Ladislav Sedláček

Zum Problem des Isomorphismus der direkten Produkte von Gruppoiden

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 9 (1968), No. 1, 111--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119898

1968 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 27

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

ZUM PROBLEM DES ISOMORPHISMUS DER DIREKTEN PRODUKTE VON GRUPPOIDEN

LADISLAV SEDLÁČEK

(Eingegangen am 6. Juli 1967)

Gewidmet H. Prof. Dr. O. Borůvka zum 70. Geburtstag.

In der vorliegenden Arbeit werden hinreichende Bedingungen für die Existenz einer isomorphen Verfeinerung direkter Produkte eines Guppoides studiert. Weiter beschäftigen wir uns mit der Frage über die Existenz eines Isomorphismus direkter Zerlegungen des gegebenen Gruppoides.

Die Theorie der direkten Produkte und Zerlegungen von Gruppoiden wird auf mengentheoretischem Grunde so aufgebaut, daß sie im gewissen Sinne eine Fortsetzung von [1] und [2] (welche die obenerwähnte Problematik nicht behandeln) darstellt. Die Arbeit ist dabei so aufgefaßt, daß die Begriffe und Resultate des ersten Teils, welche Mengen betreffen, leicht in dem zweiten Teil auf die Gruppoide übertragen werden können.

Obzwar in anderen Arbeiten (z. B. [7]) die Theorie der direkten Produkte von Gruppoiden auch mittels des Isomorphismus gebaut wird, in dieser Arbeit bildet den Ausgangspunkt die Arbeit [5], woraus auch der Begriff des konvexen Gruppoides übernommen wurde.

Die Sätze werden mit S und die Definitionen mit D bezeichnet.

I. MENGEN

1. DIREKTE PRODUKTE VON MENGEN

Verabredung 1/1: In vorliegender Arbeit werden nur nicht leere Mengen betrachtet. Die Tatsache, daß die Mengen A, B äquivalent sind, wird mit $A \leftrightarrow B$ bezeichnet.

D 1/1: Es sei α eine natürliche Zahl. Eine Menge G heißt *direktes Produkt von Mengen* $A_1, \ldots, A_\alpha$, wenn es eine schlichte (eineindeutige) Abbildung d der Menge G auf das kartesische Produkt $A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$ gibt, was durch

$$G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha \tag{1.1}$$

bezeichnet wird. Wenn $\mathsf{d}a = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha)$, $a \in G$, $(a_1, \ldots, a_\alpha) \in A^{[\alpha]}$ gilt, so schreiben wir auch

$$a \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha). \tag{2.1}$$

Die Menge A_ι heißt die *ι-te Komponente des direkten Produkts* und das Element a_ι aus (2.1) heißt die *ι-te Komponente des Elements a* oder die *Projektion von a in A_ι*.

Die Richtigkeit des folgenden Satzes ist bekannt.

S 1/1: Für das kartesische Produkt von Mengen gilt:
a) assoziatives Gesetz, dh. $A_1 \times (A_2 \times A_3) \leftrightarrow (A_1 \times A_2) \times A_3$,
b) kommutatives Gesetz, dh. $A_1 \times A_2 \leftrightarrow A_2 \times A_1$.

S 2/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$. Dann gilt
a) $G \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\beta) \times (A_{\beta+1} \times \ldots \times A_\gamma) \times \ldots \times (A_{\varkappa+1} \times \ldots \times A_\alpha)$, $1 \leqq \beta < \gamma < \ldots < \varkappa < \alpha$,
b) $G \leftrightarrow A_{\varkappa_1} \times A_{\varkappa_2} \times \ldots \times A_{\varkappa_\alpha}$, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\alpha$ die Zahlen $1, 2, \ldots, \alpha$ in einer beliebigen Anordnung sind,
c) $G \leftrightarrow A_\iota \times {}^{(\iota)}A$, wo $1 \leqq \iota \leqq \alpha$ und ${}^{(\iota)}A \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_{\iota-1} \times A_{\iota+1} \times \ldots \times A_\alpha$ ist.

Der Beweis folgt leicht aus S 1/1.

S 3/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$ und e ein beliebiges, festgewähltes Element aus G, d die schlichte Abbildung von G auf $A^{[\alpha]}$ und $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Es sei weiter a_ι° ein solches Element aus G, für welches $a_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}\,(e_1, \ldots, e_{\iota-1}, a_\iota, e_{\iota+1}, \ldots, e_\alpha)$ gilt. Dann ist

a) die Menge A_ι° aller Elemente a_ι° aus G mit der Komponente A_ι äquivalent, dh. $A_\iota^\circ \leftrightarrow A_\iota$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$,

b) der Durchschnitt $\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} A_\iota^\circ = e$.

Beweis: a) Es sei $A_\iota' = \{e_1\} \times \ldots \times \{e_{\iota-1}\} \times A_\iota \times \{e_{\iota+1}\} \times \ldots \times \{e_\alpha\}$ und d die schlichte Abbildung von G auf $A_1 \times \ldots \times A_\alpha$. Dann ist d auch die schlichte Abbildung von A_ι° auf A_ι'. Eine Abbildung g, die jedem Element $(e_1, \ldots, a_\iota, \ldots, e_\alpha) \in A_\iota'$ das Element $a_\iota \in A_\iota$ zuordnet, ist sichtbar eine schlichte Abbildung der Menge A_ι' auf A_ι. Darum ist $\mathsf{f} = \mathsf{gd}$ eine schlichte Abbildung der Menge A_ι° auf A_ι für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

b) Weil $\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} A_\iota' = (e_1, \ldots, e_\alpha)$ und $\mathsf{d}^{-1}A_\iota' = A_\iota^\circ$, $\mathsf{d}^{-1}(e_1, \ldots, e_\alpha) = e$ ist, gilt auch $\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} A_\iota^\circ = e$.

Verabredung 2/1: Weiter soll e immer ein beliebiges, festgewähltes Element aus G bezeichnen. Mit A_ι° resp. a_ι° wird immer die Untermenge resp. das Element aus G im Sinne des Satzes S 3/1 bezeichnet.

S 4/1: Es sei d eine schlichte Abbildung der Menge G auf $A_1 \times \ldots \times A_\alpha = G'$, $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$, $A_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, B eine Untermenge in G und $\mathsf{d}B = B' \subset G'$. Es sei weiter f die schlichte Abbildung von A_ι° auf A_ι, $P_\iota^\circ = A_\iota^\circ \cap B \neq \emptyset$, $\mathsf{f}P_\iota^\circ = P_\iota \subset A_\iota$ und $P' = P_1 \times \ldots \times P_\alpha$. Dann gilt die Beziehung $P' \subset B' \subset G'$.

Beweis: Es sei $\mathsf{f} = \mathsf{gd}$ die schlichte Abbildung von A_ι° auf A_ι aus dem Beweis von S 3/1. Die Untermenge $B' \subset G'$ enthält eben alle Elemente

$(b_1, \ldots, b_\alpha) \in G'$, für die $(b_1, \ldots, b_\alpha) = \mathsf{d}b$, $b \in B$, in der schlichten Abbildung d von G auf G' gilt. So wird das Element $a_\iota^\circ \in P_\iota^\circ = A_\iota^\circ \cap B$ in d auf das Element $(a_1, \ldots, a_\alpha) \in A_\iota' \cap B'$ abgebildet. Daraus folgt, daß a_ι in P_ι für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ liegt, so daß $P' \subset B' \subset G'$ gilt.

S 5/1: Es sei d eine schlichte Abbildung von G auf $A_1 \times \ldots \times A_\alpha$. Wird jedem Element $a \in G$ seine Projektion $a_\iota \in A_\iota$ zugeordnet, so bekommt man eine, von der Abbildung d *induzierte Abbildung* d_ι der Menge G auf A_ι, die man *Projektion* oder *P-Abbildung* von G auf A_ι nennt.

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß d_ι wirklich eine Abbildung von G auf A_ι ist.

Um eventuelle Mißverständnisse zu verhindern, werden wir immer die Abbildung d_ι aus S 5/1 als P-Abbildung bezeichnem.

D 2/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, B eine Untermenge in G und B_ι^* die Menge aller Projektionen der Elemente $b \in B$ in A_ι. Dann heißt B_ι^* die *Projektion der Ubtermenge B in* A_ι.

S 6/1: Es sei d eine schlichte Abbildung von G auf $A_1 \times \ldots \times A_\alpha = G'$, B eine Untermenge in G, $\mathsf{d}B = B'$, $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$, $A_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $P_\iota^\circ = A_\iota^\circ \cap B \neq \emptyset$, $\mathsf{d}P_\iota^\circ = (\{e_1\} \times \ldots \times P_\iota \times \ldots \times (e_\alpha\})$. Es sei B_ι^* die Projektion von B in A_ι. Dann gilt

a) $P_\iota \subset B_\iota^* \subset A_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$;

b) für $P' = P_1 \times \ldots \times P_\alpha$, $B^* = B_1^* \times \ldots \times B_\alpha^*$ gilt

$$P' \subset B' \subset B^*. \tag{3.1}$$

Beweis: a) Es gilt $P_\iota^\circ \subset B \subset G$, weil $P_\iota^\circ = A_\iota^\circ \cap B$ ist. Da die Projektion jedes Elements aus P_ι° in $A_\varkappa$ für $\iota \neq \varkappa$ das Element $e_\varkappa$ ist, gilt $P_\iota \subset B_\iota^* \subset A_\iota$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

b) Infolge des S 4/1 ist die Beziehung $P' \subset B'$ richtig. Es sei nun $(b_1, \ldots, b_\iota, \ldots, b_\alpha)$ ein Element aus B' und $b = \mathsf{d}^{-1}(b_1, \ldots, b_\iota, \ldots, b_\alpha)$. Dann gilt für die Projektion b_ι des Elements b in A_ι, $b_\iota \in B_\iota^*$, also $(b_1, \ldots, b_\alpha) \in B^*$, dh. $B' \subset B^*$. Somit ist (3.1) bewiesen.

S 7/1: Es seien die Voraussetzungen des S 6/1 erfüllt. Wenn wir die Bezeichnungen aus diesem Satze behalten, so sind folgende Gleichheiten äquivalent:

$$P_\iota = B_\iota^*, \qquad \iota = 1, \ldots, \alpha, \tag{4.1}$$

$$P_1 \times \ldots \times P_\alpha = P' = B', \tag{5.1}$$

$$B_1^* \times \ldots \times B_\alpha^* = B^* = B', \tag{6.1}$$

dh. die Gültigkeit einer von ihnen hat als Folgerung die Gültigkeit der zwei übrigen.

Beweis: a) Es gelte die Gleichheit (4.1). Dann haben wir $P' = P_1 \times \ldots \times P_\alpha = B_1^* \times \ldots \times B_\alpha^* = B^*$ und (3.1) gibt $P' = B' = B^*$, dh. die Gültigkeit von (5.1) und (6.1).

b) Es sei nun (5.1) gültig. Dann ist $P_\iota^\circ = A_\iota^\circ \cap B$, dh. $P_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\}) \cap B'$, wo $B' = \mathsf{d}B$ ist. Wenn f die schlichte Abbildung von A_ι° auf A_ι aus dem Beweis von S 3/1 bedeutet, so gilt $\mathsf{f}P_\iota^\circ = P_\iota \subset A_\iota$. Infolge der Voraussetzung ist $P_1 \times \ldots \times P_\alpha = B'$, dh. $\mathsf{d}B = P_1 \times \ldots \times P_\alpha$. Nun liegt aber jede Projektion b_ι des Elements $b \in B$ in A_ι in der Menge P_ι, dh. $b_\iota \in P_\iota$ und jedes Element aus P_ι ist eine Projektion wenigstens eines Elements aus B. Für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ gilt also $B_\iota^* = P_\iota$ und nach a) auch die Gleichheit (6.1).

c) Es soll nun (6.1) gelten, dh. $B_1 \times \ldots \times B_\alpha = B' = \mathsf{d}B$. Dann mit Rücksicht auf die Beziehung $B_\iota^* \subset A_\iota$ aus S 6/1 gilt immer $(\{e_1\} \times \ldots \times B_\iota^* \times \ldots \times \times \{e_\alpha\}) \subset (\{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\}) \cap B' = \mathsf{d}(A_\iota^\circ \cap B) = \mathsf{d}P_\iota^\circ = (\{e_1\} \times \ldots \times P_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, was $B_\iota^* \subset P_\iota$ ergibt. Nach S 6/1 a) gilt aber $P_\iota \subset B_\iota^*$, was miteinander die Beziehung (4.1) und nach a) auch die Gleichheit (5.1) ergibt.

D 3/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, $H \neq \emptyset$ eine Untermenge in G und H' ihr Bild in der schlichten Abbildung d der Menge G auf $A^{[\alpha]}$. Es sei weiter $\mathsf{d}a = (a_1, \ldots, a_\alpha)$, $\mathsf{d}b = (b_1, \ldots, b_\alpha)$, a, $b \in H$ und x_ι ein beliebiges der Elemente a_ι, b_ι für $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Gehört auch das Element $x = \mathsf{d}^{-1}(x_1, \ldots, x_\alpha)$ in H für je zwei Elemente $a, b \in H$, so heißt H die *konvexe Untermenge in bezug auf* $A^{[\alpha]}$ oder *relativ konvex*. Ist H relativ konvex auf jede Menge $B^{[\beta]}$, für die $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta = B^{[\beta]}$ gilt, dann sagt man, daß H die *konvexe Untermenge in G ist*.

