

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum  
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

---

Josef Šimek

Benützung der Steiner-Pelz Parabel in der darstellenden Geometrie der  
quadratischen Flächen

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol.  
9 (1968), No. 1, 135--157

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119899>

**Terms of use:**

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to  
digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain  
these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped  
with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics  
Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty  
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek*

BENÜTZUNG DER STEINER-PELZ PARABEL  
IN DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE  
DER QUADRATISCHEN FLÄCHEN

JOSEF ŠIMEK

I. EINLEITUNG

a) Es ist ein beliebiger, einfacher Kegelschnitt  $k$  gegeben. Die Polare eines Punktes  $P$  in bezug auf den Kegelschnitt  $k$  wird mit  $p$  bezeichnet (Fig. 1). Der Pol  $Q$  der Geraden  $q$ , die durch den Punkt  $P$  geht, liegt auf der Polare  $p$ . Die durch den Punkt  $Q$  führende und zur Polare  $q$  senkrechte Gerade ist die senkrechte, zur Polare  $q$  konjugierte Polare  $q'$  in bezug auf den Kegelschnitt  $k$ .

Wenn die Gerade  $q$  sich um den Punkt  $P$  dreht, so bewegt sich ihr Pol  $Q$  auf der Geraden  $p$  und die zur Polare  $q$  senkrechte, konjugierte Polare  $q'$  erzeugt, wie bekannt, die sogenannte Steiner-Pelz Parabel des Punktes  $P$  in bezug auf den Kegelschnitt  $k$ ; wir bezeichnen sie kurz die St.-P. Parabel.

Einige besondere Lagen der drehenden Geraden  $q$  führen zu den hervortretenden Tangenten der St.-P. Parabel; ist z. B.  $q \perp o$ , so ist  $q' \equiv o$ , und umgekehrt, wenn  $q \perp o'$  ist, so ist  $q' \equiv o'$ . So ist also jede Achse des gegebenen Kegelschnittes  $k$  die Tangente der St.-P. Parabel. Oder, wenn  $q \equiv r$  ist, so ist  $q' \equiv r$  und umgekehrt ( $r, r'$  sind die Winkelsymmetralen der durch den Punkt  $P$  auf den Kegelschnitt  $k$  gelegten Tangenten  $t, t'$ );  $r \perp r'$  sind also auch die Tangenten der St.-P. Parabel. Die Punkte  $S \equiv o \cdot o'$  und  $P \equiv t \cdot t'$  liegen auf der Leitlinie der St.-P. Parabel, denn  $o \perp o'$  und  $r \perp r'$  sind die Paare der senkrechten Tangenten der St.-P. Parabel. Wenn wir im Punkte  $M \equiv p \cdot SP$  die Gerade  $m \perp p$  konstruieren ( $p$  ist auch eine Tangente der St.-P. Parabel), so bekommen wir ein weiteres Paar senkrechter Tangenten  $p, m$  der St.-P. Parabel.

Konstruktionshalber werden wir die St.-P. Parabel durch zwei Paare senkrechter Tangenten  $m \perp p$  und  $r \perp r'$  bestimmen. Diese Tangenten  $p, m, r, r'$  bilden ein der St.-P. Parabel umschriebenes, vollständiges Viereck. Wenn man  $r \cdot r' \equiv P$  und  $p \cdot m \equiv M$  bezeichnet, so wird die Diagonale  $PM$  zur Leitlinie  $d$  und ihre Gegendiagonalecke zum Brennpunkt  $F$  der St.-P. Parabel ( $F = 12 \cdot 34, 1 \equiv p \cdot r, 2 \equiv m \cdot r', 3 \equiv m \cdot r$  und  $4 \equiv p \cdot r'$ ) (Fig. 2). Außerdem ist die Diagonale  $PM$  der Durchmesser des Kegelschnittes  $k$ .

b) Jetzt werden wir unsere Aufmerksamkeit solchen Konstruktionen der Kegelschnitte widmen, bei welchen wir mit Hilfe der St.-P. Parabel die Achsen und die Scheitel des Kegelschnittes konstruieren können.

Beispiel 1a. Ein Kegelschnitt  $k$  ist durch zwei sich schneidende Tangenten  $t_1, t_2$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^1T, {}^2T$  und durch den Mittelpunkt  $S$  gegeben; der Mittelpunkt  $S$  liegt auf dem Durchmesser  $PM$  ( $P \equiv {}^1t, {}^2t, M$  ist der Mittelpunkt der Sehne  ${}^1T{}^2T$ ) und ist von  $P$  und  $M$  verschieden. Es sind mit Hilfe der St.-P. Parabel die Achsen  $o$  und  $o'$  des Kegelschnittes  $k$  zu konstruieren (Fig. 3).

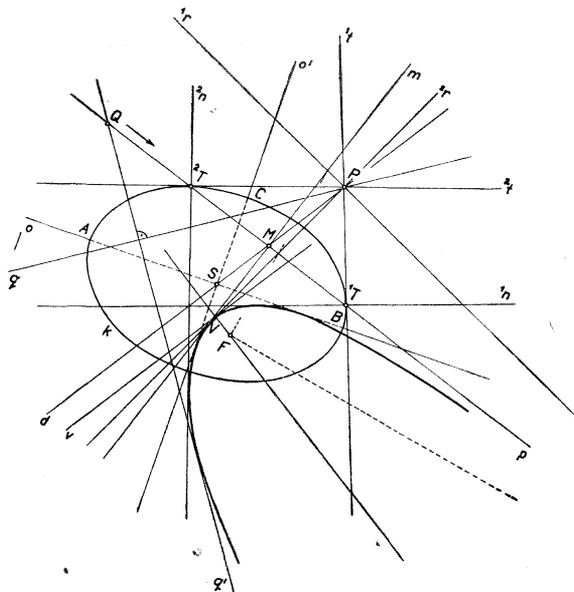


Fig. 1.

Wir konstruieren die Leitlinie  $d$  und den Brennpunkt  $F$  der St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv {}^1t, {}^2t$  in bezug auf den Kegelschnitt  $k$ . Wir bestimmen dafür vier Tangenten: die Winkelsymmetralen  $r_1 \perp r_2$  der Tangenten  $t_1, t_2$ , die Polare  $p$  des Punktes  $P \equiv {}^1t, {}^2t$  ( $p \equiv {}^1T{}^2T$ ) und die durch den Mittelpunkt  $M$  der Sehne  ${}^1T{}^2T$  gehende Gerade  $m \perp p$  ( $PM \equiv d$  ist die Leitlinie und  $2 \cdot 34 \equiv F$  ist der Brennpunkt der St.-P. Parabel). Durch den Mittelpunkt  $S$  an die St.-P. Parabel gelegte Tangenten  $o, o'$  sind die Achsen des Kegelschnittes  $k$  ( $o$  halbiert den Winkel  $\sphericalangle PSF, o' \perp o$ ).

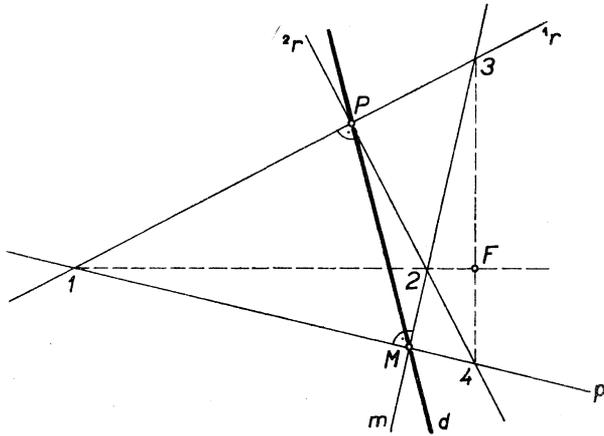


Fig. 2.

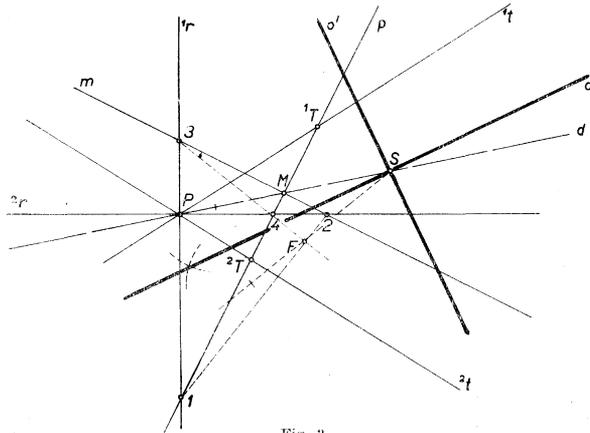


Fig. 3.

Bemerkung. 1. Wenn der Punkt  $S$  innerhalb der zur Halbgeraden  $MP$  entgegengerichteten Halbgeraden liegt, so sind  $o, o'$  die Achsen einer Ellipse; wenn der Punkt  $S$  innerhalb der Halbgeraden  $MP$  sich befindet, aber  $S \neq P$ , ist, so sind  $o, o'$  die Achsen einer Hyperbel.

2. Ist der Punkt  $S \equiv P$ , dann ist der Kegelschnitt  $k$  aus zwei Geraden zusammengesetzt. In unseren Konstruktionen kommen nur einfache Kegelschnitte vor.

