, b \rangle$.

Bemerkung 6.

a) Die Lösung $K(t, \tau)$, welche die geforderten Eigenschaften besitzt, hat die Form

$$K(t, \tau) = \frac{Y_1(\tau)\, Y_2(t) - Y_2(\tau)\, Y_1(t)}{Y_1(\tau)\, Y_2'(\tau) - Y_2(\tau)\, Y_1'(\tau)} = \frac{1}{W(Y_1 Y_2)} [Y_1(\tau)\, Y_2(t) - Y_2(\tau)\, Y_1(t)], \tag{16}$$

wo Y_1, Y_2 die linear unabhängige Integrale der DGl (Y) sind. b) Für ein beliebiges festes λ ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von IGl (y, Y) aus der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen vom Volterraschen Typ.

Im folgenden bedeuten Y_1, Y_2 die durch die Formeln (11) definierte Funktionen. Aus Satz II.3. folgt, daß die Lösungen von IGln

$$y_1(t) = Y_1(t) + \int_{a}^{t} K(t, \tau)\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\, y_1(\tau)\, d\tau, \tag{y_1, Y_1}$$

$$y_2(t) = Y_2(t) + \int_{c}^{t} K(t, \tau)\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\, y_2(\tau)\, d\tau. \tag{y_2, Y_2}$$

die Integralen der DGl (y) im Intervall $\langle a, b \rangle$ sind.

Lemma II.1. Es sei $t \in \langle a, c \rangle$. *Ist* $a \leqq \tau \leqq t \leqq c$, *so gilt*

$$\left| \frac{Y_1(\tau)}{Y_1(t)} K(t, \tau)\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \right| \leqq \frac{C}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}} \varphi'(\tau) \left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} |\varphi(\tau)|^{\frac{2k-1}{4}}\right]^2}. \tag{17}$$

Ist $a \leqq t \leqq \tau \leqq c$, *so gilt*

$$\left| \frac{Y_2(\tau)}{Y_2(t)} K(t, \tau)\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \right| \leqq \frac{\bar{C}}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}} \varphi'(\tau) \left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} |\varphi(\tau)|^{\frac{2k-1}{4}}\right]^2}, \tag{17'}$$

wobei C, $\bar{C}$ *Konstanten bedeuten.*

Beweis: Es ist $Y_1(t), Y_2(t) \neq 0$, so ergibt sich aus (10)

$$\left| \frac{Y_1(\tau)}{Y_1(t)} \right| = \left[\frac{\varphi'(t)}{\varphi'(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{z_1[\varphi(\tau)]}{z_1[\varphi(t)]} \leqq \frac{C_3}{C_3'} \left[\frac{\varphi'(t)}{\varphi'(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} |\varphi(t)|^{\frac{2k-1}{4}}}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} |\varphi(\tau)|^{\frac{2k-1}{4}}} \,.$$
$$. \, e^{\frac{2}{2k+1} \lambda \left[|\varphi(t)|^{\frac{2k+1}{2}} - |\varphi(\tau)|^{\frac{2k+1}{2}}\right]} . \tag{18}$$

$$\left| \frac{Y_2(\tau)}{Y_2(t)} \right| = \left[\frac{\varphi'(t)}{\varphi'(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{z_2[\varphi(\tau)]}{z_2[\varphi(t)]} \leqq \frac{C_4}{C_4'} \left[\frac{\varphi'(t)}{\varphi'(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} |\varphi(t)|^{\frac{2k-1}{4}}}{1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} |\varphi(\tau)|^{\frac{2k-1}{4}}} \,.$$
$$. \, e^{\frac{2}{2k+1} \lambda \left[|\varphi(\tau)|^{\frac{2k+1}{2}} - |\varphi(t)|^{\frac{2k+1}{2}}\right]} . \tag{18'}$$