S 8/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, H eine Untermenge in G, H' ihr Bild in der schlichten Abbildung d der Menge G auf $A^{[\alpha]}$ und H_ι^* die Projektion von H in A_ι, $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Die Menge H ist in bezug auf $A^{[\alpha]}$ dann und nur dann konvex, wenn

$$H' = H_1^* \times \ldots \times H_\alpha^* = H^* \leftrightarrow H \tag{7.1}$$

gilt.

Beweis: a) Es sei H in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex, $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ ein beliebiges Element aus H^*. Ist es nun $a_\iota \in H_\iota^*$, so existieren nach D 2/1 Elemente $a_{1\iota}$, $a_{2\iota}, \ldots, a_{\iota\iota}, \ldots, a_{\alpha\iota}$, $a_{\iota\iota} = a_\iota$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ derart, daß $(a_{1\iota}, \ldots, \alpha_{\alpha\iota})$ in H' liegt. Weil H in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex ist, gehört das Element $(a_{11}, \ldots, a_{\alpha\alpha}) = (a_1, \ldots, a_\alpha)$ zu H', und darum ist $H^* \subset H'$. Das gibt zusammen mit (3.1) $H' \subset H^*$ die Gleichheit $H' = H^*$, dh. die Beziehung (7.1).

b) Es gelte nun die Beziehung (7.1), a, $b \in H$, $\mathsf{d}a = (a_1, \ldots, a_\alpha)$, $\mathsf{d}b = (b_1, \ldots, b_\alpha)$, $a_\iota, b_\iota \in H_\iota^*$. Es sei x_ι ein beliebiges Element von a_ι, b_ι, $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Dann gehört x_ι in H_ι^*, und darum liegt $(x_1, \ldots, x_\alpha)$ in H'. Weil $\mathsf{d}H = H'$ in der schlichten Abbildung d gilt, gehört das Element $x = \mathsf{d}^{-1}(x_1, \ldots, x_\alpha)$ in H. Das bedeutet aber, daß H die konvexe Untermenge in G in bezug auf $A^{[\alpha]}$ ist.

S 9/1: Es sei H eine Untermenge in $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, H' ihr Bild in der schlichten Abbildung d der Menge G auf $A^{[\alpha]}$. Weiter sei e ein beliebiges, festgewähltes Element aus G und $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Wenn außerdem noch $A_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $P_\iota^\circ = A_\iota^\circ \cap H \neq \emptyset$, $\mathsf{d}P_\iota^\circ = \{e_1\} \times \ldots \times P_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\} = P_\iota' \leftrightarrow P_\iota \subset A_\iota$, $P' = P_1 \times \ldots \times P_\alpha$, $H^* = H_1^* \times \ldots \times H_\alpha^*$ (H_ι^* bedeutet die Projektion von H in A_ι) gilt, dann sind die Beziehungen

$$P_\iota = H_\iota^* \quad \text{für} \quad \iota = 1, \ldots, \alpha, \tag{8.1}$$

$$P' = H' \leftrightarrow H, \tag{9.1}$$

$$H^* = H' \leftrightarrow H, \tag{10.1}$$

$$H \text{ ist in bezug auf } A^{[\alpha]} \text{ konvex}, \tag{11.1}$$

miteinander äquivalent.

Beweis: Dieser Satz ist die Zusammenfassung von S 7/1 und S 8/1.

S 10/1: Es seien H, K Untermengen in $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, $P = H \cap K \neq \emptyset$ und P_ι^*, H_ι^*, K_ι^* die Projektionen von P, H, K in A_ι. Dann gilt

$$(H \cap K)_\iota^* = P_\iota^* \subset (H_\iota^* \cap K_\iota^*) \quad \text{für} \quad \iota = 1, \ldots, \alpha. \tag{12.1}$$

Beweis: Es sei $a \in P$ und $\mathsf{d}a = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha)$ in der schlichten Abbildung der Menge G auf $A^{[\alpha]}$. Dann ist a_ι die Projektion von a in A_ι und gehört auch in P_ι^*. Weil a gleichzeitig in H sowie in K liegt, ist $a_\iota \in H_\iota^*$ und gleichzeitig $a_\iota \in K_\iota^*$. Es gilt also (12.1).

S 11/1: Es seien H, K Untermengen in $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, die in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex sind, und $P = H \cap K \neq \emptyset$. Weiter seien P_ι^*, H_ι^*, K_ι^* ihre Projektionen in A_ι. Dann gilt

a) $P = H \cap K$ ist in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex,

b) $(H \cap K)_\iota^* = P_\iota^* = H_\iota^* \cap K_\iota^*$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Beweis: a) Es ist leicht zu sehen, daß diese Behauptung richtig ist.

b) Es seien H', K', P' die Bilder der Untermengen H, K, P in der schlichten Abbildung d der Menge G auf $A^{[\alpha]}$. Nach a) ist $P = H \cap K$ eine in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvexe Untermenge in G. Nach S 8/1 gelten folgende Gleichheiten

$$\mathsf{d}P = P' = P^* = P_1^* \times \ldots \times P_\alpha^*,$$
$$\mathsf{d}H = H' = H^* = H_1^* \times \ldots \times H_\alpha^*,$$
$$\mathsf{d}K = K' = K^* = K_1^* \times \ldots \times K_\alpha^*.$$

Daraus folgt $\mathsf{d}P = \mathsf{d}(H \cap K) = H' \cap K' = H^* \cap K^*$ und gleichzeitig $\mathsf{d}P = P^*$, und darum ist $P^* = H^* \cap K^*$. Der Durchschnitt $H^* \cap K^* = (H_1^* \times \ldots \times H_\alpha^*) \cap (K_1^* \times \ldots \times K_\alpha^*)$ ist eben durch alle und nur solche Elemente $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ gebildet, für die das Element a_ι gleichzeitig in H_ι^* und K_ι^* gehört, dh. für welches die Beziehung $a_\iota \in H_\iota^* \cap K_\iota^*$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ gültig ist. Darum ist $H^* \cap K^* = (H_1^* \cap K_1^*) \times \ldots \times (H_\alpha^* \cap K_\alpha^*)$. Nach (12.1) gilt $P_\iota^* \subset H_\iota^* \cap K_\iota^*$ und weil $H^* \cap K^* = P^* = P_1^* \times \ldots \times P_\alpha^*$, muß auch $P_\iota^* = H_\iota^* \cap K_\iota^*$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ gelten.

S 12/1: Es sei e ein beliebiges, festgewähltes Element aus G, d eine schlichte Abbildung von G auf $A^{[\alpha]} = A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, f eine schlichte Abbildung von G auf $B^{[\beta]} = B_1 \times \ldots \times B_\beta$, $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$, $\mathsf{f}e = (e_1', \ldots, e_\beta')$. Weiter seien $A_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $B_\varkappa^\circ = \mathsf{f}^{-1}(\{e_1'\} \times \ldots \times B_\varkappa \times \ldots \times \{e_\beta^x\})$, $A_{\iota\varkappa}^*$ die Projektion von A_ι° in $B_\varkappa$, $B_{\varkappa\iota}^*$ die Projektion von $B_\varkappa^\circ$ in A_ι. Ist für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ A_ι° in bezug auf $B^{[\beta]}$ und für $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ $B_\varkappa^\circ$ in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex, dann sind $A_{\iota\varkappa}^*$, $A_\iota^\circ \cap B_{\varkappa\iota}^*$ und $B_{\varkappa\iota}^*$ äquivalente Mengen.

Beweis: a) Es sei $A_\iota^\circ \cap B_\varkappa^\circ = P_{\iota\varkappa}^\circ$. Nach S 3/1 ist $e \in P_{\iota*}^\circ$. Die Teilmenge A_ι° ist nach Voraussetzung in bezug auf $B^{[\beta]}$ konvex. Es ist leicht zu sehen, daß $B_\varkappa^\circ$ auch konvex in bezug auf $B^{[\beta]}$ ist. Also nach S 11/1 a) ist $P_{\iota\varkappa}^\circ$ in bezug auf $B^{[\beta]}$ konvex. Aus der Beziehung $\mathsf{f}G = B_1 \times \ldots \times B_\beta$ folgt, daß $\mathsf{f}P_{\iota\varkappa}^\circ = \{e_1'\} \times \ldots \times P_{\iota\varkappa} \times \ldots \times \{e_\beta'\}$. Darum gilt $P_{\iota\varkappa} = (P_{\iota\varkappa}^\circ)_\varkappa^*$, wo $(P_{\iota\varkappa}^\circ)_\varkappa^*$ die Projektion von $P_{\iota\varkappa}^\circ$ in $B_\varkappa$ bedeutet. Also muß $P_{\iota\varkappa}^\circ \leftrightarrow P_{\iota\varkappa} = (P_{\iota\varkappa}^\circ)_\varkappa^*$ gelten. Sei $(A_\iota^\circ)_\varkappa^* = A_{\iota\varkappa}^*$ die Projektion von A_ι° in $B_\varkappa$ und $(B_\varkappa^\circ)_\varkappa^*$ die Projekton von $B_\varkappa^\circ$ in $B_\varkappa$. Man sieht leicht, daß $(B_\varkappa^\circ)_\varkappa^* = B_\varkappa$. Nach S 11/1 gilt nun $(P_{\iota\varkappa}^\circ)_\varkappa^* = (A_\iota^\circ)_\varkappa^* \cap (B_\varkappa^\circ)^* = A_{\iota\varkappa}^* \cap B_\varkappa = A_{\iota\varkappa}^*$. Darum gilt $(A_\iota^\circ \cap B_\varkappa^\circ) = P_{\iota\varkappa}^\circ \leftrightarrow (P_{\iota\varkappa}^\circ)_\varkappa^* = A_{\iota\varkappa}^*$ und die Mengen $(A_\iota^\circ \cap B_\varkappa^\circ)$, $A_{\iota\varkappa}^*$ sind für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ äquivalent.

b) Es sei nun $A_\iota^\circ \cap B_\varkappa^\circ = B_\varkappa^\circ \cap A_\iota^\circ = P_{\varkappa\iota}^\circ$. Benutzen wir jetzt die Beziehung $\mathsf{d}G = A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, so bekommen wir analog wie in a), daß $P_{\varkappa\iota}^\circ$ in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex ist. Bezeichnen wir $(P_{\varkappa\iota}^\circ)_\iota^*$, $B_{\varkappa\iota}^*$ die Projektionen von $P_{\varkappa\iota}^\circ$, $B_\varkappa^\circ$ in A_ι, so erhalten wir durch ähnliche Betrachtungen wie in a), daß $(P_{\varkappa\iota}^\circ)_\iota^*$ mit $B_{\varkappa\iota}^*$ und mit $P_{\varkappa\iota}^\circ$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ äquivalent ist. Weil aber $P_{\iota\varkappa}^\circ = P_{\varkappa\iota}^\circ$ ist, muß auch $A_{\iota\varkappa}^*$ mit $B_{\varkappa\iota}^*$ äquivalent sein.

S 13/1: Es seien die Voraussetzungen des S 6/1 erfüllt. Wenn wir die Bezeichnungen aus diesem Satze behalten, dann gilt: Es gibt Mengen $C_{\iota\varkappa}$, die mit $A_\iota^\circ \cap B_\varkappa^\circ$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ äquivalent sind und für welche die Beziehungen

$$A_\iota \leftrightarrow C_{\iota 1} \times \ldots \times C_{\iota\beta} \quad \text{für} \quad \iota = 1, \ldots, \alpha, \tag{13.1}$$

$$B_\varkappa \leftrightarrow C_{1\varkappa} \times \ldots \times C_{\alpha\varkappa} \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, \beta \tag{14.1}$$

gelten.

Beweis: Es sei $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta$. Weil A_ι° in bezug auf $B^{[\beta]}$ konvex ist, gilt nach S 8/1 für die Projektionen $A_{\iota\varkappa}^*$ der Menge A_ι° in $B_\varkappa$

$$A_\iota^\circ \leftrightarrow A_{\iota 1}^* \times \ldots \times A_{\iota\beta}^* \quad \text{für} \quad \iota = 1, \ldots, \alpha. \tag{a}$$

Ist nun $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, dann ist $B_\varkappa^\circ$ in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex und nach S 8/1 ist für die Projektionen $B_{\varkappa\iota}^*$ der Menge $B_\varkappa^\circ$ in A_ι die Beziehung

$$B_\varkappa^\circ \leftrightarrow B_{\varkappa 1}^* \times \ldots \times B_{\varkappa\alpha}^* \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, \beta \tag{b}$$

gültig. Nach S 12/1 ist $A_{\varkappa\iota}^* \leftrightarrow A_\iota^\circ \cap B_\varkappa^\circ \leftrightarrow B_{\varkappa\iota}^*$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$. Ist nun $C_{\iota\varkappa}$ eine Menge, für die $C_{\iota\varkappa} \leftrightarrow A_{\iota\varkappa} \leftrightarrow A_\iota^\circ \cap B_\varkappa^\circ$ gilt, so bekommt man infolge (a) die Beziehung (13.1) und infolge (b) die Beziehung (14.1).