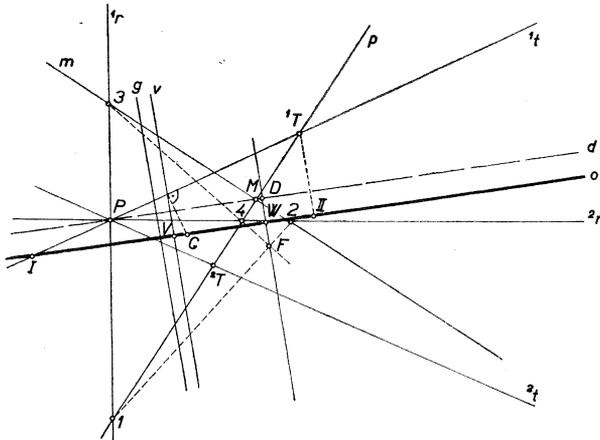


Fig. 4.

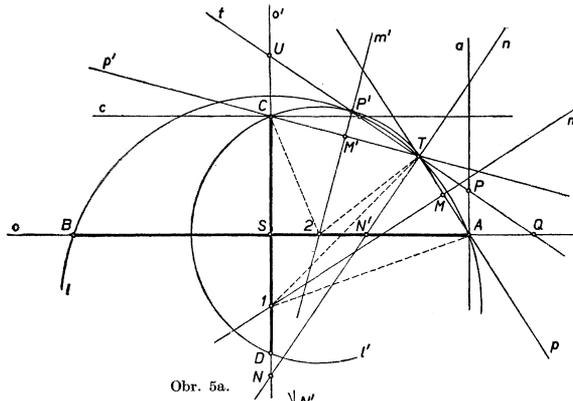
Beispiel 1b. Eine Parabel  $k$  ist durch zwei sich schneidende Tangenten  $t_1, t_2$  mit ihren Berührungspunkten  $T_1, T_2$  gegeben. Es ist mit Hilfe der St.-P. Parabel die Achse  $o$  der Parabel  $k$  zu konstruieren (Fig. 4).

Wir konstruieren wieder die Leitlinie  $d$  und den Brennpunkt  $F$  der St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv T_1, T_2$ ; die St.-P. Parabel ist durch vier Tangenten  $t_1 \perp t_2$  und  $m \perp p$  bestimmt, wie es im vorhergehenden Beispiel 1a der Fall war. Die Scheiteltangente der St.-P. Parabel ist die Achse  $o$  der Parabel  $k$  ( $PM \equiv d, F \equiv 12 \cdot 34; FD \perp d, WF = WD, W \in o \parallel d$ ).

Den Scheitel  $V$ , die Scheiteltangente  $v$ , den Brennpunkt  $G$  und die Leitlinie  $g$  der Parabel  $k$  konstruieren wir auf Grund der elementaren Fokaleigenschaften einer Parabel ( $I II$  ist die Subtangente,  $VI = VII, V \in v \perp o$  usw.).

Beispiel 2. Ein Kegelschnitt  $k$  ist durch die Achsen  $o, o'$  und durch die Tangente  $t$  mit dem Berührungspunkt  $T$ , der nicht auf den Achsen  $o, o'$  liegt, gegeben; es sind mit Hilfe der St.-P. Parabel die Scheitel des Kegelschnittes  $k$  zu untersuchen (Fig. 5).

Da der Punkt  $T$  mit keiner von den Achsen  $o, o'$  inzident ist, so schneidet die Tangente  $t$  im Punkte  $T$  des Kegelschnittes  $k$  beide Achsen  $o, o'$ . Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Tangente  $t$  und die Achsen  $Q \equiv o . t$  und  $U \equiv o' . t$ .



Obr. 5a.

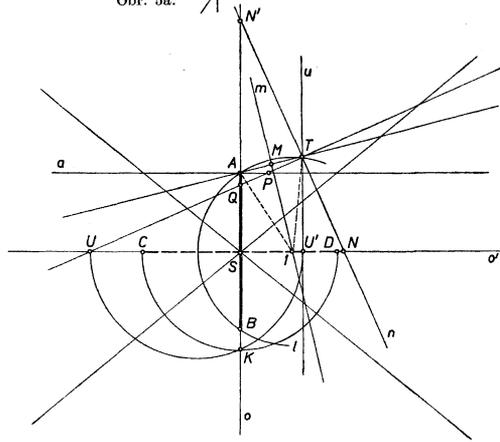


Fig. 5b.

Wenn der Berührungspunkt  $T$  innerhalb der Strecke  $QU$  liegt, so ist der Kegelschnitt  $k$  eine Ellipse (Fig. 5a), wenn  $T$  ein äußerer Punkt der Strecke  $QU$  ist, dann ist der Kegelschnitt  $k$  eine Hyperbel (Fig. 5b).

Die St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv t . a$  ( $a$  ist die Scheiteltangente durch den Scheitel  $A$  der Achse  $o$ ) hat in bezug auf den Kegelschnitt  $k$  diese Tangenten: die Achsen  $o, o'$ , die Polare  $p = AT$  des Punktes  $P$ , die Gerade  $m \perp p$ , die durch den Mittelpunkt der Sehne  $AT$  geht, und die Normale  $n$  durch den Punkt  $T$  des Kegelschnittes  $k$ . Die Tangenten  $o, m, n$  schneiden auf den Tangenten  $p$  und  $o'$  ähnliche Punktreihen aus; da die Tangente  $m$  die Strecke  $AT$  halbiert, so halbiert  $m$  auch die Strecke  $SN$ . Aber die Tangente  $m$  ist die Symmetrale der Strecke  $AT$  und deshalb ist  $IT = IA$  (der Punkt  $I \equiv m . o'$ ). Die Scheitel  $A, B$  der Achse  $o$  liegen in den Schnittpunkten der Achse  $o$  und des um  $I$  als Mittelpunkt mit  $IT$  als Radius geschlagenen Kreises  $l$  (Fig. 5a., b).

Durch ähnliche Betrachtung über die St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv t . c$  ( $c$  ist die Scheiteltangente des Kegelschnittes  $k$  im Scheitelpunkt  $C$ ) konstruieren wir die Scheitel  $C, D$  auf der Achse  $o'$  (Fig. 5a). Wenn man um  $Z$  ( $Z$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $SN'$ ;  $N' \equiv n . o$ ) als Mittelpunkt mit  $2T$  als Radius den Kreis  $l'$  schlägt, so schneidet  $l'$  die Achse  $o'$  in den Scheiteln  $C, D$ .

Die imaginären Scheitel  $C, D$  der Nebenachse  $o'$  der Hyperbel  $k$  konstruieren wir auf folgende Weise: Wir zeichnen die Polare  $u$  des Poles  $U \equiv t . o'$  ( $T \in u, u \perp o$ ); der Schnittpunkt  $U' \equiv u . o'$  und der Punkt  $U$  sind konjugierte Pole der Hyperbel  $k$ . Aus der Involutionsbeziehung auf der Achse  $o'$  folgt:  $\overrightarrow{SU} . \overrightarrow{SU'} = SK^2 = SC^2 = SD^2$ .

## II. BENÜTZUNG DER ST.-P. PARABEL IN DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE DER QUADRATISCHEN FLÄCHEN

Vorige Konstruktionen der Achsen und der Scheitel eines Kegelschnittes mit Hilfe der St.-P. Parabel können wir in manchen Aufgaben über quadratische Flächen in darstellender Geometrie ausnützen.

### A. Ebene Schnitte quadratischer Flächen

1. In der Eintafelprojektion ist ein schiefer, elliptischer Kegel mit der Basis  $k$  ( $AB, CD$ ) in der Projektionstafel und mit dem Scheitel  $V$  ( $V_1, z_0$ ) durch die Ebene  $\rho$  ( $p', O' \in OV$ ) geschnitten. Es ist den Riß dieses Schnittes zu konstruieren (Fig. 6).

In diesem Falle handelt es sich deutlich um einen elliptischen Schnitt. Mit Hilfe der Kollineation ( $V_1$  ist das Kollineationszentrum,  $p'_1$  ist die Kollineationsachse,  $O_1, O'_1$  sind die entsprechenden Punkte) suchen wir die Berührungspunkte  ${}^1T_1, {}^2T_1$  des Risses  $k_1$  der Schnittkurve  $k$  mit den Umrißgeraden  $V_1{}^1T_1$  und  $V_1{}^2T_1$ . Der Mittelpunkt  $S_1$  der Ellipse  $k_1$  liegt im Schnittpunkte der Geraden  $V_1M$  ( $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  ${}^1T_1{}^2T_1$ ) und der mit dem Durchmesser  $q_1$  der Basis kollinear verwandten Geraden  $q'_1$  ( $q_1$  ist zur Kollineationsachse  $p'_1$  konjugiert).

Die Ellipse  $k_1$  ist durch die Tangenten  ${}^1T_1V_1, {}^2T_1V_1$  mit den Berührungspunkten  ${}^1T_1$  und  ${}^2T_1$  und durch den Mittelpunkt  $S_1$ , der auf der Geraden  $V_1M$

liegt, bestimmt. Mit Benützung der St.-P. Parabel des Punktes  $V_1$  in bezug auf die Ellipse  $k_1$ , die durch vier Tangenten  $m \perp p$  und  ${}^1r \perp {}^2r$  bestimmt ist, werden die Achsen und die Scheitel der Ellipse  $k_1$  konstruiert, ebenso wie in der Aufg. 1a. 2. Kap. I, Absatz b.