Es gilt ferner

$$K(t, \tau) \leqq \pi\lambda^{-\frac{2}{2k+1}} [\,|\, Y_1(\tau) \,|\,|\, Y_2(t) \,|\, + \,|\, Y_2(\tau) \,|\,|\, Y_1(t) \,|\,] \leqq$$

$$\leqq \frac{2\pi C_3 C_4}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \, \frac{1}{[\varphi'(t) \,.\, \varphi'(\tau)]^{\frac{1}{2}}} \, \frac{e^{-\frac{2}{2k+1}\lambda \left| |\varphi(t)|^{\frac{2k+1}{2}} - |\varphi(\tau)|^{\frac{2k+1}{2}} \right|}}{\left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} \,|\, \varphi(t) \,|^{\frac{2k-1}{4}}\right] . \left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} \,|\, \varphi(\tau) \,|^{\frac{2k-1}{4}}\right]} . \tag{19}$$

Aus den Eigenschaften (V_1) der Funktion φ und aus den Eigenschaften der Funktion r erhalten wir

$$|\, \{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda) \,| \leqq C_5 , \tag{19'}$$

wobei C_5 eine Konstante ist.

a) Sei $a \leqq \tau \leqq t \leqq c$; folglich ist $|\, \varphi(\tau) \,| \geqq |\, \varphi(t) \,|$ und mithin ergibt sich aus (18), (19) und (19') die Relation (17), wenn $C = \dfrac{2\pi C_3^2 C_4 C_5}{C_3'}$ gewählt wird.

b) Sei $a \leqq t \leqq \tau \leqq c$: folglich ist $|\, \varphi(\tau) \,| \leqq |\, \varphi(t) \,|$ und mithin ergibt sich aus (18'), (19) und (19') die Relation (17'), wenn $\bar{C} = \dfrac{2\pi C_3 C_4^2 C_5}{C_4'}$ gewählt wird.

Satz II.5. Es sei $t \in \langle a, c \rangle$, $i = 1, 2$. *Es gilt*

$$y_i(t) = Y_i(t) \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right)\right] \qquad \text{für } \lambda \to +\infty . \tag{20}$$

Beweis: Es ist $Y_1(t), Y_2(t) > 0$. Setzen wir in den Gleichungen (y_1, Y_1) bzw. $(y_2, Y_2) : y_1(t) = Y_1(t) \,.\, w_1(t)$ bzw. $y_2(t) = Y_2(t) \,.\, w_2(t)$. Hiernach erhalten wir folgende Integralgleichungen für w_1, w_2:

$$(w_1, Y_1), \qquad w_1(t) = 1 + \int_a^t \frac{Y_1(\tau)}{Y_1(t)} K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, w_1(\tau) \, d\tau ,$$

$$(w_2, Y_2), \qquad w_2(t) = 1 + \int_c^t \frac{Y_2(\tau)}{Y_2(t)} K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, w_2(\tau) \, d\tau .$$

Für ein beliebiges festes λ sind die Funktionen w_1, w_2 im Intervall $\langle a, c \rangle$ beschränkt. Sei $W_i(\lambda) = \max\limits_{t \in \langle a, c \rangle} |\, w_i(t) \,|$ für $i = 1, 2$. Nach (17) und (17') haben wir

$$|\, w_1(t) \,| \leqq 1 + \int_a^t \left| \frac{Y_1(\tau)}{Y_1(t)} K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, w_1(\tau) \right| d\tau \leqq$$

$$\leqq 1 + \int_a^c \left| \frac{Y_1(\tau)}{Y_1(t)} K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, w_1(\tau) \right| d\tau \leqq$$

$$\leqq 1 + C \int_a^c \frac{|\, w_1(\tau) \,|}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}} \varphi'(\tau) \left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} \,|\, \varphi(\tau) \,|^{\frac{2k-1}{4}}\right]^2} \, d\tau .$$