D 4/1: Es sei

$$G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha \tag{a}$$

und $A_\iota \leftrightarrow C_{\iota 1} \times C_{\iota 2} \times \ldots \times C_{\iota\gamma_\iota}$, wo γ_ι für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ eine natürliche Zahl ist. Dann heißt

$$G \leftrightarrow C_{11} \times \ldots \times C_{1\gamma_1} \times C_{21} \times \ldots \times C_{2\gamma_2} \times \ldots \times C_{\alpha\gamma_\alpha}. \tag{b}$$

Verfeinerung des direkten Produkts (a).

Bemerkung 1/1: Jedes direkte Produkt ist zugleich seine Verfeinerung.

D 5/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ und $H \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta$. Es existiere eine schlichte Abbildung i der Komponenten A_ι des direkten Produkts G auf die Komponenten $B_\varkappa$ des direkten Produkts H der Eigenschaft, daß die Mengen A_ι und $B_\varkappa$ äquivalent sind, wenn nur $\mathrm{i}\{A_\iota\} = \{B_\varkappa\}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ ist. Dann heißt i *starke Abbildung* $A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ auf $B_1 \times \ldots \times B_\beta$ und *die direkten Produkte* G, H *heißen äquivalent*.

Bemerkung 2/1: Zwei direkte äquivalente Produkte besitzen die gleiche Anzahl von Komponenten, dh. $\alpha = \beta$ und es gilt $G \leftrightarrow H$. Man nimmt sehr oft den Fall in Betracht, daß $G = H$ ist.

D 6/1: Es sei $\mathrm{Card} A_\iota$ die Kardinalzahl der Menge A_ι und $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$. *Die Komponente* A_ι des direkten Produkts heißt *wesentlich*, wenn $\mathrm{Card} A_\iota \geqq 2$. Anderenfalls heißt A_ι *unwesentlich. Das direkte Produkt*, in dem jede Komponente wesentlich ist, *heißt reduziert*.

S 14/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ nud $A_1', \ldots, A_{\alpha'}'$ seien die wesentlichen Komponenten des direkten Produkts. Dann ist für das reduzierte direkte Produkt $G \leftrightarrow A_1' \times \ldots \times A_{\alpha'}'$ die Relation $\alpha' \leqq \alpha$ richtig.

Beweis ist klar.

S 15/1: Es seien $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, $H \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\alpha$ zwei äquivalente direkte Produkte. Dann sind ihre reduzierten direkten Produkte auch äquivalent.

Beweis: Wenn i die starke Abbildung von $A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ auf $B_1 \times \ldots \times B_\alpha$ ist, folgt nach D 5/1 aus der Beziehung $\mathrm{i}\{A_\iota\} = \{B_\beta\}$, daß $\mathrm{Card} A_\iota = \mathrm{Card} B_\varkappa$

ist. Ist also A_ι wesentlich resp. unwesentlich, so ist auch $B_\varkappa$ wesentlich resp. unwesentlich und umgekehrt. Läßt man jetzt in beiden direkten Produkten alle unwesentlichen Komponenten weg, so bekommt man die reduzierten direkten Produkte, welche äquivalent sind.

S 16/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta = B^{[\beta]}$. Es sei weiter e ein beliebiges, fest gewähltes Element in G, $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha) \in A^{[\alpha]}$, $e \leftrightarrow (e'_1, \ldots, e'_\beta) \in B^{[\beta]}$, $A^\circ_\iota \leftrightarrow \{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\}$, $B^\circ_\varkappa \leftrightarrow \{e'_1\} \times \ldots \times B_\varkappa \times \ldots \times \{e'_\beta\}$. Ist die Menge A°_ι in bezug auf $B^{[\beta]}$ und die Menge $B^\circ_\varkappa$ in bezug auf $A^{[\alpha]}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ konvex, dann besitzen die betrachteten direkten Produkte äquivalente Verfeinerungen. Die Menge G ist dann das direkte Produkt der mit $(A^\circ_\iota \cap B^\circ_\varkappa)$ äquivalenten Mengen $C_{\iota\varkappa}$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha, \varkappa = 1, \ldots, \beta)$.

Beweis: Wir benutzen die Bezeichnungen aus S 13/1. Nach diesem Satz existieren Mengen $C_{\iota\varkappa} \leftrightarrow (A^\circ_\iota \cap B^\circ_\varkappa)$ mit der Eigenschaft, daß die Beziehungen (13.1) und (14.1) gelten. Ersetzt man jede Komponente A_ι durch $(C_{\iota 1} \times \ldots \times C_{\iota\varkappa} \times \ldots \times C_{\iota\beta})$ und jede Komponente $B_\varkappa$ durch $(C_{1\varkappa} \times \ldots \times C_{\iota\varkappa} \times \ldots \times C_{\alpha\varkappa})$ bekommt man die Verfeinerungen der gegeben direktenen Produkte. In beiden direkten Produkten der Komponenten A_ι, $B_\varkappa$ erscheinen immer die Komponenten $C_{\iota\varkappa}$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha, \varkappa = 1, \ldots, \beta)$ und eben nur diese. Bilden wir jede Komponente $C_{\iota\varkappa}$ der Verfeinerung des direkten Produkts

$$G \leftrightarrow C_{11} \times \ldots \times C_{1\beta} \times C_{21} \times \ldots \times C_{2\beta} \times \ldots \times C_{\alpha 1} \times \ldots \times C_{\alpha\beta} \tag{a}$$

auf die Komponente $C_{\iota\varkappa}$ in der Verfeinerung

$$G \leftrightarrow C_{11} \times \ldots \times C_{\alpha 1} \times C_{12} \times \ldots \times C_{\alpha 2} \times \ldots \times C_{1\beta} \times \ldots \times C_{\alpha\beta} \tag{b}$$

ab, dh. auf sie selbst, so bekommen wir eine schlichte Abbildung $\mathfrak{i}$ der Komponenten eines direkten Produkts auf die Komponenten des anderen. Die identische Abbildung $C_{\iota\varkappa}$ auf sich ist schlicht, und $\mathfrak{i}$ ist also eine starke Abbildung von $(C_{11} \times C_{12} \times \ldots \times C_{\alpha\beta})$ auf $(C_{11} \times C_{21} \times \ldots \times C_{\alpha\beta})$. Deshalb sind diese Verfeinerungen (a), (b) äquivalente direkte Produkte.

S 17/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, $B \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta = B^{[\beta]}$ und es gelte für ein beliebiges, festgewähltes Element $e \in G$, $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha) \in A^{[\alpha]}$, $e \leftrightarrow (e'_1, \ldots, e'_\beta) \in B^{[\beta]}$. Es sei weiter $A^\circ_\iota \leftrightarrow \{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\}$, $B^\circ_\varkappa \leftrightarrow \{e'_1\} \times \ldots \times B_\varkappa \times \ldots \times \{e'_\beta\}$. Wenn noch $A^*_{\iota\varkappa}$ die Projektionen von A°_ι in $B_\varkappa$ und $B^*_{\varkappa\iota}$ die Projektionen von $B^\circ_\varkappa$ in A_ι sind, dann

1. A°_ι dann und nur dann in bezug auf $B^{[\beta]}$ konvex und gleichzeitig $B^\circ_\varkappa$ dann und nur dann in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex $(\iota = 1, \ldots, \alpha, \varkappa = 1, \ldots, \varkappa)$ ist, wenn
2.
$$A_\iota \leftrightarrow B^*_{1\iota} \times \ldots \times B^*_{\beta\iota} \tag{15.1}$$
und gleichzeitig
$$B_\varkappa \leftrightarrow A^*_{1\varkappa} \times \ldots \times A^*_{\alpha\varkappa} \tag{16.1}$$
für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ gilt.

Beweis: a) Es gelten die Bedingungen 1. Nach dem Beweis des Satzes S 13/1 gilt auch

$$A^\circ_\iota \leftrightarrow A^*_{\iota 1} \times A^*_{\iota 2} \times \ldots \times A^*_{\iota\beta}, \qquad \iota = 1, \ldots, \alpha, \tag{a}$$

$$B^\circ_\varkappa \leftrightarrow B^*_{\varkappa 1} \times B^*_{\varkappa 2} \times \ldots \times B^*_{\varkappa\alpha}, \qquad \varkappa = 1, \ldots, \beta. \tag{b}$$

Aus (b) bekommt man, wenn man noch die Beziehung $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta$ benutzt, daß

$G \leftrightarrow (B^*_{11} \times B^*_{12} \times \ldots \times B^*_{1\alpha}) \times (B^*_{21} \times B^*_{22} \times \ldots \times B^*_{2\alpha}) \times \ldots \times (B^*_{\beta 1} \times B^*_{\beta 2} \times \ldots \times B^*_{\beta\alpha})$. Nach S 2/1 kann man $G \leftrightarrow (B^*_{11} \times B^*_{21} \times \ldots \times B^*_{\beta 1}) \times (B^*_{12} \times B^*_{22} \times \ldots \times B^*_{\beta 2}) \times \times \ldots \times (B^*_{1\alpha} \times B^*_{2\alpha} \times \ldots \times B^*_{\beta\alpha})$ schreiben, wo $B^*_{\varkappa\iota}$ die Projektion von $B^\circ_\varkappa$ in A_ι ist. Weil aber $B^\circ_\varkappa$ in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex ist, sind nach S 12/1 die Mengen $B^*_{\varkappa\iota}$ mit $A^*_{\iota\varkappa}$ äquivalent, dh. für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ gilt $B^*_{\varkappa\iota} \leftrightarrow A^*_{\iota\varkappa}$. Infolge (a) bekommt man $(B^*_{1\iota} \times \ldots \times B^*_{\beta\iota}) \leftrightarrow (A^*_{\iota 1} \times \ldots \times A^*_{\iota\beta}) \leftrightarrow A^\circ_\iota$, und weil $A^\circ_\iota \leftrightarrow A_\iota$ ist, gilt (15.1). Ähnlich kann man beweisen die Beziehung (16.1), da A°_ι in bezug auf $B^{[\beta]}$ konvex ist.

b) Es gelten die Bedingungen (15.1) und (16.1). Weil $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ ist, bekommt man aus (15.1) und S 2/1 die Beziehungen $G \leftrightarrow (B^*_{11} \times \ldots \times B^*_{\beta 1}) \times \times (B^*_{12} \times \ldots \times B^*_{\beta 2}) \times \ldots \times (B^*_{1\alpha} \times \ldots \times B^*_{\beta\alpha}) \leftrightarrow (B^*_{11} \times \ldots \times B^*_{1\alpha}) \times (B^*_{21} \times \ldots \times B^*_{2\alpha}) \times \times \ldots \times (B^*_{\beta 1} \times \ldots \times B^*_{\beta\alpha})$. Es seien $B'_\varkappa$ das Bild von $B^\circ_\varkappa$ in der schlichten Abbildung von G auf $A^{[\alpha]}$ (dh. $B'_\varkappa \leftrightarrow B^\circ_\varkappa$) und $B^*_{\varkappa\iota}$ die Projektion von $B^\circ_\varkappa$ in A_ι. Nach S 3/1 bekommt man $B_\varkappa \leftrightarrow B'_\varkappa \subset (B^*_{\varkappa 1} \times \ldots \times B^*_{\varkappa\alpha})$, weil $B_\varkappa \leftrightarrow B^\circ_\varkappa$ gilt. Nach der Voraussetzung gilt die Beziehung $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta$, und darum muß notwendig auch

$$B^\circ_\varkappa \leftrightarrow B_\varkappa \leftrightarrow B^*_{\varkappa 1} \times \ldots \times B^*_{\varkappa\alpha} \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, B \tag{a}$$

gelten. Nach S 9/1 ist also $B^\circ_\varkappa$ in bezug auf $A^{[\alpha]}$ konvex. Nehmen wir jetzt (16.1) und $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ in Betracht, so bekommen wir durch analogische Überlegungen, daß die Beziehung

$$A^\circ_\iota \leftrightarrow A_\iota \leftrightarrow A^*_{\iota 1} \times \ldots \times A^*_{\iota\beta} \quad \text{für} \quad \iota = 1, \ldots, \alpha \tag{b}$$

richtig ist. A°_ι ist also in bezug auf $B^{[\beta]}$ nach S 9/1 konvex und die Behauptung 1. ist bewiesen.

S 18/1: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta = B^{[\beta]}$ und es gelten die Bezeichnungen aus S 17/1. Sind die Bedingungen (15.1) und (16.1) erfüllt, dann besitzen die betrachteten direkten Produkte äquivalente Verfeinerungen.