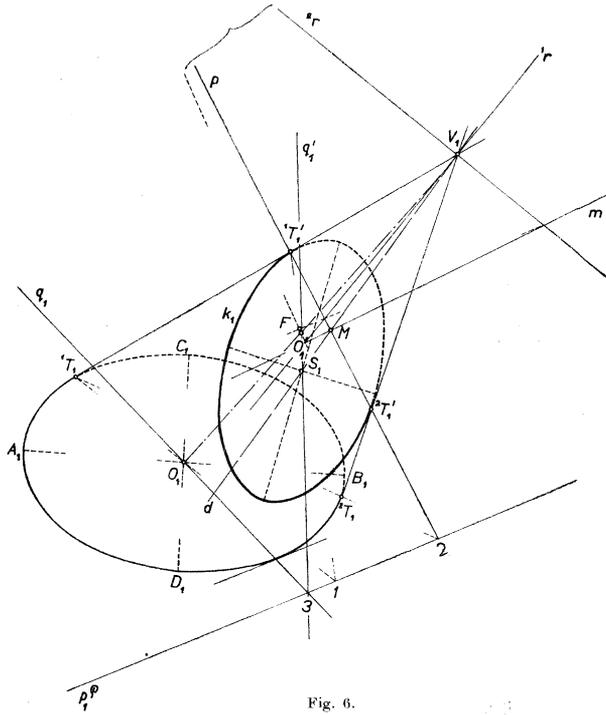


Fig. 6.

2. Es sind die zugeordneten Normalrisse eines Schnittes  $k$  der Ebene  $\rho$  ( $p\rho, n\rho$ ) und des einschaligen Hyperboloides  $H$  zu konstruieren. Das Hyperboloid  $H$  ist durch drei Achsen  $A^1A \parallel x, B^1B \perp v, C^1C \perp \pi$  und durch den in  $\pi$  liegenden Hauptschnitt  $c$  ( $A^1A, B^1B$ ) gegeben (Fig. 7).

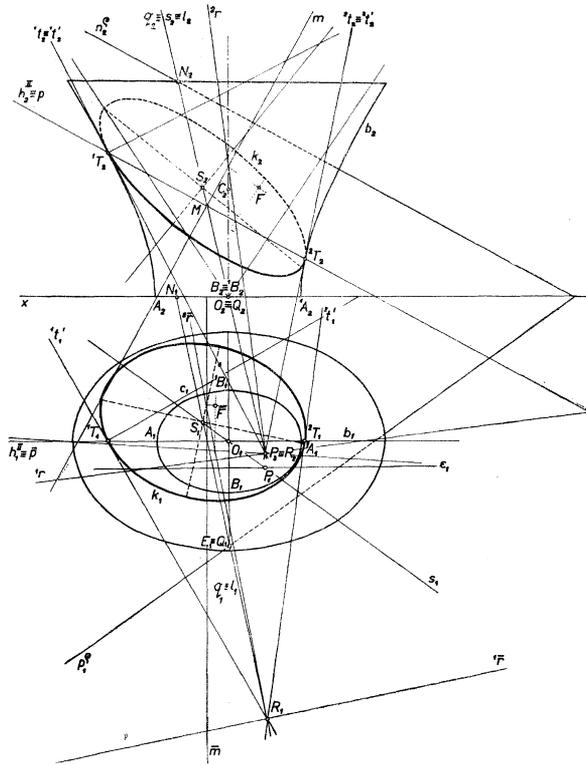


Fig. 7.

Die Ebene  $\varepsilon \parallel \rho$ , die durch den Scheitel  $O$  des asymptotischen Kegels geht, schneidet ersichtlich den asymptotischen Kegel nicht und infolgedessen ist die Schnittkurve  $k$  eine Ellipse.

Längs der Schnittkurve  $k$  berührt das Hyperboloid  $H$  eine Kegelfläche  $K$ , deren Scheitelpunkt  $P$  der Pol der Ebene  $\rho$  in bezug auf das Hyperboloid ist. Wenn man die Umrißgeraden der Kegelfläche  $K(k; P)$  in beiden Rissen (falls

sie existieren) und die Risse des Mittelpunktes  $S$  der Ellipse  $k$  konstruiert, so ist jeder Riß der Ellipse  $k$  durch zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und durch den Mittelpunkt bestimmt; dann konstruiert man mit Benützung der St.-P. Parabel leicht die Achsen und die Scheitel jedes Risses der Ellipse  $k$ .

Mit Hilfe der zweiten Hauptlinie  $h''$  werden die Punkte  ${}^1T_2, {}^2T_2$  auf dem Umrisse  $b_2$  im zweiten Risse konstruiert; die Tangenten  ${}^1t_2, {}^2t_2$  in den Punkten  ${}^1T_2$  und  ${}^2T_2$  der Hyperbel  $b_2$  bilden den Umriß des Berührungskegels  $K(k; P)$  im zweiten Risse,  ${}^1t_2, {}^2t_2 \equiv P_2$  ist der Aufriß ihres Scheitelpunktes. Die Tangenten  ${}^1t_2, {}^2t_2$  mit den Berührungspunkten  ${}^1T_2$  und  ${}^2T_2$  sind auch Tangenten und Berührungspunkte des Aufrisses  $k_2$  der Ellipse  $k$ .

Im Grundrisse hat der Berührungskegel  $K(k; P)$  keinen Umriß, weil die Spurlinie  $p''$  die Ellipse  $c_1$  in  $\pi$  nicht schneidet; also liegt der Grundriß  $P_1$  des Scheitels  $P$  des Berührungskegels  $K(k; P)$  innerhalb der Ellipse  $c_1$ . Da die Polarebene  $\varepsilon$  des Punktes  $E \equiv B^1B \cdot \rho$  in bezug auf das Hyperboloid  $H$  zur Bildebene  $\pi$  senkrecht ist, so ist  $\varepsilon_1$  die Polare des Punktes  $E_1 \equiv B_1^1B_1 \cdot p''$  in bezug auf die Ellipse  $c_1$ . Die Ebenen  $\varepsilon$  und  $\rho$  sind aber konjugierte Polarebenen und deshalb liegt der Punkt  $P$  in der Ebene  $\varepsilon$ , d. h.  $P_1$  auf  $\varepsilon_1$ . Da der Berührungskegel  $K(k; P)$  keine Umrißgeraden im Grundrisse hat ( $P_1$  liegt innerhalb der Ellipse  $c_1$ ), so konstruieren wir die Grundrisse zweier anderer Tangenten der Ellipse  $k$ , z. B. in den Punkten  ${}^1T, {}^2T$  auf dem Hauptschnitte  $b$  ( ${}^1T_1, {}^2T_1 \in b_1$ ). Bezeichnet man die Tangenten der Ellipse  $k$  in den Punkten  ${}^1T$  und  ${}^2T$  mit den Buchstaben  ${}^1t, {}^2t$  und ihren Schnittpunkt mit  $R$ , dann ist  ${}^1t_2 \equiv {}^1t_2$  und  ${}^2t_2 \equiv {}^2t_2$  und  $R_2 \equiv P_2 \equiv {}^1t_2 \cdot {}^2t_2$ ; da der Punkt  $R \equiv {}^1t \cdot {}^2t$  in der Ebene  $\rho$  liegt, so wird sein Grundriß  $R_1$ , z. B. mit Hilfe der Geraden  $q \equiv QN$  der Ebene  $\rho$  konstruiert. Die Geraden  $R_1{}^1T_1 \equiv {}^1t_1$  und  $R_1{}^2T_1 \equiv {}^2t_1$  sind bereits die Grundrisse der Tangenten  ${}^1t$  und  ${}^2t$ . Dadurch verschafft man auch für den Grundriß  $k_1$  der Ellipse  $k$  zwei Tangenten  ${}^1t_1, {}^2t_1$  mit den Berührungspunkten  ${}^1T_1$  und  ${}^2T_1$ .

Der Mittelpunkt  $S$  der Ellipse  $k$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $s \equiv PO$  mit der Ebene  $\rho$  ( $s_2 \equiv l_2$ ;  $l_1 \cdot s_1 \equiv S_1$ ;  $S_2 \in s_2$ ).

Beide zugeordneten Normalrisse der Ellipse  $k$  sind immer durch zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und durch den Mittelpunkt bestimmt. In beiden Rissen werden die Achsen und die Scheitel mit Benützung der St.-P. Parabel konstruiert wie in der Aufgabe 1a. 2, Kap. I, Abs. b.

## B. Durchdringungen quadratischer Rotationsflächen

Die Steiner-Pelz Parabel kann auch vorteilhaft verwendet werden, wenn man den Riß der Durchdringungskurve zweier quadratischen Rotationsflächen in die Ebene ihrer entweder parallelen oder sich schneidenden Achsen konstruieren soll.

1. *Fig. 8 zeigt den Aufriß der Durchdringungskurve eines einschaligen Drehhyperboloids und eines verkürzten Drehellipsoids, deren Achsen  ${}^1o, {}^2o$  in der Aufrißebene liegen und parallel sind.*

Es ist bekannt, daß die Durchdringungskurve  $k$  eine Raumkurve vierten Grades ist, die sich in die Achsenebene, d. h. in die Aufrißebene  $\nu$  als eine Parabel projiziert; die Achse dieser Parabel ist senkrecht zu  ${}^1o \parallel {}^2o$ .