Aus den Eigenschaften (V_1) der Funktion φ folgt, daß

$$0 < \bar{m} \leqq \frac{1}{\varphi'(\tau)} \leqq m,$$

gilt und mithin

$$|w_1(t)| \leqq 1 + \frac{\Omega_1}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \int_a^c |w_1(\tau)| \, d\tau, \tag{21}$$

wobei $\Omega_1 = m \, . \, C$ eine Konstante ist.
Ähnlich erhalten wir für $w_2(t)$ die Abschätzung von

$$|w_2(t)| \leqq 1 + \frac{\Omega_2}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \int_a^c |w_2(\tau)| \, d\tau, \tag{21'}$$

wobei $\Omega_2 = m \, . \, \bar{C}$ eine Konstante ist.
Folglich bekommen wir für $W_i(\lambda)$ die Ungleichheiten

$$W_i(\lambda) \leqq 1 + \frac{\Omega_i}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} (c - a) \, W_i(\lambda). \tag{22}$$

Es sei $\eta > 0$. Aus den Ungleichheiten von (22) ergibt sich, daß für genügend große λ $W_i(\lambda) \leqq 1 + \eta$ ist. Folglich ist es für $\lambda \geqq \bar{\lambda}$

$$\left| \int_a^t \frac{Y_1(\tau)}{Y_1(t)} K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, w_1(\tau) \, d\tau \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{\Omega_1}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \int_a^c (1 + \eta) \, d\tau = \frac{\Omega_1(1 + \eta)(c - a)}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}},$$

oder

$$\int_a^t \frac{Y_1(\tau)}{Y_1(t)} K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, w_1(\tau) \, d\tau = O\left[\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right] \quad \text{für } \lambda \to +\infty. \tag{23}$$

Ähnlich bekommen wir

$$\int_c^t \frac{Y_2(\tau)}{Y_2(t)} K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, w_2(\tau) \, d\tau = O\left[\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right] \quad \text{fur } \lambda \to +\infty. \tag{23'}$$

Durch Einsetzen aus (23) und (23') in die Gleichungen (w_1, Y_1) und (w_2, Y_2) erhalten wir für die Funktionen $w_i(t)$ die Beziehungen

$$w_i(t) = 1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right) \quad \text{für } \lambda \to +\infty,$$

woraus sich bereits, indem wir zu den Funktionen $y_i(t)$ zurückkommen, die Behauptung des Satzes ergibt.

Satz II.6. *Es sei $t \in \langle c, b\rangle$. Es gelten die Formeln:*

$$y_1(t) = Y_1(t) . \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right)\right] + Y_2(t) . O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right) \quad \text{für } \lambda \to +\infty, \tag{24}$$

$$y_2(t) = Y_2(t) . \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right)\right] + Y_1(t) . O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right) \quad \text{für } \lambda \to +\infty. \tag{24'}$$

Beweis:

a) Aus den Gleichungen (y_1, Y_1) und (16) folgt

$$y_1(t) = Y_1(t) . \left\{1 + \frac{\pi}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \int_a^c Y_2(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, y_1(\tau) \, d\tau\right\} -$$

$$- \frac{\pi}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} Y_2(t) \int_a^c Y_1(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, y_1(\tau) \, d\tau +$$

$$+ \int_c^t K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, y_1(\tau) \, d\tau. \tag{25}$$

Nach dem Muster von (20) gilt für genügend große λ:

$$| Y_2(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, y_1(\tau) | =$$
$$= \left| Y_1(\tau) Y_2(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] . \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right)\right] \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{\Omega_3}{\varphi'(\tau) \left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} \varphi(\tau)^{\frac{2k-1}{4}}\right]^2}, \tag{26}$$

$$| Y_1(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \, y_1(\tau) | = \tag{26'}$$
$$\left| Y_1^2(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] . \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right)\right] \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{\Omega_4}{\varphi'(\tau) \left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} \varphi(\tau)^{\frac{2k-1}{4}}\right]^2}.$$