Beweis: Nach S 17/1 folgt aus (15.1) und (16.1) die Gültigkeit der Bedingungen 1. dieses Satzes, dh. die Bedingungen von S 16/1 sind erfüllt und damit ist S 18/1 bewiesen.

2. DIREKTE ZERLEGUNGEN VON MENGEN

D 1/2: a) Es sei $\bar{A}$ ein nicht leeres System von nicht leeren, paarweise disjunkten Teilmengen in G. Dann sagen wir, daß $\bar{A}$ eine *Zerlegung in G* ist.

b) Wenn die Zerlegung $\bar{A}$ in G so beschaffen ist, daß jedes Element von G in einem Element von $\bar{A}$ vorkommt, so sagen wir, daß $\bar{A}$ eine *Zerlegung auf G* ist.

c) Die trivialen Zerlegungen auf der Menge G sind die sogenannte *größte* und *kleinste Zerlegung*. Unter der größten Zerlegung $\bar{G}_{\max}$ verstehen wir die aus dem einzigen Element G bestehende Zerlegung der Menge G. Unter der kleinsten Zerlegung $\bar{G}_{\min}$ verstehen wir das System von je einem Element von G gebildeten Mengen.

V 1/2: Es sei d eine Abbildung der Menge G auf die Menge G^*. Dann gilt: Die *zu der Abbildung* d *gehörige Zerlegung* $\bar{G}$ der Menge G ist mit der Menge G^* äquivalent. Dabei sind die Elemente des Systems $\bar{G}$ die Teilmengen $\bar{a}$, wo $\bar{a}$

die Menge eben aller Urbilder eines gewissen Elementes $a^* \in G^*$ bedeutet, dh. für jedes $a \in \bar{a}$ ist die Relation $\mathsf{d}a = a^*$ richtig.

Beweis: [1], 34.

D 2/2: Es seien $\bar{A}$, $\bar{B}$ Zerlegungen auf G.

a) Die Zerlegung $\bar{A}(\bar{B})$ heißt *Überdeckung (Verfeinerung) von* $\bar{B}(\bar{A})$, wenn jedes Element von $\bar{A}$ die Vereinigung einiger Elemente von $\bar{B}$ ist. Diese Beziehung drücken wir durch $\bar{A} \geqq \bar{B}$ oder $\bar{B} \leqq \bar{A}$ aus.

b) *Unter einer gemeinsamen Überdeckung (Verfeinerung) der Zerlegungen* $\bar{A}$, $\bar{B}$ verstehen wir eine Zerlegung $\bar{C}(\bar{D})$ auf G, für die $\bar{C} \geqq \bar{A}, \bar{C} \geqq \bar{B}(\bar{D} \leqq \bar{A}, \bar{D} \leqq \leqq \bar{B})$ gilt.

c) *Unter der kleinsten gemeinsamen Überdeckung (größten gemeinsamen Verfeinerung) der Zerlegungen* $\bar{A}$, $\bar{B}$ verstehen wir eine solche gemeinsame Überdeckung $[\bar{A}, \bar{B}]$ (Verfeinerung $(\bar{A}, \bar{B})$) dieser Zerlegungen, daß für jede ihre Überdeckung $\bar{C}$ (Verfeinerung $\bar{D}$) die Beziehung $[\bar{A}, \bar{B}] \leqq \bar{C}(\bar{D} \leqq (\bar{A}, \bar{B}))$ gilt.

d) Wir nennen *die Zerlegung* $\bar{A}$ *komplementär zu* $\bar{B}$, wenn jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ mit allen Elementen $\bar{b} \in \bar{B}$, die in demselben Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ wie $\bar{a}$ als Teilmengen enthalten sind, inzident ist.

Bemerkung 1/2: Wenn $\bar{A}$ zu $\bar{B}$ komplementär ist, so ist auch $\bar{B}$ zu $\bar{A}$ komplementär ([1], 26).

S 2/2: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = G'$, ${}^{(\iota)}A = A_1 \times \ldots \times A_{\iota-1} \times A_{\iota+1} \times \ldots \times A_\alpha$, d eine schlichte Abbildung von G auf G' und d_ι die von d induzierte P-Abbildung von G auf A_ι. Ist weiter $\bar{G}_\iota$ die zu d_ι gehörige Zerlegung auf G, dann ist $\bar{G}_\iota$ mit A_ι äquivalent und die Elemente $\bar{a}_\iota \in \bar{G}_\iota$ sind mit ${}^{(\iota)}A$ äquivalente Mengen, $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Beweis: Es sei $\bar{a}_\iota$ die Menge eben aller Urbilder von a_ι in der P-Abbildung d_ι, dh. die Menge aller Elemente $a \in G$, für die $\mathsf{d}_\iota a = a_\iota$ eben dann ist, wenn $\mathsf{d}a = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha)$ gilt. In der erweiterten Abbildung d ist die Zerlegung $\bar{G}_\iota$ eineindeutig auf die Zerlegung $\bar{G}'_\iota$ abgebildet; dabei bedeutet $\bar{G}'_\iota$ die, aus der Elemente $\bar{a}'_\iota$ der Form $\bar{a}'_\iota = (A_1 \times \ldots \times A_{\iota-1} \times \{a_\iota\} \times A_{\iota+1} \times \ldots \times A_\alpha)$ bestehende Zerlegung. Es ist leicht zu sehen, daß jedes Element $\bar{a}'_\iota$ eine mit ${}^{(\iota)}A$ äquivalente Menge ist, und so ist auch $\bar{a}_\iota$ mit ${}^{(\iota)}A$ äquivalent. Nach S 1/2 ist die Zerlegung $\bar{G}_\iota$ mit der Menge A_ι äquivalent.

D 3/2: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, d_ι die P-Abbildung von G auf A_ι und $\bar{G}_\iota$ die zu der P-Abbildung d_ι gehörige Zerlegung auf G. Das System $\{\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha\}$ von allen Zerlegungen $\bar{G}_\iota$ heißt *das vollständige, zu dem System* $\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$ *gehörige System von Zerlegungen*. Wir sagen auch, daß *dieses vollständige System von Zerlegungen zu dem System* $\{\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_\alpha\}$ der P-Abbildungen *gehört*. Die Menge $\{\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_\alpha\}$ von allen P. Abbildungen d_ι heißt *das vollständige, zu dem System* $\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$ *gehörige System von P-Abbildungen*.

S 3/2: Es sei $G = A_1 \times \ldots \times A_\alpha = G'$ und $\{\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha\}$ das vollständige, zu dem System $\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$ gehörige System von Zerlegungen. Dann gilt folgendes:

a) Die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\bar{G}_\iota, \bar{G}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$ für $\iota \neq \varkappa$; ι, $\varkappa = = 1, \ldots, \alpha$.

b) Jede zwei Zerlegungen $\bar{G}_\iota$, $\bar{G}_\varkappa$ sind für $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$ komplementär.

c) Die größte gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen des vollständigen Systems $(\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}) = \bar{G}_{\min}$.

Beweis: a) Man kann $\iota < \varkappa$ voraussetzen. Es seien $\bar{a}'_\iota = A_1 \times \ldots \times \{a_\iota\} \times \times \ldots \times \{a_\iota\} \times \ldots \times A_\alpha$, $\bar{b}'_\iota = A_1 \times \ldots \times \{b_\iota\} \times \ldots \times A_\alpha$ beliebige Elemente der Zerlegung $\bar{G}'_\iota$ und $\bar{x}'_\varkappa = A_1 \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{x_\varkappa\} \times \ldots \times A_\alpha$ ein beliebiges Element der Zerlegung $\bar{G}'_\varkappa$. Da a_ι, b_ι Elemente aus A_ι und $x_\varkappa$ ein Element aus $A_\varkappa$ sind, haben wir auch $\bar{a}'_\iota \cap \bar{x}'_\varkappa \neq \emptyset$, $\bar{b}'_\iota \cap \bar{x}'_\varkappa \neq \emptyset$. Jedes Element $\bar{a}'_\iota \in \bar{G}'_\iota$ ist also mit jedem Element $\bar{x}'_\varkappa \in \bar{G}'_\varkappa$ inzident. So ergibt sich *eine Bindung* ([1], 12) jedes Elementes $\bar{a}'_\iota$ mit jedem Element $\bar{b}'_\iota$ in der Zerlegung $\bar{G}'_\iota$ in bezug auf die Zerlegung $\bar{G}'_\varkappa$. Wenn wir also die Definition und Konstruktion der kleinsten gemeinsamen Überdeckung von $\bar{G}'_\iota$, $\bar{G}'_\varkappa$ berücksichtigen ([1], 14), bekommen wir $[\bar{G}'_\iota, \bar{G}'_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$. Nach der Voraussetzung existiert die schlichte Abbildung d der Menge G auf G', und es gilt dann $\bar{G}_\iota = \mathsf{d}^{-1}\bar{G}'_\iota$, $\bar{G}_\varkappa = \mathsf{d}^{-1}\bar{G}'_\varkappa$, und darum ist $[\bar{G}_\iota, \bar{G}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$ für $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$, $i \neq \varkappa$.

b) Wie wir eben in a) gezeigt haben, sind je zwei Elemente $\bar{a}_\iota \in \bar{G}_\iota$, $\bar{x}_\varkappa \in \bar{G}_\varkappa$ inzident und gleichzeitig $[\bar{G}_\iota, \bar{G}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$. Nach D 2/2 sind also die Zerlegungen $\bar{G}_\iota$, $\bar{G}_\varkappa$ komplementär.

c) Nach [3], 44 gibt es eben eine gemeinsame größte Verfeinerung $\bar{G} = (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha)$ der Zerlegungen $\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha$. Es sei nun $\bar{G} \neq \bar{G}_{\min}$. Dann muß in $\bar{G}$ wenigstens ein Element $\bar{a}$ existieren, welches wenigstens zwei verschiedene Elemente x, y enthält. Es sei $\mathsf{d}x = (x_1, \ldots, x_\alpha)$, $\mathsf{d}y = (y_1, \ldots, y_\alpha)$. Dann müssen die Elemente $(x_1, \ldots, x_\alpha)$, $(y_1, \ldots, y_\alpha)$ wenigstens in einer Komponente verschieden sein. Sei also z. B. $x_\iota \neq y_\iota$. Nach der Definition der Zerlegung $\bar{G}'_\iota$ gehören dann aber die Elemente $(x_1, \ldots, x_\alpha)$, $(y_1, \ldots, y_\alpha)$ in zwei verschiedene Elemente $\bar{x}'_\iota$ und $\bar{y}'_\iota$ aus $\bar{G}'_\iota$. Dann sind aber auch die Elemente $\bar{x}_\iota = \mathsf{d}^{-1}\bar{x}'_\iota$, $\bar{y}_\iota = \mathsf{d}^{-1}\bar{y}'_\iota$ der Zerlegung $\bar{G}_\iota$ voneinander verschieden und x, y gehören dann in zwei verschiedene Elemente der Zerlegung $\bar{G}$, was im Widerspruch mit der Voraussetzung steht. Es ist also $(\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha) = \bar{G}_{\min}$.

S 4/2: Es sei $G \leftrightarrow A_1 \times A_2$, $G \leftrightarrow A'_1 \times A'_2$ und A_2 mit A'_2 äquivalent. Dann sind auch die Mengen A_1, A'_1 äquivalent.

Beweis: Es sei d die schlichte Abbildung von G auf $A_1 \times A_2$, g die schlichte Abbildung von G auf $A'_1 \times A'_2$, f die schlichte Abbildung von A_2 auf A'_2 und $\mathsf{d}a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. Es ist leicht zu beweisen, daß es eine schlichte Abbildung h der Menge G auf $A'_1 \times A'_2$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\mathsf{h}a = (a'_1, a'_2)$ nur eben dann ist, wenn $\mathsf{f}a_2 = a'_2$ gilt. Nun wollen wir eine neue Abbildung k der Menge A_1 in A'_1 so definieren, daß $\mathsf{k}a_1 = a'_1$ ist, wenn $\mathsf{d}a = (a_1, a_2)$, $\mathsf{h}a = (a'_1, a'_2)$ und $\mathsf{f}a_2 = a'_2$ gilt. Dann ist jedes Element $a_1 \in A_1$ Urbild für wenigstens ein Element $a'_1 \in A'_1$. Anderseits ist jedes Element aus A'_1 das Bild von einem Element aus A_1. Ist nun $a_1 \neq b_1 \in A_1$ und $a = \mathsf{d}^{-1}(a_1, a_2)$, $b = \mathsf{d}^{-1}(b_1, a_2)$, dann gilt $a \neq b$. Aus den Beziehungen $\mathsf{h}a = (a'_1, a'_2)$, $\mathsf{h}b = (b'_1, a'_2)$ folgt, daß $a'_1 \neq b'_1$, weil h eine schlichte Abbildung ist. Darum ist auch $\mathsf{k}a_1 \neq \mathsf{k}b_1$. k ist also eine schlichte Abbildung von A auf A'_1.