Für den Aufriß  $k_2$  der Durchdringungskurve  $k$  konstruieren wir zwei beliebige Punkte der Kurve  $k_2$  und die Tangenten in diesen Punkten; wir bezeichnen

diese Punkte  ${}^1T$ ,  ${}^2T$  und die Tangenten in diesen Punkten  ${}^1t$ ,  ${}^2t$ . Zum Beispiel den Punkt  ${}^1T$  konstruieren wir folgendermaßen: Wir führen zu den Achsen  ${}^1o$   ${}^2o$  eine beliebige, senkrechte Ebene  $\alpha$ . Die Ebene  $\alpha$  schneidet das einschalige Drehhyperboloid  $H$  in einem Kreise  ${}^1k$ , das verkürzte Drehellipsoid  $E$  in einem Kreise  ${}^2k$ . Beide Kreise  ${}^1k$ ,  ${}^2k$  schneiden sich in den zur Aufrißebene  $\nu$  symmetrisch

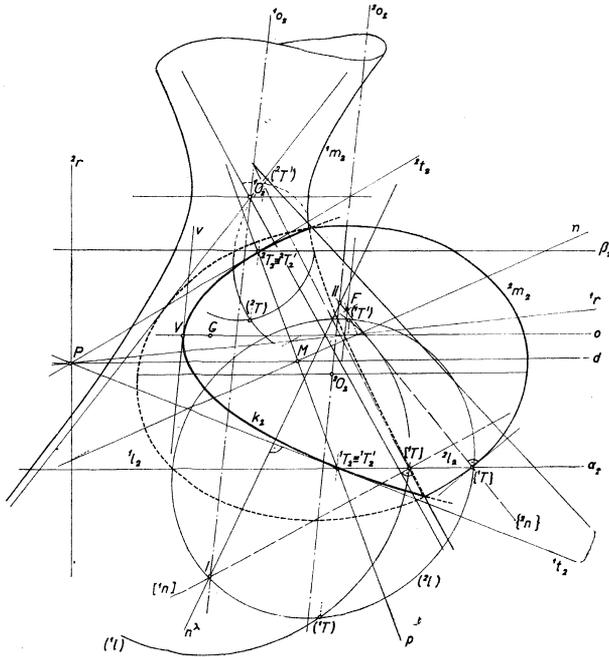
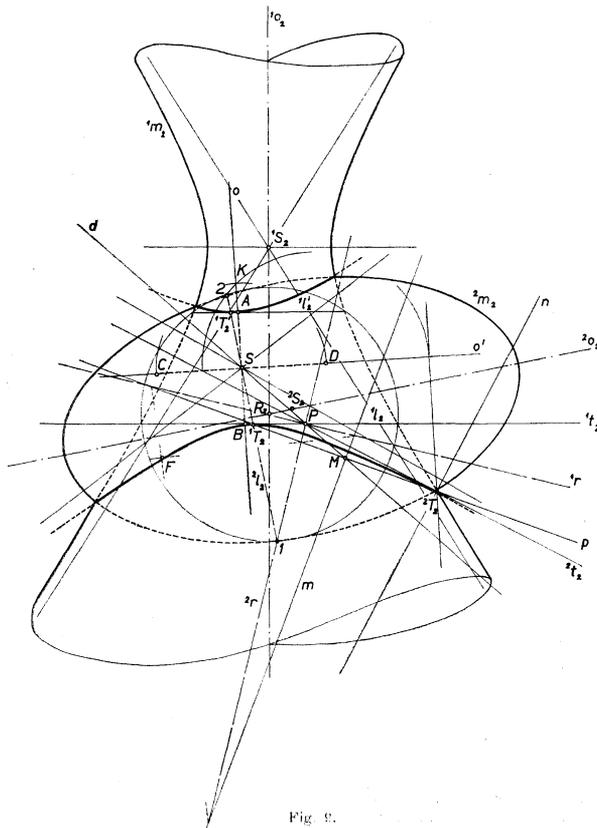


Fig. 8.

liegenden Punkten  ${}^1T$ ,  ${}^1T'$  (falls sie existieren); nach der Umlegung der Ebene  $\alpha$  in die Aufrißebene  $\nu$  ist  ${}^1T$ ,  ${}^1T'$   $\equiv$   ${}^1l$ ,  ${}^2l$ ;  ${}^1T$   ${}^1T'$   $\perp$   $\alpha_2$ ;  ${}^1T$   ${}^1T'$   $\cdot$   $\alpha_2 \equiv$   ${}^1T_2 \equiv$   ${}^1T'_2$ . Auf ähnliche Weise konstruieren wir den Punkt  ${}^2T_2 \equiv$   ${}^2T'_2$ . Die zu  ${}^1l$  im Berührungspunkte  ${}^1T$  senkrechte Ebene  $\lambda$  enthält alle Normalen zu der Durchdringungskurve  $k$  im Punkte  ${}^1T$ , also auch die Normale  ${}^1n$  des

Hyperboloides  $H$  und die Normale  ${}^2n$  des Ellipsoides  $E$  im Punkte  ${}^1T$ . Wenn wir die Spurlinie  $n^2$  der Ebene  $\lambda \equiv {}^1n \cdot {}^2n$  auf der Ebene der Achsen  ${}^1o \parallel {}^2o$  untersuchen, dann ist  ${}^1l_3 \perp n^2$  im Punkte  ${}^1T_2(n^2 \equiv I II; I \equiv [{}^1n] \cdot {}^1o_2, II \equiv$



$\equiv \{^2n\} \cdot ^2o_2$ ;  $[^1n]$  ist die Normale des Meridians  $^1m_2$  im Punkte  $[^1T]$  und  $\{^2n\}$  ist die Normale  $^2m_2$  in  $\{^1T\}$ ).

Da die Achse der Parabel  $k_2$  zu  $^1o, ^2o$  senkrecht ist, genügt es, durch den Mittelpunkt  $M$  der Sehne  $^1T_2^2T_2$  einen zu  $^1o \parallel ^2o$  senkrechten Durchmesser  $d$  zu konstruieren und den Schnittpunkt  $P$  mit der Tangente  $^1t_2$  zu suchen; dann ist  $P^2T_2 \equiv ^2t_2$  die Tangente der Parabel  $k_2$  im Punkte  $^2T_2$ . Mit Verwendung der St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv ^1t_2 \cdot ^2t_2$  konstruieren wir die Achse  $o$ , den Scheitel  $V$  und den Brennpunkt  $G$  der Parabel  $k_2$  wie im Beispiel 1b, Kap. I. Abs. b.

2. Es ist den Aufriß  $k_2$  der Durchdringungskurve  $k$  des einschaligen Drehhyperboloids  $H$  und des verlängerten Drehellipsoids  $E$  zu konstruieren, deren Achsen  $^1o$  und  $^2o$  in der Aufrißebene  $v$  liegen und sich im Punkte  $R$  schneiden (Fig. 9).

Die Durchdringungskurve  $k$  ist, wie bekannt, eine Raumkurve vierten Grades, die sich in die Achsenebene, d. h. in die Aufrißebene  $v$ , als die Hyperbel  $k_2$  projiziert.

Die Kugelfläche  $\kappa$  mit dem Mittelpunkt  $R \equiv ^1o \cdot ^2o$ , die das Drehellipsoid  $E$  längs des Kreises  $^1t$  berührt (die Ebene des Kreises  $^1t$  ist senkrecht zu  $v$ ;  $^1t_2 \equiv I^2$ ), schneidet das Drehhyperboloid  $H$  in zwei Kreisen  $^1t$  und  $^1t'$ , deren Ebenen auch zur Aufrißebene  $v$  senkrecht sind;  $^1t, ^1t'$  schneiden  $^1t$  in vier Punkten (falls sie alle existieren), die sich je zwei in die Punkte  $^1T_2$  und  $^1T'_2$  projizieren. Der Mittelpunkt  $S$  der Strecke  $^1T_2^1T'_2$  ist der Mittelpunkt der Hyperbel  $k_2$ , denn die Tangenten sind in den Endpunkten  $^1T_2, ^1T'_2$  parallel.

Bezeichnen wir die Tangente im Punkte  $^1T_2$  mit  $^1t_2$  und konstruieren wir noch eine Tangente der Hyperbel  $k_2$ , z. B. im Punkte  $^2T_2 \equiv ^1m_2 \cdot ^2m_2$ , und bezeichnen wir sie mit  $^2t_2$  ( $MS \cdot ^1t_2 \equiv P, M$  ist der Mittelpunkt  $^1T_2^2T_2$ ;  $P^2T_2 \equiv ^2t_2$ ). Mit Hilfe der St.-P. Parabel untersuchen wir die Achsen  $o, o'$ , die Scheitel  $A, B, C, D$  und die Asymptoten wie im Beispiel 1a, 2, Kap. I. Abs. b.

### C. Konstruktion des Umrisses der Flächen zweiten Grades

#### a) Parallelprojektion

Es ist in der Parallelprojektion den Umriß eines dreiaxigen Ellipsoids, das durch die konjugierten Durchmesser  $A^1A, B^1B$  und  $C^1C$  gegeben ist, zu konstruieren (Fig. 10).

Es gibt eine das Ellipsoid längs des Hauptschnittes  $c(A^1A; B^1B)$  berührende Zylinderfläche, deren Umrißgeraden  $^1t$  und  $^1t'$  mit dem Durchmesser  $C^1C$  parallel sind und gleichzeitig die Tangenten des Umrisses dieses Ellipsoids sind. Zum Beispiel die Tangente  $^1t$  mit dem Berührungspunkt  $^1T$  wird folgendermaßen konstruiert: Auf die durch  $O$  gehende und zu  $C^1C$  senkrechte Gerade  $q$  projizieren wir senkrecht die Endpunkte  $A, B$  und bekommen die Punkte 1 und 2; wenn wir auf der Geraden  $q$  mit Hilfe der Beziehung  $O1^2 + O2^2 = O3^2$  den Punkt 3 bestimmen, dann geht die Tangente  $^1t$  durch den Punkt 3 und ist mit  $C^1C$  parallel. Den Berührungspunkt  $^1T$  auf der Tangente  $^1t$  bekommen wir, wenn wir  $^1B^1T$  parallel mit  $O4$  ziehen ( $4 \equiv t \cdot BA$ , wo  $BA$  parallel mit  $A^1A$  ist).