(Wir setzen $\Omega_3 = C_1 C_2 C_5 (1 + \eta)$, $\Omega_4 = C_1^2 C_5 (1 + \eta)$; $\eta > 0$.) Für den Kern des letzten Integrals in (25) gilt

$$| K(t, \tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] | \leqq \frac{\Omega_5}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}} \varphi'(\tau) \left[1 + \lambda^{\frac{2k-1}{2(2k+1)}} \varphi(\tau)^{\frac{2k-1}{4}}\right]^2}, \tag{27}$$

$$(\Omega_5 = 2 C_1 C_2 C_5 m \bar{m}^{\frac{1}{2}}).$$

Bezeichnen wir $Y_1(\lambda) = \underset{t \in \langle c, b\rangle}{\operatorname{Max}} |y_1(t)|$. Durch Einsetzen aus (26), (26′) und (27) in (25) gewinnen wir für $y_1(t)$ die Abschätzung:

$$|y_1(t)| \leqq C_1 \left[1 + \frac{\pi}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \Omega_3(c-a)\, m\right] + \frac{\pi}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} C_2 \Omega_4 (c-a)\, m +$$

$$+ \Omega_5 \frac{m}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \int_c^t |y_1(\tau)|\, d\tau,$$

und es gilt mithin

$$Y_1(\lambda) \leqq m C_1 \left[1 + \frac{\pi}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \Omega_3(c-a)\, m\right] +$$

$$+ \frac{m}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} [\pi C_2 C_4 (c-a) + \Omega_5 (b-c)\, Y_1(\lambda)]. \tag{28}$$

Aus (28) folgt für genügend grosse λ

$$Y_1(\lambda) \leqq m C_1 + \eta. \tag{29}$$

Aus der Gleichung (25) ergibt sich durch Anwendung von (26), (26′), (27) und (29) die Formel

$$y_1(t) = Y_1(t)\left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right)\right] + Y_2(t)\, O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right) + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right) \quad \text{für } \lambda \to +\infty,$$

die in der Gestalt von (24) geschrieben werden kann.

b) Aus der Gleichung (y_2, Y_2) und (16) haben wir

$$y_2(t) = Y_2(t)\left[1 - \frac{\pi}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} \int_c^t Y_1(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\, y_2(\tau)\, dt +\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{\lambda^{\frac{2}{2k+1}}} Y_1(t) \int_c^t Y_2(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\, y_2(\tau)\, d\tau. \right. \tag{30}$$

Sei $\eta > 0$. Durch analoge Überlegung wie im Fall a) kann man feststellen, daß für genügend große λ

$$|y_2(t)| \leqq m C_2 + \eta. \tag{29′}$$

gilt. Da für $i = 1, 2$

$$\left|\int_c^t Y_i(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\, y_2(\tau)\, d\tau\right| \leqq C_1 C_5 m (m C_2 + \eta) \,.\, (b-c),$$

gilt, ist es

$$\int_c^t Y_i(\tau) [\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)] \,.\, y_2(\tau)\, d\tau = O(1). \tag{31}$$

Durch Einsetzen aus (31) in (30) bekommen wir die Formel (24′).

Satz II.7. Die Integrale $y_1(t), y_2(t)$ der DGl (y) sind im Intervall $\langle a, b\rangle$ linear unabhängig.

Beweis: Wählen wir $t = c$, so beweisen wir leicht mit Hilfe von (y_1, Y_1), (y_2, Y_2) und (16) die Beziehung

$$W(y_1, y_2) = W(Y_1, Y_2) - \int_a^c Y_2(\tau)\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\,.\,y_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{32}$$

Das Integral in (32) existiert für jedes λ; bezeichnen wir es mit $I(\lambda)$. Aus (20) folgt:

$$|I(\lambda)| \leqq \int_a^c \left| Y_1(\tau)\, Y_2(\tau)\,.\left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{2}{2k+1}}\right)\right].\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\right| \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \int_a^c mC_1'C_2'C_5(1 + \eta)\,\mathrm{d}\tau \leqq mC_1'C_2'C_5(1 + \eta)\,.\,(c - a) = \Omega,$$

und folglich für genügend große λ ist $W(y_1, y_2) < 0$, denn $W(Y_1, Y_2) = -\lambda^{\frac{2}{2k+1}}\pi^{-1}$.