D 4/2: *Die Menge G* nennen wir *direkt zerlegbar*, wenn es ein solches System von Mengen $A_1, \ldots, A_\alpha$ gibt, daß

1. G direktes Produkt dieser Mengen, dh. $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ ist,
2. jede Zerlegung $\bar{G}_\iota$ aus dem vollständigen, zu $\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$ gehörigen System $\{\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha\}$ von $\bar{G}_{\min}$ verschieden ist, dh. $\bar{G}_\iota \neq \bar{G}_{\min}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

In diesem Falle spricht man auch über *die direkte Zerlegung der Menge G* und A_ι heißt *der direkte Faktor*. Gibt es keine direkte Zerlegung von G, sagen wir, daß die Menge G *direkt unzerlegbar* ist.

S 5/2: Die Menge G ist dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn Mengen $A_1, \ldots, A_\alpha$ der Eigenschaft existieren, daß

a) $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ ist,
b) keine von P-Abbildungen d_ι aus dem vollständigen, zu $\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$ gehörigen System $\{\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_\alpha\}$ schlicht ist.

Beweis: a) Es sei d_ι für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ keine schlichte Abbildung der Menge G auf A_ι. Dann gilt für die zu der P-Abbildung d_ι gehörige Zerlgeung $\bar{G}_\iota$ die Beziehung $\bar{G}_\iota \geqq \bar{G}_{\min}$, $\bar{G}_\iota \neq \bar{G}_{\min}$. Das System $A_1, \ldots, A_\alpha$ hat also die Eigenschaften 1), 2) aus D 4/2.

b) Es sei nun für ein ι die P-Abbildung d_ι eine schlichte Abbildung von G auf A_ι, $1 \leqq \iota \leqq \alpha$. Dann gilt $\bar{G}_\iota = \bar{G}_{\min}$ und die Eigenschaft 2) aus D 4/2 ist nicht erfüllt.

S 6/2: Es sei G eine direkt zerlegbare Menge. Dann ist $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, wo
a) $\alpha \geqq 2$,
b) für Kardinalzahlen von wenigstens zwei Mengen $A_\iota, A_\varkappa$ $(\iota \neq \varkappa)$ $\operatorname{Card} A_\iota > 1$, $\operatorname{Card} A_\varkappa > 1$ gilt.

Beweis: a) Wenn $\alpha = 1$ wäre, hätte man $G \leftrightarrow A_1$ und die P-Abbildung d_1 wäre eine schlichte Abbildung, was im Widerspruch mit S 5/2 steht.

b) Es sei G direkt zelegbar und $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$. Setzen wir voraus, daß für alle $\iota \neq \varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, \alpha$ $\operatorname{Card} A_\varkappa = 1$ gilt. Dann ist $A_1 \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times A_\alpha$ mit A_ι äquivalent. In diesem Falle ist aber die P-Abbildung d_ι von G auf A_ι eine schlichte Abbildung, was im Widerspruch mit S 5/2 steht.

D 5/2: Es seien $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ Zerlegungen auf G, von denen jede zwei komplementär sind, und es gelte noch:
a) $[\bar{A}_\iota, \bar{A}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$ für $\iota \neq \varkappa$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$,
b) $(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha) = \bar{G}_{\min}$.
Dann heißen *die Zerlegungen* $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ *stark komplementär*.

S 7/2: Die Menge G ist dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn auf G nichttriviale, stark komplementäre Zerlegungen $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ existieren. Gibt es solche Zerlegungen, dann gilt $G \leftrightarrow \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$.

Beweis: a) Es sei G direkt zerlegbare Menge. Nach S 6/2 ist $\alpha \geqq 2$ und $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\alpha$. Nach S 6/2 und S 2/1 gibt es solche Mengen A_1, A_2, daß $A_1 \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\iota$, $A_2 \leftrightarrow B_{\iota+1} \times \ldots \times B_\alpha$, $1 \leqq \iota \leqq \alpha$. wobei $\operatorname{Card} A_1 > 1$, $\operatorname{Card} A_2 > 1$. Es gilt also $G \leftrightarrow A_1 \times A_2$. Dann muß die zu der P-Abbildung d_ι gehörige Zerlegung $\bar{G}_\iota$ auf G nichttrivial sein. Nach D 4/2 ist $\bar{G}_\iota \geqq \bar{G}_{\min}$, es gilt aber auch $\bar{G}_\iota \neq \bar{G}_{\max}$ für $\iota = 1, 2$. Wäre nämlich z. B. $\bar{G}_1 = \bar{G}_{\max}$, so müßte die Menge A_1 notwendig nur ein einziges Element enthalten, dh. $\operatorname{Card} A_1 = 1$, was im Widerspruch mit S 6/2 stände. Nach S 3/2 und D 5/2 sind die Zerlegungen stark komplementär. Nach S 2/2 ist $\bar{G}_\iota$ mit A_ι äquivalent. Es ist also $G \leftrightarrow \bar{G}_1 \times \bar{G}_2$, dh. $G \leftrightarrow \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, wo $\bar{G}_\iota = \bar{A}_\iota$, $\iota = 1, 2$.

b) Es seien $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ nichttriviale, stark komplementäre Zerlegungen auf G. Dann ist $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_2$, denn im entgegengesetzen Falle müßte für ihre gemeinsame Verfeinerung $(\bar{A}_1, \bar{A}_2) = \bar{A}_1 \neq \bar{G}_{\min}$ gelten, was im Widerspruch mit D 5/2 wäre. Um zu zeigen, daß G eine direkt zerlegbare Menge ist, genügt nun, die Gültigkeit der Relation $G \leftrightarrow \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ zu beweisen. Durch $\bar{a}_\iota$ bezeichnen wir das Element der Zerlegung $\bar{A}_\iota$, $\iota = 1, 2$, welches das Element $a \in G$ enthält. Wir definieren jetzt eine Abbildund d der Menge G in $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ folgendermaßen: $\mathsf{d}a = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ für $a \in G$, $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1$, $\bar{a}_2 \in \bar{A}_2$. Wir werden beweisen, daß d die Abbildung von G auf $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ ist. Seien $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1$, $\bar{a}_2 \in \bar{A}_2$ beliebige Elemente und $a \in \bar{a}_1$, $b \in \bar{a}_2$. Weil $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ stark komplementäre Zerlegungen sind, ist $[\bar{A}_1, \bar{A}_2] = \bar{G}_{\max}$, und es existiert also zu jeden zwei Elementen a, b ein Element $x \in G$ derart, daß

a, x einem und demselben Element $\bar{x}_1 \in \bar{A}_1$ und b, x einem und demselben Element $\bar{a}_2 \in \bar{A}_2$ gehören. Dann gilt nach der Definition der Abbildung d, daß $\mathsf{d}x = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$. Jedes Element $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ ist also das Bild wenigstens eines Elements $x \in G$.

Weiter ist d die schlichte Abbildung von G auf $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$. Es sein a, b beliebige Elemente aus G, $a \in \bar{a}_\iota \in \bar{A}_\iota$, $b \in \bar{b}_\iota \in \bar{A}_\iota$ und es sei $\bar{a}_\iota = \bar{b}_\iota$ für $\iota = 1, 2$. Das bedeutet aber, daß $a, b \in \bar{a}_1$, $a, b \in \bar{a}_2$ gilt. Dann liegen a, b in einem und demselben Element $\bar{a}$ der größten gemeinsamen Verfeinerung $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ der Zerlegungen $\bar{A}_1, \bar{A}_2$. Da aber $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ stark komplementär sind, ist $(\bar{A}_1, \bar{A}_2) = \bar{G}_{\min}$ und also auch $a = b$. Daraus folgt, daß jedes Element $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ das Bild meistens eines Elements $a \in G$ in der Abbildung d ist.

Es sei nun d_ι die durch d induzierte P-Abbildung von G auf $\bar{A}_\iota$ und $\bar{G}_\iota$ die zu der d_ι gehörige Zerlegung auf G. Ist $\mathsf{d}a = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, $a \in \bar{a}_\iota \in \bar{A}_\iota$ dann gilt nach D 2/1 für die P-Abbildungen $\mathsf{d}_1 a = \bar{a}_1$, $\mathsf{d}_2 a = \bar{a}_2$. Weil jedes Element $a \in G$ in einem Element $\bar{a}_\iota \in \bar{A}_\iota$ liegt, bilden die Mengen $\bar{G}_1 = \bar{A}_1$, $\bar{G}_2 = \bar{A}_2$ ein vollständiges, zu $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2\}$ gehöriges System von Zerlegungen auf G. Nach der Voraussetzung gilt $\bar{G}_\iota = \bar{A}_\iota \neq \bar{G}_{\min}$ für $\iota = 1, 2$. Somit ist der Satz bewiesen.

D 6/2: *Eine Menge G heißt direkt vollständig zerlegbar*, wenn sie direkt zerlegbar ist und wenn für jeden Faktor A_ι der direkten Zerlegung $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ noch folgende Bedingungen für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ gelten:

a) A_ι ist eine direkt unzerlegbare Menge,

b) die Kardinalzahl $\mathrm{Card} A_\iota > 1$.

In diesem Falle spricht man auch von *einer vollständigen direkten Zerlegung*. Andernfalls sagt man, daß *G nicht direkt vollständig zerlegbar ist.*

D 7/2: Es seien $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, $H \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta$ die direkten Zerlegungen von G und H. Wenn es eine starke Abbildung i der Menge $A_1 \times \ldots \times A_\alpha$ auf die Menge $B_1 \times \ldots \times B_\beta$ gibt, sagen wir, daß *die betrachteten Zerlegungen äquivalent sind.*

S 8/2: Es seien $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$, $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta = B^{[\beta]}$ vollständige direkte Zerlegungen von G, e ein beliebiges, festgewähltes Element aus G, $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha) \in A^{[\alpha]}$, $e \leftrightarrow (e'_1, \ldots, e'_\beta) \in B^{[\beta]}$, $G \supset A^\circ_\iota \leftrightarrow (\{e_1\} \times \ldots \times A_\iota \times \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $G \supset B^\circ_\varkappa \leftrightarrow (\{e'_1\} \times \ldots \times B_\varkappa \times \ldots \times \{e'_\beta\})$. Wenn noch eine der folgenden Bedingungen gilt, dann ist

1. A°_ι in bezug auf $B^{[\beta]}$ und $B^\circ_\varkappa$ in bezug auf $A^{[\alpha]}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ konvex.

2. $A_\iota \leftrightarrow B^*_{1\iota} \times B^*_{2\iota} \times \ldots \times B^*_{\beta\iota}$, für $\iota = 1, \ldots, \alpha$,
$B_\varkappa \leftrightarrow A^*_{1\varkappa} \times A^*_{2\varkappa} \times \ldots \times A^*_{\alpha\varkappa}$ für $\varkappa = 1, \ldots, \beta$,

wo $A^*_{\iota\varkappa}$ die Projektion von A°_ι in $B_\varkappa$ und $B^*_{\varkappa\iota}$ die Projektion von $B^\circ_\varkappa$ in A_ι bedeutet, so sind die betrachteten Zerlegungen äquivalent.

Beweis: Nach S 17/1 sind die Bedingungen 1. und 2. äquivalent. Der Beweis wird für 1. durchgeführt. Nach (13.1) ist $A_\iota \leftrightarrow C_{\iota 1} \times \ldots \times C_{\iota\beta}$. Weil $G \leftrightarrow A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, $G \leftrightarrow B_1 \times \ldots \times B_\beta$ die direkten vollständigen Zerlegungen sind, sind auch die direkten Faktoren A_ι, $B_\varkappa$ direkt unzerlegbare Mengen und für ihre Kardinalzahlen gilt $\mathrm{Card} A_\iota \geqq 2$, $\mathrm{Card} B_\varkappa \geqq 2$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$. Da A_ι eine direkt unzerlegbare Menge ist, muß es ein Index $\varkappa$, $1 \leqq \varkappa \leqq \beta$ der Eigenschaft geben, daß $\mathrm{Card} C_{\iota\varkappa} = \mathrm{Card} A_\iota \geqq 2$ und $\mathrm{Card} C_{\iota\mu} = 1$ für $\mu \neq \varkappa$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$; $\varkappa, \mu = 1, \ldots, \beta$ gilt, und darum auch $A_\iota \leftrightarrow C_{\iota\varkappa}$ ist. Nach (14.1) gilt $B_\varkappa \leftrightarrow C_{1\varkappa} \times \ldots \times C_{\alpha\varkappa}$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$. Weil auch $B_\varkappa$ eine direkt unzerlegbare Menge ist, gibt es ein Index δ, $1 \leqq \delta \leqq \alpha$, der Eigenschaft, daß $\mathrm{Card} C_{\delta\varkappa} = \mathrm{Card} B_\varkappa \geqq 2$ und $\mathrm{Card} C_{\nu\varkappa} = 1$ für $\nu \neq \delta$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \varkappa = 1, \ldots, \beta$ gilt, und darum auch $B_\varkappa \leftrightarrow C_{\delta\varkappa}$ ist. Mit Rücksicht auf S 2/1 b) darf man voraussetzen, daß $\delta = \iota$, dh. $B_\varkappa \leftrightarrow C_{\iota\varkappa}$ ist. Nach S 16/1 gibt es äquivalente Verfeinerungen

$$G \leftrightarrow C_{11} \times C_{12} \times \ldots \times C_{1\beta} \times C_{21} \times \ldots C_{\alpha\beta},$$
$$G \leftrightarrow C_{11} \times C_{21} \times \ldots \times C_{\alpha 1} \times C_{12} \times \ldots \times C_{\alpha\beta}$$

der gegebenen direkten Produkten. Die starke Abbildung $\mathfrak{i}$ ist durch die Beziehung $\mathfrak{i}\{C_{\iota\varkappa}\} = \{C_{\iota\varkappa}\}$ gegeben. Dabei entsprechen den wesentlichen Komponenten der einen Verfeinerung die wesentlichen Komponenten der anderen und den unwesentlichen Komponenten entsprechen wieder die unwesentlichen der anderen Verfeinerung. Nach D 6/2 sind in der vollständigen direkten Zerlegungen die unwesentlichen Komponenten ausgeschlossen. Weil $C_{\iota\varkappa} \leftrightarrow A_\iota$ eine wesentliche Komponente ist, muß sie auch in der direkten Zerlegung $G \leftrightarrow B_1 \times \times \ldots \times B_\beta$ auftreten. Hier ist aber für jeden wesentlichen Faktor $C_{\iota\varkappa} \leftrightarrow B_\varkappa$. Dieses bedeutet, daß es zu jedem ι eben nur ein $\varkappa$ so gibt, daß $A_\iota \leftrightarrow C_{\iota\varkappa} \leftrightarrow B_\varkappa$ ist. Dann existiert eine schlichte Abbildung $\mathfrak{h}$ der Eigenschaft, daß wenn $\mathfrak{h}\{A_\iota\} = \{B_\varkappa\}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ ist, so sind die Mengen A_ι und $B_\varkappa$ äquivalent. Somit ist der Satz bewiesen.