Ähnlich gibt es eine das Ellipsoid  $E$  längs des Hauptschnittes  $b(A^1A; C^1C)$  berührende Zylinderfläche, deren Umrißgeraden  $^2t, ^2t'$  mit dem Durchmesser  $B^1B$  parallel sind und auch die Tangenten des Umrisses sind. Die Tangente,

z. B.  ${}^2t \parallel B^1B$ , konstruieren wir auf ähnliche Weise wie die Tangente  ${}^1t$ . Den Berührungspunkt  ${}^2T$  auf  ${}^2t$  konstruieren wir auf Grund der Beziehung  $M^1T = M^2T$  ( $M \equiv {}^1T^2T$ ,  $OP$  und  $P \equiv {}^1t \cdot {}^2t$ ).

Der Umrißkegelschnitt  $k$  ist durch die Tangenten  ${}^1t, {}^2t$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^1T, {}^2T$  und durch den Mittelpunkt  $O$  bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv {}^1t \cdot {}^2t$  in bezug auf den Umrißkegelschnitt  $k$  untersuchen wir die Achsen und die Scheitel wie im Beispiel 1a, 2, Kap. 1, Abs. b.

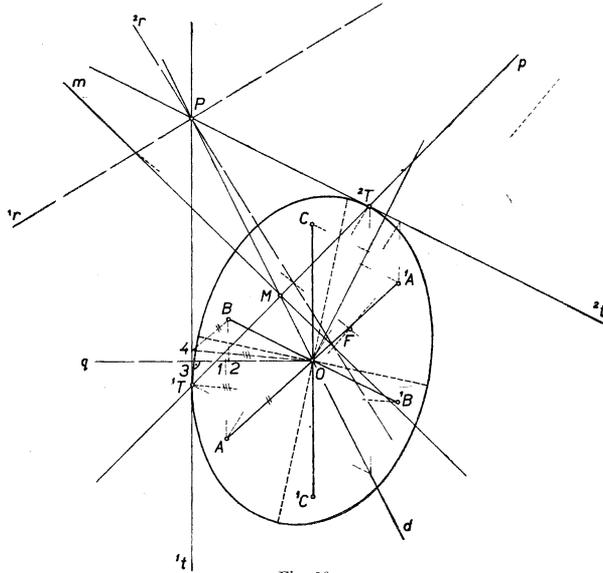


Fig. 10.

#### b) Zentralprojektion

Konstruiert in der Zentralprojektion den Umriß eines dreiaxigen Ellipsoids, das durch die gegen die Projektionstafel allgemein liegenden konjugierten Durchmesser  $a \equiv A^1A$ ,  $b \equiv B^1B$  und  $c \equiv C^1C$  gegeben ist (Fig. 11).

In Fig. 11 sind  $a^s \equiv A^{s1}A^s$ ,  $b^s \equiv B^{s1}B^s$  und  $c^s \equiv C^{s1}C^s$  die Zentralrisse der konjugierten Durchmesser  $a \equiv A^1A$ ,  $b \equiv B^1B$ ,  $c \equiv C^1C$  und  $A_w^s, B_w^s, C_w^s$  sind die Fluchtunkte der Durchmesser  $a, b, c$ ; dabei gilt  $(A^{s1}A^sO^sA_w^s) = (B^{s1}B^sO^sB_w^s) = (C^{s1}C^sO^sC_w^s) = -1$ .

Es gibt eine das Ellipsoid längs des Hauptschnittes ( $A^1A$ ;  $C^1C$ ) berührende Zylinderfläche, deren Umrißgeraden  ${}^1t$  und  ${}^2t$  mit dem konjugierten Durchmesser  $B^1B$  parallel sind und auch die Tangenten des Umrißkegelschnittes  $k$  sind. Ihre Zentralrisen  ${}^1s$  und  ${}^2s$  werden folgendermaßen konstruiert:

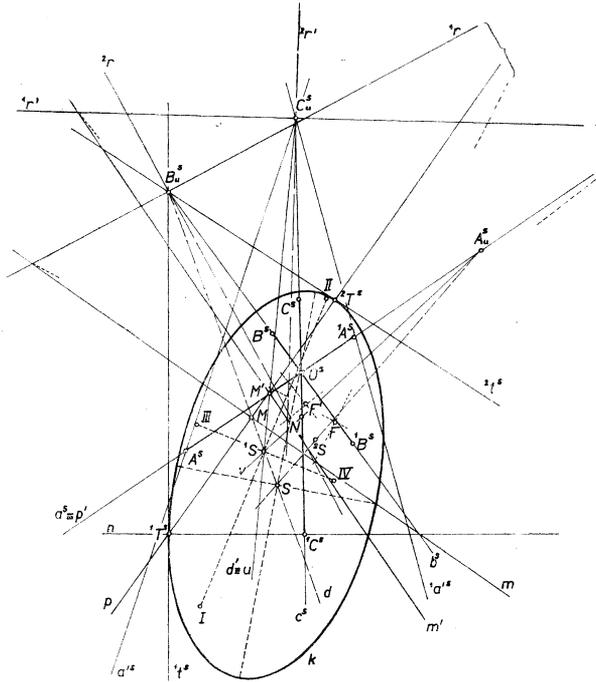


Fig. 11.

Wir ziehen durch den Fluchtpunkt  $B^1s$  die Tangenten an den Zentralriß des Hauptschnittes ( $A^1A$ ;  $C^1C$ ), der durch die konjugierten Sehnen  $A^1sA^2s$  und  $C^1sC^2s$  gegeben ist. Im Schnittpunkte der Durchmesser  $u \equiv C^1sM^1$  ( $M^1$  ist der Mittelpunkt der Sehne  $A^1sA^2s$ ) und  $v \equiv A^1sN^1$  ( $N^1$  ist der Mittelpunkt der Sehne

$C^3C^3$ ) liegt der Mittelpunkt  $^1S$  des Zentralrisses des Hauptschnittes ( $A^1A$ ;  $C^1C$ ). Zum Beispiel die Geraden  $a^s = A^sC_u^s$ ,  $^1a^s = ^1A^sC_u^s$  sind die Tangenten des Zentralrisses des Hauptschnittes ( $A^1A$ ;  $C^1C$ ) in den Punkten  $A^s$ ,  $^1A^s$ . Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $C_u^s$  bestimmen wir die Achsen und die Scheitel *I*, *II*, *III*, *IV* des Zentralrisses des Hauptschnittes ( $A^1A$ ;  $C^1C$ ), wie im B. 1a, 2, Kap. I, Abs. b). Durch den Punkt  $B_u^s$  an die Ellipse (*I II*; *III IV*) gelegte Tangenten  $^1t^s$  und  $^2t^s$  und ihre Berührungspunkte  $^1T^s$ ,  $^2T^s$  sind die Zentralrisse der Umrißgeraden der das Ellipsoid längs der Ellipse (*I II*; *III IV*) berührenden Zylinderfläche und auch die Tangenten des Umrißkegelschnittes  $k$ .

Da der Umrißkegelschnitt  $k$  und die Ellipse (*I II*; *III IV*) die gemeinsame Sehne  $^1T^s2T^s$  haben, so geht die Gerade  $B_u^s1S$  durch den Mittelpunkt  $S$  des Umrißkegelschnittes  $k$ . Ähnlich geht die Gerade  $A_u^s2S$  [ $2S$  ist der Mittelpunkt des Zentralrisses des Hauptschnittes ( $B^1B$ ;  $C^1C$ );  $^2S$  wird ähnlich wie  $^1S$  konstruiert] auch durch den Mittelpunkt  $S$  des Umrißkegelschnittes  $k$ ; es ist also  $S = B_u^s1S \cdot A_u^s2S$ .

Da der Mittelpunkt  $S$  ein Innenpunkt der zu der Halbgeraden  $MB_u^s$  entgegengesetzten Halbgeraden ist, so ist der Umrißkegelschnitt  $k$  eine Ellipse. Mit Benützung der St.-P. Parabel des Punktes  $B_u^s$  werden die Achsen und die Scheitel der Umrißellipse  $k$  wie im Beispiel 1a, 2, Kap. I, Abs. b) konstruiert.