5. *Fall $k = 1$*

Die Funktionen (2) bzw. (2′) sind Airysche Funktionen $Ai(x)$ bzw. $Bi(x)$. Für $k = 1$ kann man schärfere Abschätzungen für die Integrale $y_i (i = 1, 2)$ der DGl (y), als die in den Formeln (20), (24) und (24′) angegebenen erhalten. Aus den Formeln (17) und (17′) ergibt sich nämlich:

$$\left|\frac{Y_i(\tau)}{Y_i(t)} K(t, \tau)\,[\{\varphi, \tau\} - r(\tau, \lambda)]\right| \leqq \frac{C}{\lambda\varphi'(\tau)|\varphi(\tau)|^{\frac{2k-1}{2}}} = \frac{C}{\lambda\,|\,p(\tau)\,|^{\frac{1}{2}}}. \tag{17″}$$

Die Abschätzungen von (22) haben dann die Form

$$W_i(\lambda) \leqq 1 + \frac{\Omega_i}{\lambda} W_i(\lambda) \int_a^c \frac{\mathrm{d}t}{|\,p(\tau)\,|^{\frac{1}{2}}}. \tag{22′}$$

Man kann leicht beweisen, daß wenn die Funktion $p(t)$ im Intervall $\langle a, c\rangle$ die Eigenschaften (V_2) besitzt, so konvergiert das Integral

$$\int_a^c \frac{\mathrm{d}\tau}{|\,p(\tau)\,|^{\frac{1}{2}}} \tag{33}$$

für $k = 1$ und divergiert für $k \geqq 2$.

Für $k = 1$ ergeben sich dann anstelle von (20), (24) und (24′) die Formeln

$$y_i(t) = Y_i(t)[1 + O(\lambda^{-1})] \qquad \text{für } \lambda \to +\infty, \tag{$\overline{20}$}$$

für $t \in \langle a, c\rangle$ und ferner

$$y_1(t) = Y_1(t)[1 + O(\lambda^{-1})] + Y_2(t)\,.\,O(\lambda^{-1}) \qquad \text{für } \lambda \to +\infty, \tag{$\overline{24}$}$$

$$y_2(t) = Y_2(t)[1 + O(\lambda^{-1})] + Y_1(t)\,.\,O(\lambda^{-1}) \qquad \text{für } \lambda \to +\infty. \tag{$\overline{24'}$}$$

für $t \in \langle c, b\rangle$ ([2]).

Bemerkung 7. Aus den Abschätzungen (22) und den Eigenschaften des Integrals (33) folgt, daß für $k > 1$ mittels der angewandten Methode keine schärferen Formeln für y_1, y_2, als die von (20), (24) und (24') bekommen werden können.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Borůvka O.:* Diferenciálne rovnice. Bratislava, SPN 1961.
[2] *Erdélyi A.:* Asimptotičeskije razloženija. Moskva, GIMFL 1962.
[3] *Jarník V.:* Diferenciální počet II. Praha, ČSAV 1956.
[4] *Kuzněcov D. S.:* Speciaľnyje funkcii. Moskva, Vysšaja škola 1962.
[5] *Laitoch M.:* Sur une théorie des critères comparatifs sur l' oscillation des integrales de l'équation différentielle $u'' = P(x) . u$. In: Spisy PF MU v Brně č. 365, 1955.
[6] *Trikomi F.:* Differenciaľnyje uravněnija. Moskva, I. L. 1962.

Shrnutí

O ASYMPTOTICKÝCH VLASTNOSTECH INTEGRÁLŮ STURM—LIOUVILLEOVY DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S T. ZV. PŘECHODOVÝM BODEM

V práci jsou studovány asymptotické vlastnosti integrálů *d.* rovnice (y) pro $\lambda \to +\infty$ v případě, že funkce $p(t)$ resp. $r(t, \lambda)$ mají pro $t \in \langle a, b\rangle$ vlastnosti (V_2) resp. (V_3).

V I. kapitole je konstruována jistá dvojice lineárně nezávislých integrálů *d.* rovnice (z) a jsou odvozeny některé jejich vlastnosti.

Ve II. kapitole je použito transformace integrálů *d.* rovnice (z) podle [1] na integrály *d.* rovnice (Y). Metodou uvedenou v [2] jsou odvozeny vzorce (20), (24) a (24'), vyjadřující integrály *d.* rovnice (y) pomocí integrálů *d.* rovnice (Y) pro $t \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \to +\infty$.