II. GRUPPOIDE

3. DIREKTE PRODUKTE VON GRUPPOIDEN

S 1/3: Es sei α eine natürliche Zahl, $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ Gruppoide, $A_1, \ldots, A_\alpha$ ihre Felder, $G' = A_1 \times \ldots \times A_\alpha = A^{[\alpha]}$ und $(a_1, \ldots, a_\alpha)$, $(b_1, \ldots, b_\alpha)$ beliebige Elemente aus G'. Definieren wir eine Multiplikation in G' durch

$$(a_1, \ldots, a_\alpha)\,(b_1, \ldots, b_\alpha) = (a_1 b_1, \ldots, a_\alpha b_\alpha), \tag{1.3}$$

so ist G' das Feld eines Gruppoides $\mathfrak{G}'$, was wir mit $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$ bezeichnen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition des Gruppoides und der Bedingung (1.3).

D 1/3: Es seien $\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ Gruppoide. Gibt es eine isomorphe Abbildung $\mathfrak{d}$ des Gruppoides $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{A}^{[\alpha]} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, sagen wir, daß *das Gruppoid $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von Gruppoiden $\mathfrak{A}_\iota$* ist und wir schreiben

$$\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha \tag{2.3}$$

oder kürzer $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}^{[\alpha]}$. $\mathfrak{A}_\iota$ nennen wir *die ι-te Komponente des direkten Produktes*. Wenn für $a \in \mathfrak{G}$, $(a_1, \ldots, a_\alpha) \in \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{d}a = (a_1, \ldots, a_\alpha)$ ist, schreiben wir auch

$$a \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_\alpha) \tag{3.3}$$

und das Element a_ι heißt *die ι-te Komponente des Elementes a.*

Bemerkung 1/3: Weil der Isomorphismus von Gruppoiden eine Äquivalenzrelation ist, schreiben wir: Wenn $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{A}^{[\beta]} \leftrightarrow \mathfrak{B}^{[\beta]} = \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta$

ist, dann ist auch $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}^{[\beta]}$. Wenn $a \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_\alpha) = a'$, $a' \leftrightarrow (b_1, \ldots, b_\beta) \in \mathfrak{B}^{[\beta]}$, wobei $a \in \mathfrak{G}$, $a' \in \mathfrak{A}^{[\alpha]}$ ist, dann ist auch $a \leftrightarrow (b_1, \ldots, b_\beta)$. Die letzte Beziehung besagt, daß in der isomorphen Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}^{[\beta]}$ dem Element a des Gruppoides $\mathfrak{G}$ das Element $(b_1, \ldots, b_\beta)$ des Gruppoides $\mathfrak{B}^{[\beta]}$ zugeordnet ist.

S 2/3: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$. Dann gilt

a) $\mathfrak{G} \leftrightarrow (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\beta) \times (\mathfrak{A}_{\beta+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\gamma) \times \ldots \times (\mathfrak{A}_{\varkappa+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)$, wo $1 \leqq \beta < < \gamma < \ldots < \varkappa \leqq \alpha$ ist;

b) $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{\varkappa_1} \times \mathfrak{A}_{\varkappa_2} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\varkappa_\alpha})$, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\alpha$ die Zahlen $1, 2, \ldots, \alpha$ in einer beliebigen Anordnung sind;

c) $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_\iota \times {}^{(\iota)}\mathfrak{A}$, wo $1 \leqq \iota \leqq \alpha$ und ${}^{(\iota)}\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\iota-1} \times \mathfrak{A}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ ist.

Der Beweis folgt leicht aus S 2/1, S 1/3 und D 1/3.

S 3/3: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$. Dann existiert in $\mathfrak{G}$ ein idempotentes Element e dann und nur dann, wenn es in jedem Gruppoid $\mathfrak{A}_\iota$ ein idempotentes Element e_ι $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$ der Eigenschaft gibt, daß $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha)$.

Der Beweis ist klar.

S 4/3: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, e das idempotente Element in $\mathfrak{G}$, d die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Es sei a_ι° ein solches Element aus $\mathfrak{G}$, daß $a_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(e_1, \ldots, e_{\iota-1}, a_\iota, e_{\iota+1}, \ldots, e_\alpha)$ gilt. Dann

a) die Menge A_ι° aller Elemente $a_\iota^\circ \in \mathfrak{G}$ ist das Feld des Untergruppoides $\mathfrak{A}_\iota^\circ$, welches mit $\mathfrak{A}_\iota$ isomorph ist,

b) $\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} \mathfrak{A}_\iota^\circ = e$.

Beweis: a) Nach S 3/1 a) existiert die schlichte Abbildung d des Feldes A_ι° auf das Feld A_ι des Gruppoides $\mathfrak{A}_\iota$, und darum ist A_ι° das Feld des mit $\mathfrak{A}_\iota$ isomorphen Gruppoides $\mathfrak{A}_\iota^\circ$.

b) Nach S 3/1 b, ist für die Felder der Gruppoiden $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ die Beziehung $\bigcap\limits_{\iota=1}^{\alpha} A_\iota^\circ = e$ gültig, womit unser Satz bewiesen ist.

Verabredung 1/3: Weiter werden wir mit e ein beliebiges, festgewähltes idempotentes Element aus $\mathfrak{G}$ und mit $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ das Untergruppoid aus S 4/3 bezeichnen.

S 5/3: Es sei d die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{G}'$, e, e_ι idempotente Elemente und $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Es sei noch $\mathfrak{A}_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \times \ldots \times \mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $\mathfrak{B}$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}' = \mathsf{d}\mathfrak{B}$ sin Bild in dem Isomorphismus d. Es sei weiter f die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ auf $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{P}_\iota^\circ = \mathfrak{A}_\iota^\circ \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$, $\mathsf{f}\mathfrak{P}_\iota^\circ = \mathfrak{P}_\iota \subset \mathfrak{A}_\iota$. Dann ist $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_\alpha$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}'$ und es gilt $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{G}'$.

Beweis: $\mathfrak{P}_\iota^\circ = \mathfrak{A}_\iota^\circ \cap \mathfrak{B}$, als ein nichtleerer Durchschnitt von zwei Gruppoiden, ist wieder ein Gruppoid. Darum ist sein isomorphes Bild $\mathfrak{P}_\iota$ auch ein Untergruppoid in $\mathfrak{A}_\iota$. Nach S 1/3 ist $\mathfrak{P}'$ ein Gruppoid. Die letzte Behauptung des Satzes berührt nur die Felder der betrachteten Gruppoiden und ist nach S 4/1 gültig.

D 2/3: Es sei d die isomorphe Abbildung des Gruppoides $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$ und $\mathsf{d}a = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha) \in \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $a \in \mathfrak{G}$.

a) Dann heißt a_ι *die Projektion des Elementes a in* $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

b) Ist $B \neq \emptyset$ eine Teilmenge in $\mathfrak{G}$ und B_ι^* die Menge von allen Projektionen b_ι der Elementen $b_\iota \in B$ in $\mathfrak{A}_\iota$, nennen wir B_ι^* *die Projektion von B in* $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

S 6/3: Es sei d die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ und d_ι die Projektion des Feldes G von $\mathfrak{G}$ auf das Geld A_ι von $\mathfrak{A}_\iota$ aus S 5/1. Dann ist d_ι eine *Deformation* von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_\iota$, die von dem Isomorphismus d *induziert* ist. (Sie wird als *Projektion oder P-Deformation von* $\mathfrak{G}$ *auf* $\mathfrak{A}_\iota$ bezeichnet.)

Beweis: Nach S 5/1 ist $\mathsf{d}_\iota a = a_\iota$ eben nur dann, wenn $\mathsf{d}a = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha)$ ist und in diesem Falle ist d_ι die Abbildung von G auf A_ι. Wenn nun noch $\mathsf{d}b = (b_1, \ldots, b_\iota, \ldots, b_\alpha)$, dh. $\mathsf{d}_\iota b = b_\iota$ ist, dann gilt $(\mathsf{d}a)(\mathsf{d}b) = \mathsf{d}(ab)$, und also $(\mathsf{d}_\iota a)(\mathsf{d}_\iota b) = \mathsf{d}_\iota(ab)$.

S 7/3: Es sei d die isomorphe Abbildung des Gruppoides $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{B}$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}$, $\mathsf{d}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, e das idempotente Element in $\mathfrak{G}$ und $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Es gelte $\mathfrak{A}_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $\mathfrak{P}_\iota^\circ = \mathfrak{A}_\iota^\circ \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$, $\mathsf{d}\mathfrak{P}_\iota^\circ = (\{e_1\} \times \ldots \times \mathfrak{P}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\}) \leftrightarrow \mathfrak{P}_\iota \subset \mathfrak{A}_\iota$. Es sei weiter $\mathfrak{B}_\iota^*$ die Projektion von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}_\iota$. Dann gilt

a) $\mathfrak{P}_\iota \subset \mathfrak{B}_\iota^* \subset \mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$;

b) wenn $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_\alpha$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1^* \times \ldots \times \mathfrak{B}_\alpha^*$ ist, so ist die Beziehung

$$\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}^* \tag{4.3}$$

richtig.

Beweis: a) Nach dem Beweis von S 5/3 ist $\mathfrak{P}_\iota$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{A}_\iota$. Weil nach S 6/3 d eine Deformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_\iota$ ist, ist die Projektion $\mathfrak{B}_\iota^*$ des Gruppoides $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}_\iota$ wieder ein Gruppoid. Für ihre Felder gilt die Beziehung a) aus S 6/1 und somit ist die Behauptung bewiesen.

b) $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{B}^*$ sind Gruppoide nach S 1/3 und für ihre Felder ist (3.1) und somit auch (4.3) gültig.

S 8/3: Behalten wir die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus S 7/3. Wenn nun mindestens eine der Gleichheiten

$$\mathfrak{P}_\iota = \mathfrak{B}_\iota^*, \qquad \iota = 1, \ldots, \alpha, \tag{5.3}$$

$$\mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_\alpha = \mathfrak{P}' = \mathfrak{B}', \tag{6.3}$$

$$\mathfrak{B}_1^* \times \ldots \times \mathfrak{B}_\alpha^* = \mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}' \tag{7.3}$$

richtig ist, sind gleichzeitig alle richtig.

Beweis: Für die Felder der betrachteten Gruppoide ist der Satz nach S 7/1 richtig. Weil die direkten Produkte Untergruppoide in $\mathfrak{G}$, sind, ist der Satz bewiesen.

D 3/3: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$ und $\mathfrak{H}$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}$. Ist sein Feld H eine konvexe Teilmenge in bezug auf $A^{[\alpha]} = A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, dh. in bezug auf das Feld des Gruppoides $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$, sagen wir, daß $\mathfrak{H}$ *ein in bezug auf* $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ *konvexes Gruppoid* oder daß $\mathfrak{H}$ *ein relativ konvexes Gruppoid* ist. Ist das Feld H des Gruppoides $\mathfrak{H}$ eine konvexe Untermenge, dann sagen wir, daß $\mathfrak{H}$ *ein konvexes Untergruppoid in* $\mathfrak{G}$ *ist.*

S 9/3: Es sei $\mathfrak{H}$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{H}_\iota^*$ die Projektion von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$ und $\mathfrak{H}'$ sein Bild in der isomorphen Abbildung d des Gruppoides $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_\iota$. Dann ist $\mathfrak{H}$ in bezug auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ dann und nur dann konvex, wenn

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_1^* \times \ldots \times \mathfrak{H}_\alpha^* = \mathfrak{H}^* \leftrightarrow \mathfrak{H} \tag{8.3}$$

gilt.