#### D. Beleuchtung der Flächen zweiten Grades

##### a) Parallele Beleuchtung

1. *Es ist in der Zentralprojektion (H. d) die Eigenschaftengrenze der Kugel ( $O \in r$ ;  $r$ ) und deren Schlagschatten auf die horizontale Ebene  $\pi \perp r$  ( $H \in u^s \parallel n^s$ ) zu untersuchen. Der Lichtstrahl  $s$  ist durch den Fluchtpunkt  $L_u^s$  gegeben (Fig. 12).*

Eigenschaftengrenze. Für den Zentralriß  $k^s$  der Eigenschaftengrenze  $k$  bestimmen wir zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und den Mittelpunkt  $S$  (falls er existiert). Die Spurlinie  $n^s$  der Ebene  $\lambda$  der Eigenschaftengrenze ist senkrecht zu  $s_2 = HL_u^s$  und geht durch den Punkt  $O_s = O^s$ , die Spurlinie  $n^s$  schneidet in den Punkten  $^1T^s$  und  $^2T^s$  den Kreis  $l_2 = l^s$ . Die Tangenten  $^1t$ ,  $^2t$  in den Punkten  $^1T$ ,  $^2T$  der Eigenschaftengrenze sind die Falllinien der Ebene  $\lambda$ ; es sind  $^1t^s = ^1T^sM_u^s$  und  $^2t^s = ^2T^sM_u^s$ , wo  $M_u^s$  der Fluchtpunkt der Falllinien der Ebene  $\lambda$  ist. Der Mittelpunkt  $S$  des Risses  $k^s$  der Eigenschaftengrenze  $k$  liegt auf der Geraden  $M_u^sP$  ( $P$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $^1T^s2T^s$ ). Die Tangenten  $a^s$ ,  $b^s$  von  $L_u^s$  zum Kugelumriß berühren diesen in den Punkten  $A^s$ ,  $B^s$  und sind eigentlich die Risse der Umrißgeraden des Berührungslichtzylinders der Kugel  $\kappa$ ;  $a^s$ ,  $b^s$  sind auch die Tangenten des Risses  $k^s$  des Eigenschattens. Infolgedessen liegt der Mittelpunkt  $S$  des Risses  $k^s$  des Eigenschattens auch auf der Geraden  $L_u^sN$ , wo  $N$  der Mittelpunkt der Strecke  $A^sB^s$  ist ( $S = M_u^sP \cdot L_u^sN$ ). Der Riß  $k^s$  der Eigenschaftengrenze  $k$  ist jetzt durch zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten, z. B.  $^1t^s$  mit  $^1T^s$  und  $^2t^s$  mit  $^2T^s$ , und durch den Mittelpunkt  $S$  bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $M_u^s = ^1T^s \cdot ^2T^s$  konstruieren wir die Achsen und die Scheitel der Ellipse  $k^s$  wie im Beispiel 1a, 2, Kap. I, Abs. b).

Den Schlagschatten  $k^s$  der Kugel  $\kappa$  auf die Ebene  $\pi \perp r$  bestimmen wir wieder durch zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und durch den

Mittelpunkt (falls er existiert). Der Riß  $k^\times$  des Schlagschattens und der Riß  $k^s$  des Eigenschattens sind perspektiv-kollinear mit  $L_4^s$  als Kollinationszentrum und  $q^s$  als Kollinationsachse ( $q$  ist die Schnittlinie der Ebenen  $\lambda$  und  $\pi$ );  ${}^1T^s$  und  ${}^1T^\times$  ( ${}^1T^\times$  ist der Schlagschatten des Punktes  ${}^1T$  auf die Ebene  $\pi$ ;  ${}^1T^\times \equiv {}^1T^s L_{41}^s \cdot {}^1T^s L_4^s$ ) sind zwei entsprechende Punkte dieser Kollination. Mit Hilfe dieser Kollination konstruieren wir im Punkte  ${}^1T^\times$  die Tangente

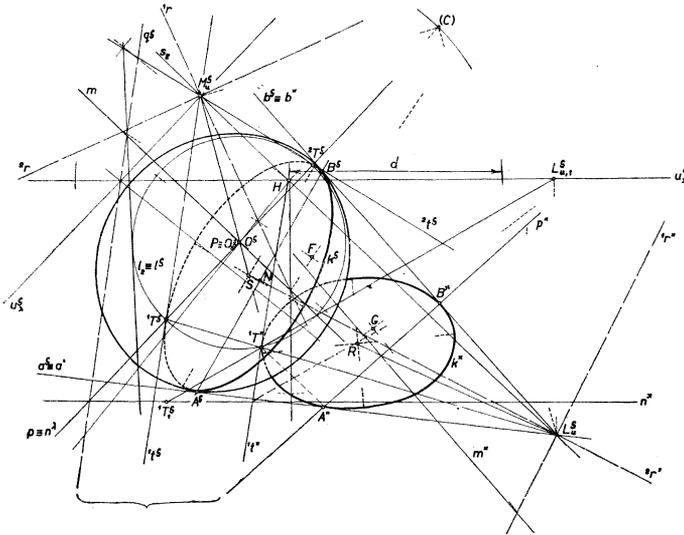


Fig. 12.

${}^1T^\times$ , die der Tangente  ${}^1T^s$  im Punkte  ${}^1T^s$  entspricht, und die Punkte  $A^\times, B^\times$  auf den Tangenten  $a^\times = a^s, b^\times = b^s$ , die den Punkten  $A^s, B^s$  entsprechen. Dadurch bekommen wir für den Schlagschatten  $k^\times$  drei Tangenten  $a^\times, b^\times$  und  ${}^1t^\times$  mit ihren Berührungspunkten  $A^\times, B^\times$  und  ${}^1T^\times$ . Wir konstruieren zuerst den Mittelpunkt  $R$ , falls er existiert, und mit Hilfe der St.-P. Parabel, z. B. des Punktes  $L_4^s \equiv a^\times \cdot b^\times$ , konstruieren wir wieder die Achsen und die Scheitel des Schlagschattens  $k^\times$ .

2. Fig. 13 zeigt in der Parallelprojektion die parallele Beleuchtung eines dreiaxigen Ellipsoids  $a = A^1A, b = B^1B$  und  $c = C^1C$ .

Die Eigenschattengrenze des Ellipsoids liegt in einer zum Lichtstrahl  $s$  konjugierten Diametralebene in bezug auf das Ellipsoid; in unserem Falle

ist es eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt  $O$  des Ellipsoids identisch ist. Für den Riß  $k'$  der Eigenschattengrenze  $k$  beschaffen wir wieder zwei Tangenten  $u', u''$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^1T', {}^2T'$ .

Die Umrißgeraden  $u' \parallel u'' \parallel s'$  der Berührungslichtzylinderfläche des Ellipsoids sind auch die Tangenten des Risses  $k'$  des Eigenschattens  $k$  in den Punkten  ${}^1T'$  und  ${}^2T'$ ; wir wählen die Tangente  $u'$  mit dem Berührungspunkt  ${}^1T'$ .

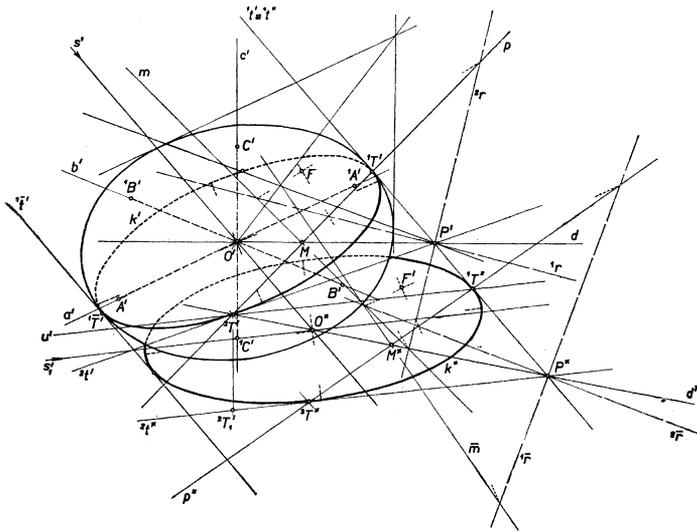


Fig. 13.

In weiterem konstruieren wir den Punkt  ${}^2T$  des Eigenschattens auf dem Hauptschnitte ( $A^1A; B^1B$ ); längs dieses Hauptschnittes wird das Ellipsoid von einer Zylinderfläche berührt, deren Eigenschattengrenze den Hauptschnitt ( $A^1A; B^1B$ ) in den Punkten  ${}^2T$  und  ${}^2T'$  schneidet (die Risse  ${}^2T'$  und  ${}^2T''$  sind die Berührungspunkte der Tangenten  $u', u''$  der Ellipse ( $A^1A; B^1B$ ), die zu  $s'_1$  parallel sind. In Fig. 13 sind nur die Tangente  $u' \parallel s'_1$  und ihr Berührungspunkt  ${}^2T'$  konstruiert). Die Tangente  $u'$  im Punkte  ${}^2T'$  des Risses  $k'$  der Eigenschattengrenze  $k$  des Ellipsoids ist die Gerade  ${}^2T'P$ , wo  $P \equiv u' \cdot O'M$  ist ( $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  ${}^1T'{}^2T''$ ).

Der Riß  $k'$  der Eigenschattengrenze  $k$  des Ellipsoids ist durch zwei Tangenten  $u', u''$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^1T', {}^2T'$  und durch den Mittelpunkt  $O$

bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv U' \cdot T'$  in bezug auf  $k'$  untersuchen wir die Achsen und die Scheitel des Eigenschattens  $k'$ .