Beweis: $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}_\iota^*$ und also auch $\mathfrak{H}^*$ sind Gruppoide. Die übrige Behauptungen, die nur die Felder der betrachteten Gruppoide betreffen, sind nach S 8/1 richtig.

S 10/3: Es sei $\mathfrak{H}$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{H}'$ sein Bild in dem Isomorphismus d des Gruppoides $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$, e das idempotente Element in $\mathfrak{G}$ und $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Es seien weiter $\mathfrak{A}_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\}) = \mathsf{d}^{-1}\mathfrak{A}_\iota'$, $P_\iota^\circ = \mathfrak{A}_\iota^\circ \cap \mathfrak{H} \neq 0$, $\mathsf{d}\mathfrak{P}_\iota^\circ = (\{e_1\} \times \ldots \times \mathfrak{P}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\}) = \mathfrak{P}_\iota' \leftrightarrow \mathfrak{P}_\iota \subset \mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{H}_\iota^*$ die Projektion von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_\alpha$, $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}_1^* \times \ldots \times \mathfrak{H}_\alpha^*$. Dann sind folgende Aussagen

$$\mathfrak{P}_\iota = \mathfrak{H}_\iota^*, \qquad \iota = 1, \ldots, \alpha, \tag{9.3}$$

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{H}' \leftrightarrow \mathfrak{H}, \tag{10.3}$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \leftrightarrow \mathfrak{H}, \tag{11.3}$$

$$\mathfrak{H} \text{ ist in bezug auf } \mathfrak{A}^{[\alpha]} \text{ konvex,} \tag{12.3}$$

untereinander äquivalent.

Beweis: Der Satz ist die Zusammenfassung von S 8/3 und S 9/3.

S 11/3: Es seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ Untergruppoide in $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{P}_\iota^*$, $\mathfrak{H}_\iota^*$, $\mathfrak{K}_\iota^*$ Projektionen in $\mathfrak{A}_\iota$. Dann gilt für $\iota = 1, \ldots, \alpha$

$$(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K})_\iota^* = \mathfrak{P}_\iota^* \subset (\mathfrak{H}_\iota^* \cap \mathfrak{K}_\iota^*). \tag{13.3}$$

Beweis: Es ist bekannt, daß jeder nichtleere Durchschnitt von zwei Gruppoiden wieder ein Gruppoid ist. Die zweite Behauptung betrifft nur die Felder der betrachteten Gruppoiden und (13.3) gilt also infolge (12.1).

S 12/3: Es seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ Untergruppoide in $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, die in bezug auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ konvex sind, und $\mathfrak{P} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} \neq \emptyset$. Sind $\mathfrak{P}_\iota^*$, $\mathfrak{H}_\iota^*$, $\mathfrak{K}_\iota^*$ die Projektionen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{A}_\iota$, dann gilt: a) $\mathfrak{P}$ ist ein in bezug auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ konvexes Untergruppoid, b) $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K})_\iota^* = \mathfrak{P}_\iota^* = \mathfrak{H}_\iota^* \cap \mathfrak{K}_\iota^*$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Beweis: Nach S 11/1 ist der Satz für die Felder der betrachteten Gruppoiden richtig und weil ein nichtleerer Durchschnitt von Gruppoiden wieder ein Gruppoid ist, ist der Satz bewiesen.

S 13/3: Es sei e das idempotente Element in $\mathfrak{G}$, d die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, f die isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}^{[\beta]}$, $\mathsf{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$, $\mathsf{f}e = (e_1', \ldots, e_\beta')$. Weiter es seien $\mathfrak{A}_\iota^\circ = \mathsf{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $\mathfrak{B}_\varkappa^\circ = \mathsf{f}^{-1}(\{e_1'\} \times \ldots \times \mathfrak{B}_\varkappa \times \ldots \times \{e_\beta'\})$, $\mathfrak{A}_{\iota\varkappa}^*$ die Projektion von $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ in $\mathfrak{B}_\varkappa$ und $\mathfrak{B}_{\varkappa\iota}^*$ die Projektion von $\mathfrak{B}_\varkappa^\circ$ in $\mathfrak{A}_\iota$. Ist nun das Untergruppoid $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ in bezug auf $\mathfrak{B}^{[\beta]}$ und $\mathfrak{B}_\varkappa^\circ$ in bezug auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ konvex ($\iota = 1, \ldots, \alpha$; $\varkappa = 1, \ldots, \beta$), sind die Gruppoide $\mathfrak{A}_{\iota\varkappa}^*$, $(\mathfrak{A}_\iota^\circ \cap \mathfrak{B}_\varkappa^\circ)$ und $\mathfrak{B}_{\varkappa\iota}^*$ isomorph.

Beweis: Dieser Satz kann man analog wie der Satz S 12/1 beweisen, nur brauchen wir anstatt der Mengen die Gruppoide und anstatt der schlichten die isomorphe Abbildung zu betrachten. Die Sätze S 3/1, S 11/1 sind durch S 4/3, S 12/3 zu ersetzen.

S 14/3: Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus S 13/3. Dann existieren die Gruppoide $\mathfrak{C}_{\iota\varkappa}$, die mit $(\mathfrak{A}_\iota^\circ \cap \mathfrak{B}_\varkappa^\circ)$ isomorph sind, und zwar der Eigenschaft, daß die Beziehungen

$$\mathfrak{A}_\iota \leftrightarrow \mathfrak{C}_{\iota 1} \times \mathfrak{C}_{\iota 2} \times \ldots \times \mathfrak{C}_{\iota\beta}, \qquad \iota = 1, \ldots, \alpha, \tag{14.3}$$

$$\mathfrak{B}_\varkappa \leftrightarrow \mathfrak{C}_{1\varkappa} \times \mathfrak{C}_{2\varkappa} \times \ldots \times \mathfrak{C}_{\alpha\varkappa}, \qquad \varkappa = 1, \ldots, \beta, \tag{15.3}$$

gelten.

Den Beweis kann man analog zu dem Beweise des Satzes S 13/1 führen, indem man die Begriffe der Menge und der schlichten Abbildung durch die des Gruppoides und des Isomorphismus ersetzt, ebenso wie S 8/1, S 12/1 durch S 9/3 und S 13/3.

D 4/3: Es sei

$$\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha \tag{a}$$

und $\mathfrak{A}_\iota \leftrightarrow \mathfrak{A}_{\iota 1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\iota\gamma_\iota}$, wo γ_ι eine natürliche Zahl für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ ist. Dann heißt

$$\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{1\gamma_1} \times \mathfrak{A}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{2\gamma_2} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\alpha 1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\alpha\gamma_\alpha} \tag{b}$$

die Verfeinerung des direkten Produktes (a).

Bemerkung 2/3: Jedes direkte Produkt ist zugleich seine Verfeinerung.

D 5/3: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta$. Es existiere eine schlichte Abbildung i der Komponenten $\mathfrak{A}_\iota$ des direkten Produktes $\mathfrak{G}$ auf die Komponenten $\mathfrak{B}_\varkappa$ des direkten Produktes $\mathfrak{H}$ der Eigenschaft, daß die Gruppoide $\mathfrak{A}_\iota$ und $\mathfrak{B}_\varkappa$ isomorph sind, wenn nur $\mathrm{i}\{\mathfrak{A}_\iota\} = \{\mathfrak{B}_\varkappa\}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ ist. Dann heißt i *starke Abbildung von* $(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)$ *auf* $(\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta)$ und *die direkten Produkte* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *heißen isomorph.*

Bemerkung 3/3: Zwei isomorphe direkte Produkte besitzen natürlich eine gleiche Anzahl der Komponenten ($\alpha = \beta$) und es gilt $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{H}$. Sehr oft betrachten wir den Fall, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ ist.

D 6/3: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$. Das Gruppoid $\mathfrak{A}_\iota$ heißt *wesentliche oder unwesentliche Komponente* des direkten Produktes, wenn dieses von seinem Felde $\mathfrak{A}_\iota$ ($\iota = 1, \ldots, \alpha$) gilt. *Das direkte Produkt*, dessen jede Komponente wesentlich ist, dh. Card $\mathfrak{A}_\iota > 1$, *heißt reduziert.*

S 15/3: Es seien $\mathfrak{A}_1', \ldots, \mathfrak{A}_{\alpha'}'$ die wesentlichen Komponenten des direkten Produktes $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$. Dann gilt für das reduzierte direkte Produkt $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1' \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\alpha'}'$ die Beziehung $\alpha' \leqq \alpha$.

Der Beweis ist evident.

S 16/3: Es seien $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta$ direkte isomorphe Produkte. Dann sind ihre reduzierten direkten Produkte auch isomorph.

Der Beweis folgt unmittelbar aus S 15/1, D 5/3 und D 6/3.

S 17/3: Es seien $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}^{[\beta]}$, e das idempotente Element aus $\mathfrak{G}$, $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha) \in \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $e \leftrightarrow (e_1', \ldots, e_\beta') \in \mathfrak{B}^{[\beta]}$, $\mathfrak{A}_\iota^\circ \leftrightarrow (\{e_1\} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $\mathfrak{B}_\varkappa^\circ \leftrightarrow (\{e_1'\} \times \ldots \times \mathfrak{B}_\varkappa \times \ldots \times \{e_\beta'\})$. Ist $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ in bezug auf $\mathfrak{B}^{[\beta]}$ und $\mathfrak{B}_\varkappa^\circ$ in bezug auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ konvex, besitzen die betrachteten direkten Produkte isomorphe Verfeinerungen und das Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist dann das direkte Produkt von Gruppoiden $\mathfrak{C}_{\iota\varkappa}$, die mit $(\mathfrak{A}_\iota^\circ \cap \mathfrak{B}_\varkappa^\circ)$ isomorph sind.

Beweis: Benutzen wir die Bezeichnungen aus S 14/3, so ist der Beweis analog dem Beweise des Satzes S 16/1, nur brauchen wir die Begriffe „Menge, schlichte Abbildung, äquivalent" und die Beziehungen (13.1), (14.1) durch Begriffe „Gruppoid, isomorphe Abbildung, isomorph" und die Beziehungen (14.3) und (15.3) zu ersetzen.

S 18/3: Es seien $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}^{[\beta]}$, e das idempotente Element in $\mathfrak{G}$, $e \leftrightarrow [e_1, \ldots, e_\alpha) \in \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $e \leftrightarrow (e'_1, \ldots, e'_\beta) \in \mathfrak{B}^{[\beta]}$, $\mathfrak{A}^\circ_\iota \leftrightarrow (\{e_1\} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $\mathfrak{B}^\circ_\varkappa \leftrightarrow (\{e'_1\} \times \ldots \times \mathfrak{B}_\varkappa \times \ldots \times \{e'_\beta\})$, $\mathfrak{A}^*_{\iota\varkappa}$ die Projektion von $\mathfrak{A}^\circ_\iota$ in $\mathfrak{B}_\varkappa$ und $\mathfrak{B}^*_{\varkappa\iota}$ die Projektion von $\mathfrak{B}^\circ_\varkappa$ in $\mathfrak{A}_\iota$, dann

1. $\mathfrak{A}^\circ_\iota$ ist in bezug auf $\mathfrak{B}^{[\beta]}$ und gleichzeitig $\mathfrak{B}^\circ_\varkappa$ ist in bezug auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ dann und nur dann konvex, wenn

2.
$$\mathfrak{A}_\iota \leftrightarrow \mathfrak{B}^*_{1\iota} \times \ldots \times \mathfrak{B}^*_{\beta\iota} \tag{16.3}$$
und gleichzeitig
$$\mathfrak{B}_\varkappa \leftrightarrow \mathfrak{A}^*_{1\varkappa} \times \ldots \times \mathfrak{A}^*_{\alpha\varkappa} \tag{17.3}$$

für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ ist.

Beweis: Nach S 17/1 gilt der Satz für die Felder der betrachteten Gruppoide Gleichzeitig sind A°_ι, $B^\circ_\varkappa$, $A^*_{\iota\varkappa}$, $B^*_{\varkappa\iota}$ nach S 4/3 und S 7/3 die Felder der Gruppoide $\mathfrak{A}^\circ_\iota$, $\mathfrak{B}^\circ_\varkappa$, $\mathfrak{A}^*_{\iota\varkappa}$, $\mathfrak{B}^*_{\varkappa\iota}$. Nehmen wir noch den Umstand in Betracht, daß in dem Satz und Beweis betrachtete schlichte Abbildung eine Deformation ist, dann ist unser Satz bewiesen.

S 19/3: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}^{[\beta]}$. Es gelten weiter die Bezeichnungen aus S 18/3 und die Bedingungen (16.3), (17.3). Dann besitzen die angeführten direkten Produkte isomorphe Verfeinerungen.