Der Schlagschatten auf die Ebene  $\pi$ , die durch den Endpunkt  ${}^1C$  der Achse  $C^1C$  geht und zur Ebene des Hauptschnittes ( $A^1A$ ;  $B^1B$ ) parallel ist,

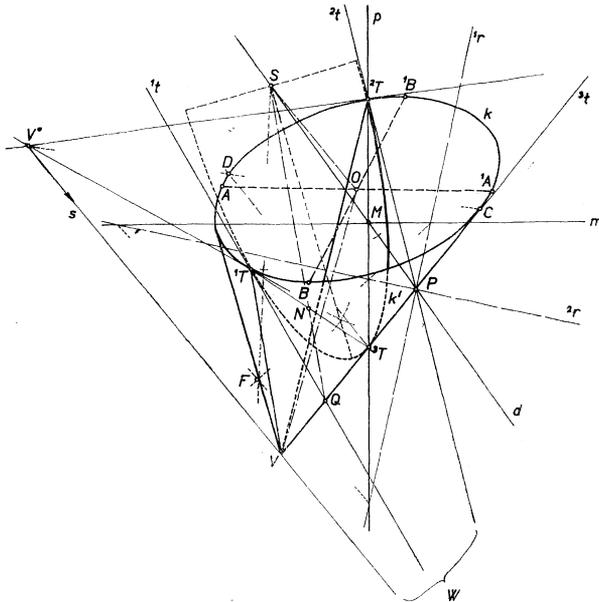


Fig. 14.

ist die Ellipse  $k'$ ; sie ist der Schnitt der Ebene  $\pi$  mit dem elliptischen Berührungslichtzylinder des Ellipsoids. Für die Ellipse  $k'$  bestimmen wir den Schlagschatten der Tangenten  $U$ ,  $U'$  und ihrer Berührungspunkte  ${}^1T$ ,  ${}^2T$  und den Schlagschatten des Mittelpunktes  $O$  des Ellipsoids. Der Schlagschatten  ${}^2P$  der Tangente  $U'$  geht durch den Schlagschatten  ${}^2T'$  des Punktes  ${}^2T$  ( ${}^2T' \cdot {}^2T' \neq O^1C'$ ) und ist zu  $s$  parallel. Der Schlagschatten der Tangente  $U$  ist  $U' \equiv U'$ ; den Schlagschatten  ${}^1T'$  des Berührungspunktes  ${}^1T$  der Tangente  $U$  bestimmen wir mit Hilfe der Beziehung  ${}^2T' \cdot M' = M' \cdot {}^1T'$  ( $M'$  liegt auf der Verbindungsgeraden  $P^1O'$ , wo  $P^1 \equiv U' \cdot {}^2P'$  ist).

Der Schlagschatten  $k^\times$  auf der Ebene  $\pi$  ist wieder durch zwei Tangenten  ${}^1t^\times, {}^2t^\times$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^1T^\times, {}^2T^\times$  und durch den auf der Verbindungsgeraden  $P^\times M^\times$  liegenden Mittelpunkt  $O^\times$  bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $P^\times$  bestimmen wir die Achsen und die Scheitel der Schlagschattenskurve  $k^\times$ .

3. *Fig. 14 stellt in der Parallelprojektion die parallele Beleuchtung eines hohlen Kegels ( $k; V$ ) dar, dessen Grundfläche  $k = (A^1A; B^1B)$  parallel zu  $\pi$  ist und dessen Spitze  $V$  in  $\pi$  liegt.*

Wir untersuchen auf bekannte Weise die Eigenschattengrenze  $V^1T$  und  $V^2T$  auf dem hohlen Kegel. Wir wissen weiter, daß der Schlagschatten des Bogens  ${}^1T^2T$  ins Innere des Kegels ein Teil der Ellipse  $k'$  ist, deren Achsen und Scheitel wieder mit Hilfe der St.-P. Parabel leicht konstruiert werden können. Die Tangenten  ${}^1t, {}^2t$  in den Punkten  ${}^1T, {}^2T$  der Ellipse  $k'$  erhalten wir auf Grund der bekannten Beziehung  $VV^\circ = VW$ ; dann sind  ${}^1TW \equiv {}^1t$  und  ${}^2TW \equiv {}^2t$ . Weiter suchen wir z. B. den Berührungspunkt  ${}^3T$  der Ellipse  $k'$  und der Umrißgeraden  $VC$  ( $V^\circ C \cdot k \equiv D; D^3T \parallel s$ ). Wird der Schnittpunkt  ${}^1t \cdot {}^2t \equiv P$  und  ${}^1t \cdot {}^3t \equiv Q$  bezeichnet, dann liegt der Mittelpunkt  $S$  der Ellipse  $k'$  im Schnittpunkt der Geraden  $PM$  und  $QN$  ( $M$  und  $N$  sind die Mittelpunkte der Strecken  ${}^2T^3T$  und  ${}^1T^2T$ ). Der Schlagschatten ins Innere des hohlen Kegels, d. h. die Ellipse  $k'$ , ist z. B. durch zwei Tangenten  ${}^1t, {}^2t$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^1T, {}^2T$  und durch den Mittelpunkt  $S$  gegeben. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $P \equiv {}^1t \cdot {}^2t$  untersuchen wir die Achsen und die Scheitel der Ellipse  $k'$  wie im Beispiel 1a, 2, Kap. I, Abs. b).

4. *In Fig. 15 wird in der Orthogonalaxonomie die parallele Beleuchtung des hohlen Unterteils eines Rotationsellipsoids mit der Achse  $o \perp \pi$  für die Lichtrichtung  $s$  ( $s_1, s$ ) durchgeführt.*

Die Eigenschattengrenze wird auf dieselbe Weise wie in Fig. 13 dieses Absatzes a) konstruiert.

Der Schlagschatten des Kreisbogens  ${}^2TR^2T'$  ins Innere der Fläche ist ein Teil der Ellipse  $k^\times$ , die den Mittelpunkt in  $O$  hat; für diese Ellipse  $k^\times$  werden noch zwei Tangenten  ${}^3t^\times, {}^4t^\times$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^3T^\times$  und  ${}^4T^\times$  ermittelt. Der größte Parallelkreis  $k$  und sein Schlagschatten  $k^\times$  in das Innere sind, wie bekannt, affin verwandt [die Affinitätsachse ist  ${}^2T^2T'$ ,  $R, R^\times$  sind zwei entsprechende Punkte, wobei  $R^\times$  der Schnittpunkt eines durch den Punkt  $R$  gehenden Lichtstrahles mit der Fläche, d. h. mit der Ellipse ( $R^1R; C^1C$ ) der Fläche, ist]. Den gewählten Tangenten  ${}^3t, {}^4t$  der Ellipse  $k$  in den Punkten  ${}^3T, {}^4T$  entsprechen in der angeführten Affinität die Tangenten  ${}^3t^\times, {}^4t^\times$  der Ellipse  $k^\times$  in den Punkten  ${}^3T^\times, {}^4T^\times$ . Dadurch ist der Schlagschatten  $k^\times$  in das Innere der Fläche durch zwei Tangenten  ${}^3t^\times, {}^4t^\times$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^3T^\times, {}^4T^\times$  und durch den Mittelpunkt  $O$  bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $Q^\times \equiv {}^3t^\times \cdot {}^4t^\times$  werden die Achsen und die Scheitel der Ellipse  $k^\times$  ermittelt.

#### b) Zentralbeleuchtung des Ellipsoides

*Fig. 16 zeigt die Zentralbeleuchtung eines dreiaxigen Ellipsoides in der Zweitafelprojektion. Das Ellipsoid wird durch zugeordnete Normalrisse der Achsen  $a \equiv A^1A \parallel x, b \equiv B^1B \perp r, c \equiv C^1C \perp \pi$  und die Lichtquelle  $Z$  durch zugeordnete Normalrisse  $Z_1$  und  $Z_2$  gegeben.*

Die Eigenschattengrenze des dreiachsigen Ellipsoids in der Zentralbeleuchtung ist die Ellipse  $k$ , die in der Polarebene der Lichtquelle  $Z$  liegt. Jeder von den Normalrissen des Eigenschattens  $k$  wird durch zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und durch den Mittelpunkt bestimmt. Die

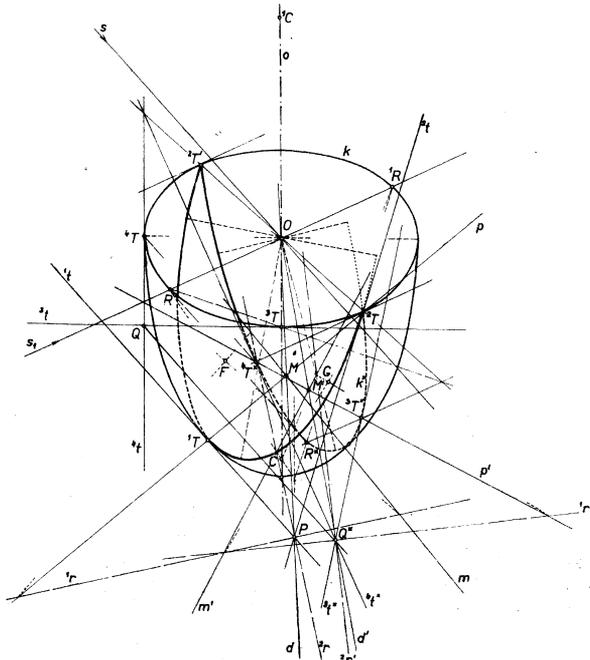


Fig. 15.

Tangenten  $t_1, t_2$  durch den Grundriß  $Z_1$  an die Ellipse  $r_1 = (A_1A_1; B_1B_1)$  berühren diese in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$ . Diese Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  sind nicht nur die Umrißgeraden des Grundrisses des Lichtkegels, sondern auch die Tangenten des Grundrisses  $k_1$  der Eigenschattengrenze  $k$  in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$ . Analogisch sind die Tangenten  $t_2$  und  $t_1$ , die durch den Aufriß

$Z_2$  an die Ellipse  $m_2 \equiv (A_2^1 A_2; C_2^1 C_2)$  gehen und diese in den Punkten  ${}^3T_2$  und  ${}^4T_2$  berühren, die Umrißgeraden des Aufrisses des Lichtkegels wie auch die Tangenten des Aufrisses  $k_2$  der Eigenschattengrenze  $k$  in den Punkten  ${}^3T_2, {}^4T_2$ . Wenn wir  ${}^1T^2T \equiv p$  und  ${}^3T^4T \equiv n$  bezeichnen, dann ist  ${}^1T_1^2T_1 \equiv p_1, p_2 \equiv A_2^1 A_2$  und  ${}^3T_2^4T_2 \equiv n_2, n_1 \equiv A_1^1 A_1$ . Die Geraden  $p, n$  bestimmen die Ebene  $\lambda$  des Eigenschattens. Der Mittelpunkt  $S$  der Eigenschattengrenze  $k$

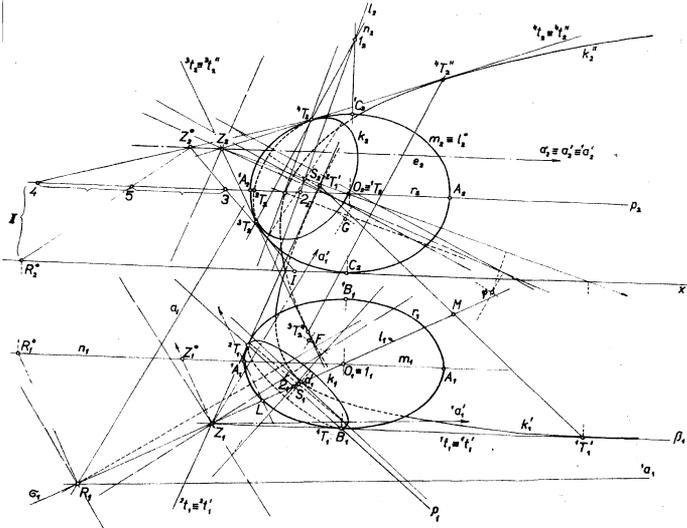


Fig. 16.

ist der Schnittpunkt der Geraden  $ZO$  mit der Ebene  $\lambda \equiv p \cdot n$  ( $Z_1 O_1 \equiv l_1; l_1 \cdot p_1 \equiv 2_1, l_1 \cdot n_1 \equiv 1_1; 2_2$  auf  $p_2, 1_2$  auf  $n_2; 1_2 2_2 \equiv l_2, l_2 \cdot O_2 Z_2 \equiv S_2, S_1$  auf  $O_1 Z_1$ ).

Der Grundriß  $k_1$  ist durch zwei Tangenten  ${}^1t_1, {}^2t_1$  mit ihren Berührungspunkten  ${}^1T_1, {}^2T_1$  und durch den Mittelpunkt  $S_1$  bestimmt. Auch der Aufriß  $k_2$  des Eigenschattens  $k$  ist durch die Tangenten  ${}^3t_2, {}^4t_2$  mit  ${}^3T_2, {}^4T_2$  und durch den Mittelpunkt  $S_2$  bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel werden in beiden Normalrissen die Achsen und die Scheitel konstruiert (siehe Aufg. 1a. 2. Kap. I. Abs. b).

Der Schlagschatten des Ellipsoids auf die Grundrißebene  $\pi$  ist die Hyperbel  $k'$ , denn die durch Lichtquelle  $Z$  zu  $\pi$  parallele Ebene  $\alpha$  schneidet

die Lichtkegelfläche in zwei Geraden  $a', 'a'$  ( $a'_2 \equiv 'a'_2 \equiv \alpha_2; a'_1, 'a'_1$  sind die Tangenten durch den Punkt  $Z_1$  an die Ellipse  $e_1 \sim r_1$ ).

Der Schlagschatten der Tangenten  $'t, 't$  und der Punkte  $'T, 'T$  auf die Grundrißebene  $\pi$  sind die Tangenten der Hyperbel  $k'_1$  in den Punkten  $'T'_1, 'T'_1$ , welche die Schlagschatten der Punkte  $'T$  und  $'T$  auf die Grundrißebene  $\pi$  sind. Den Mittelpunkt  $R_1$  der Hyperbel  $k'_1$  konstruieren wir folgendermaßen: Durch die Lichtquelle  $Z$  und durch die Achse  $C'1C$  legen wir die Ebene  $\sigma \perp \pi$  ( $\sigma_1 \equiv Z_1O_1$ ). Die Ebene  $\sigma$  schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse  $l$ , welche nebst der Lichtquelle  $Z$  in der Richtung  $L'A \parallel \pi$  in die Ebene des Hauptschnittes  $m$  schief projiziert wird ( $l'_2 \equiv m_2; Z_1Z'_1 \parallel L'A_1, Z'_2$  auf  $\alpha_2$ ; die aus dem Punkt  $Z'_2$  zu  $m_2$  gelegten Tangenten schneiden die  $x$ -Achse in den Punkten  $l, l'$ ;  $R'_2$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $ll'$ ,  $R'_2$  liegt auf  $m_1$ ;  $R'_1R_1 \parallel L'A_1$ ,  $R_1$  liegt auf  $\sigma_1$ ;  $R_1$  ist bereits der Mittelpunkt der Hyperbel  $k'_1$ ). Der Schlagschatten auf die Grundrißebene  $\pi$ , d. h. die Hyperbel  $k'_1$ , ist durch die Tangenten  $'t'_1 \equiv 't'_1, 't'_1 \equiv 't'_1$  mit ihren Berührungspunkten  $'T'_1, 'T'_1$  und durch den Mittelpunkt  $R_1$  bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $Z_1 \equiv 'Z_1, 'Z_1$  werden die Achsen, die Asymptoten und die Scheitel der Hyperbel  $k'_1$  konstruiert (siehe Aufg. 2, Kap. I, Abs. b).

Der Schlagschatten des Ellipsoides auf die Aufrißebene  $\nu$  ist die Parabel  $k''$ , denn die Ebene  $\beta \parallel \nu$  durch die Lichtquelle  $Z$  ist die Berührungsebene des Lichtkegels. Der Schlagschatten der Tangenten  $'t, 't$  und ihrer Berührungspunkte  $'T, 'T$  auf die Aufrißebene  $\nu$  sind die Tangenten der Parabel  $k''_2$  in den Punkten  $'T''_2, 'T''_2$ , welche die Schlagschatten der Punkte  $'T$  und  $'T$  auf  $\nu$  sind. Der Schlagschatten auf die Aufrißebene  $\nu$ , d. h. die Parabel  $k''_2$ , ist durch die Tangenten  $'t''_2 \equiv 't''_2, 't''_2 \equiv 't''_2$  mit ihren Berührungspunkten  $'T''_2, 'T''_2$  bestimmt. Mit Hilfe der St.-P. Parabel des Punktes  $Z_2 \equiv 'Z_2, 'Z_2$  konstruieren wir die Achse, den Scheitel und den Brennpunkt der Parabel  $k''_2$  wie in der Aufg. 1b, Kap. I, Abs. b).

Zum Schluß kann man sagen: Alle diese Konstruktionen sind sehr einfach und dadurch elegant, ermöglichen in allen angeführten Fällen direkt die Konstruktion der Achsen und der Scheitel des zuständigen, gesuchten Kegelschnittes. Dadurch wird der darstellenden Geometrie der quadratischen Flächen ein einheitliches Element gegeben zur Lösung der Grundaufgaben in einer beliebigen, linearen Abbildungsmethode.

#### LITERATUR

- [1] *Václav Hlavatý*: Projektivní geometrie, I. díl (Projektive Geometrie, I. Bd.) Melantrich, Praha 1944.  
 [2] *F. Kaděávek—J. Klíma—J. Kounovský*: Deskriptivní geometrie, I., II. díl (Darstellende Geometrie I. u. II. Bd.), JČMF, Praha 1928, 1932.

## Shrnutí

### UŽITÍ STEINER-PELZOVY PARABOLY V DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII KVADRATICKÝCH PLOCH

Josef Šimek

Tato práce ukazuje na další konstrukční využití Steiner-Pelzovy paraboly v deskriptivní geometrii ploch druhého stupně. V úvodní části práce se připomíná vytvoření Steiner-Pelzovy paraboly daného bodu  $P$  vzhledem k dané jednoduché kuželosečce  $k$ , když bod  $P$  leží vně dané kuželosečky  $k$ . Z konstrukčních důvodů jsou zvoleny k určení St.-P. paraboly jisté čtyři tečny a sice osy  $^1r \perp ^2r$  úhlů tečen  $^1t, ^2t$  vedených z bodu  $P$  ke kuželosečce  $k$ , polára  $p$  bodu  $P$  vzhledem ke kuželosečce  $k$  a přímka  $m \perp p$ , procházející půlicím bodem tětivy  $^1T^2T$ , kde  $^1T$  a  $^2T$  jsou body dotyku tečen  $^1t$  a  $^2t$  s danou kuželosečkou  $k$ . Takto určené St.-P. paraboly se pak užívá k sestrojení os a vrcholů dané kuželosečky  $k$ , je-li kuželosečka  $k$  dána dvěma tečnami  $^1t, ^2t$  s body dotyku  $^1T, ^2T$  a středem  $S$ .

Posledně uvedené konstrukce os a vrcholů kuželosečky pomocí St.-P. paraboly lze výhodně použít v deskriptivní geometrii kvadratických ploch při sestrovování rovinných řezů, proužků, obrysů, osvětlení ve všech lineárních zobrazovacích metodách. Tyto konstrukce jsou velmi jednoduché, umožňují ve všech uvedených případech sestrojení os a vrcholů příslušné hledané kuželosečky, resp. jejich obrazů. Tím se dostává deskriptivní geometrii kvadratických ploch jednotliho prvku při řešení základních úloh v jakékoliv lineární zobrazovací metodě.