Beweis: Nach S 18/3 sind die Bedingungen (16.3) und (17.3) mit der Bedingung 1. dieses Satzes äquivalent. Nach S 17/3, deren Bedingungen erfüllt sind, gilt also die Behauptung unseres Satzes.

D 7/3: *Eine Menge* Z aller Elemente z des Gruppoides $\mathfrak{G}$ der Eigenschaft, daß für jedes Element $a \in \mathfrak{G}$ die Beziehung $za = az$ gilt, *heißt Zentrum dieses Gruppoides*; *das Element* $z \in Z$ *heißt zentral.*

Bemerkung 4/3: Die Menge Z kann leer sein. Wenn $Z \neq \emptyset$ ist, dann braucht sie nicht notwendig das Feld eines Untergruppoides in $\mathfrak{G}$ zu sein. *Wir werden zwar weiter voraussetzen, daß* Z *eine gruppoidale Untermenge in* $\mathfrak{G}$ *ist, aber alle Überlegungen, welche wir unter dieser Bedingung machen werden, behalten ihre Gültigkeit auch ohne diese Bedingung.* Dann genügt es, statt der Untergruppoide und Faktoroide die nichtleeren Mengen und Zerlegungen zu betrachten.

Verabredung 1/3: Unter einem Zentrum $\mathfrak{Z}$ des Gruppoides $\mathfrak{G}$ verstehen wir die nichtlere Teilmenge Z aus D 7/3, die in bezug auf die Multiplikation in $\mathfrak{G}$ gruppoidal ist.

S 20/3: Das Zentrum $\mathfrak{Z}$ des Gruppoides $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ ist das konvexe Untergruppoid in $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei $x \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_\alpha)$, $y \leftrightarrow (y_1, \ldots, y_\alpha)$, $a \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_\alpha)$, $a \in \mathfrak{G}$, $x, y \in \mathfrak{Z}$. Dann gilt einerseits $ax \leftrightarrow (a_1x_1, \ldots, a_\alpha x_\alpha)$, $xa \leftrightarrow (x_1a_1, \ldots, x_\alpha a_\alpha)$, $ay \leftrightarrow (a_1y_1, \ldots, a_\alpha y_\alpha)$, $ya \leftrightarrow (y_1a_1, \ldots, y_\alpha a_\alpha)$ und anderseits $ax = xa$, $ay = ya$. Darum haben wir auch $(a_1x_1, \ldots, a_\alpha x_\alpha) = (x_1y_1, \ldots, x_\alpha a_\alpha)$, $(a_1y_1, \ldots, a_\alpha y_\alpha) = (y_1a_1, \ldots, y_\alpha a_\alpha)$. Die Elemente x_ι, y_ι gehören in das Zentrum $\mathfrak{Z}_\iota$ des Gruppoides $\mathfrak{A}_\iota$, weil für jedes $a_\iota \in \mathfrak{A}_\iota$ die Beziehungen $a_\iota x_\iota = x_\iota a_\iota$, $a_\iota y_\iota = y_\iota a_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, gelten.

Es sei nun z_ι ein beliebiges Element von x_ι, y_ι und z ein solches Element aus $\mathfrak{G}$, für welches $z \leftrightarrow (z_1, \ldots, z_\alpha)$ ist. Dann ist offenbar $(a_1z_1, \ldots, a_\alpha z_\alpha) =$

$= (z_1a_1, \ldots, z_\alpha a_\alpha)$. Darum gilt auch für das Element $a \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_\alpha)$ die Gleichheit $az = za$ und z gehört in das Zentrum $\mathfrak{Z}$, was die Konvexität des Zentrums $\mathfrak{Z}$ bezüglich $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ bestätigt.

Ist nun $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}^{[\beta]}$, dann kann nan analog beweisen, daß das Zentrum $\mathfrak{Z}$ in bezug auf $\mathfrak{B}^{[\alpha]}$ ein konvexes Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ ist.

S 21/3: Das Gruppoid $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ besitzt ein Zentrum $\mathfrak{Z}$ dann und nur dann, wenn jedes Gruppoid $\mathfrak{A}_\iota$ das Zentrum $\mathfrak{Z}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, besitzt.

Beweis: a) Besitzt $\mathfrak{G}$ das Zentrum $\mathfrak{Z}$, dann ist aus dem ersten Teil des Beweises von S 20/3 klar, daß auch $\mathfrak{A}_\iota$ das Zentrum besitzt.

b) Es sei nun $\mathfrak{Z}_\iota$ das Zentrum von $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$ und $z \in \mathfrak{G}$ so ein Element, für welches $z \leftrightarrow (z_1, \ldots, z_\alpha)$, $z_\iota \in \mathfrak{Z}_\iota$ gilt. Für jedes $a \in \mathfrak{G}$, $a \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_\alpha)$, folgt aus den Beziehungen $az \leftrightarrow (a_1z_1, \ldots, a_\alpha z_\alpha) = (z_1a_1, \ldots, z_\alpha a_\alpha) \leftrightarrow za$ die Gleichheit $za = az$. Das Element z gehört also in das Zentrum $\mathfrak{Z}$ des Gruppoides $\mathfrak{G}$ und es ist $\mathfrak{Z} \supset \mathfrak{Z}' \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$.

S 22/3: Es sei $\mathfrak{Z}$ das Zentrum des Gruppoides $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{Z}_\iota$ das Zentrum des Gruppoides $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Dann ist $\mathfrak{Z}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{Z}_\iota$, dh. $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$.

Beweis: a) Es sei $\mathfrak{Z}_\iota^*$ die Projektion von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{A}_\iota$, $x \in \mathfrak{Z}$, $a \in \mathfrak{G}$, $x \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_\alpha)$, $a \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_\alpha)$, x_ι, a_ι die Projektion von x, a in $\mathfrak{A}_\iota$. Nach dem ersten Teil deses Beweises von S 20/3 ist $x_\iota a_\iota = a_\iota x_\iota$. Es sind also die Elemente $x_\iota \in \mathfrak{Z}_\iota^*$ in $\mathfrak{A}_\iota$ zentral, woraus $\mathfrak{Z}_\iota^* \subset \mathfrak{Z}_\iota$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ folgt.

b) Es sei nun $z_\iota \in \mathfrak{Z}_\iota$. Dann gehört das Element $z \in \mathfrak{G}$, für das $z \leftrightarrow (z_1, \ldots, z_\alpha)$ gilt, in das Zentrum $\mathfrak{Z}$ des Gruppoides $\mathfrak{G}$, was aus dem Punkte b) des Beweis S 21/3 folgt. Aus dieser Eigenschaft und aus der Definition der Projektion folgt, daß $\mathfrak{Z}_\iota \subset \mathfrak{Z}_\iota^*$ ist, und darum muß infolge a) des Beweises S 22/3 $\mathfrak{Z}_\iota = \mathfrak{Z}_\iota^*$, $\iota = , \ldots, \alpha$, gelten. Da $\mathfrak{Z}$ ein konvexes Gruppoid ist, gilt nach S 9/3 $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_\iota^* \times \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha^*$, woraus sich infolge $\mathfrak{Z}_\iota^* \subset \mathfrak{Z}_\iota$ die Beziehung $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$ ergibt.

S 23/3: Es sei $\mathfrak{Z}$ das Zentrum des Gruppoides $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_\iota$ das Zentrum in $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Dann verursacht jede Verfeinerung des direkten Produktes $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ eine Verfeinerung des Zentrums $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{1\gamma_1} \times \mathfrak{A}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{2\gamma_2} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\alpha 1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\alpha\gamma_\alpha}$ die Verfeinerung des Produktes $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, dh. es sei $\mathfrak{A}_\iota \leftrightarrow \mathfrak{A}_{\iota 1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\iota\gamma_\iota}$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, wo γ_ι eine natürliche Zahl ist. Nach S 22/3 ist $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$, wo $\mathfrak{Z}_\iota$ das Zentrum in $\mathfrak{A}_\iota$ ist. Nach S 21/3 und S 22/3 gilt dann $\mathfrak{Z}_\iota \leftrightarrow \mathfrak{Z}_{\iota 1} \times \ldots \times \mathfrak{Z}_{\iota\gamma_\iota}$, wo $\mathfrak{Z}_{\iota\varkappa_\iota}$ das Zentrum in $\mathfrak{A}_{\iota\varkappa_\iota}$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa_\iota = 1, \ldots, \gamma_\iota$, ist. Es gilt also

$$\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{Z}_{1\gamma_1} \times \mathfrak{Z}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{Z}_{2\gamma_2} \times \ldots \times \mathfrak{Z}_{\alpha 1} \times \ldots \times \mathfrak{Z}_{\alpha\gamma_\alpha},$$

womit unser Satz bewiesen ist.

4. DIREKTE ZERLEGUNGEN VON GRUPPOIDEN

D 1/4: a) Eine Zerlegung $\bar{A}$ in (auf) einem beliebigen Gruppoid $\mathfrak{G}$ nennen wir *erzeugende Zerlegung in (auf)* $\mathfrak{G}$, wenn es zu jeder zweigliedrigen Folge von Elementen $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ ein Element $\bar{c} \in \bar{A}$ gibt, für das die Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ gilt.

b) Es sei $\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung in (auf) dem Gruppoid $\mathfrak{G}$. Definieren wir die Multiplikation der Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ so, daß $\bar{a} \bigcirc \bar{b} = \bar{c}$ dann und nur dann, wenn $\bar{a}\bar{b} \subset c$ ist. In diesem Falle sagen wir, daß $\bar{A}$ das Feld des Gruppoides $\overline{\mathfrak{A}}$ ist. Das Gruppoid $\overline{\mathfrak{A}}$ nennen wir *Faktoroid in (auf) dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$.

c) *Die trivialen Faktoroide* auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ sind das größte und das kleinste Faktoroid auf $\mathfrak{G}$. *Das größte (kleinste) Faktoroid* $\overline{\mathfrak{G}}_{\max}$ ($\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$) ist ein solches, dessen Feld die größte (kleinste) Zerlegung $\bar{G}_{\max}$ ($\bar{G}_{\min}$) auf $\mathfrak{G}$ ist.

S 1/14: Es sei d eine Deformation des Gruppoides $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$. Die Zerlegung $\bar{D}$ auf $\mathfrak{G}$, die zu d gehört, ist erzeugend und sie ist das Feld des zu d gehörigen Faktoroides $\overline{\mathfrak{D}}$. $\overline{\mathfrak{D}}$ ist mit $\mathfrak{G}^*$ isomorph.

Beweis: [1], 103.

D 2/4: Es seien $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ Faktoroide auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$.

a) Wir sagen, daß das Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}(\overline{\mathfrak{B}})$ *eine Überdeckung (Verfeinerung) des Faktoroides* $\overline{\mathfrak{B}}$ ($\overline{\mathfrak{A}}$) ist, wenn für ihre Felder $\bar{A} \geqq \bar{B}$ gilt und wir schreiben $\overline{\mathfrak{A}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$ oder $\overline{\mathfrak{B}} \leqq \overline{\mathfrak{A}}$.

b) Unter *einer gemeinsamen Überdeckung* der Faktoroide $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ verstehen wir jedes Faktoroid $\overline{\mathfrak{C}}$ auf $\mathfrak{G}$, für welches $\overline{\mathfrak{C}} \geqq \overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{C}} \geqq \overline{\mathfrak{B}}$ gilt. *Eine gemeinsame Verfeinerung von* $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ ist jedes Faktoroid $\overline{\mathfrak{D}}$ auf $\mathfrak{G}$, für welches $\overline{\mathfrak{D}} \leqq \overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{D}} \leqq \overline{\mathfrak{B}}$ gilt.

c) *Die kleinste gemeinsame Überdeckung von Faktoroiden* $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ ist ein solches Faktoroid $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}]$ auf $\mathfrak{G}$, daß für jede gemeinsame Überdeckung $\overline{\mathfrak{C}}$ von $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ die Beziehung $[\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}] \leqq \overline{\mathfrak{C}}$ gilt. *Unter der größten gemeinsamen Verfeinerung von* $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ verstehen wir ein solches Faktoroid $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}})$ auf $\mathfrak{G}$, für welches $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}) \geqq \overline{\mathfrak{D}}$ ist, wo $\overline{\mathfrak{D}}$ eine beliebige gemeinsame Verfeinerung von $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ bedeutet.

d) Wir sagen, daß *das Faktoroid* $\overline{\mathfrak{A}}$ *zu dem Faktoroid* $\overline{\mathfrak{B}}$ *komplementär ist*, wenn dasselbe für ihre Felder $\bar{A}$, $\bar{B}$ gilt.

Bemerkung 1/4: Ist $\overline{\mathfrak{A}}$ zu $\overline{\mathfrak{B}}$ komplementär, so ist auch $\overline{\mathfrak{B}}$ zu $\overline{\mathfrak{A}}$ komplementär. Das folgt aus der Bemerkung 1/2 und aus D 1/4 d).

S 2/4: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{G}'$, ${}^{(\iota)}\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\iota-1} \times \mathfrak{A}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, d_ι die Deformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_\iota$, welche durch den Isomorphismus d des Gruppoides $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ induziert ist und $\overline{\mathfrak{G}}_\iota$ das zu dieser P-Deformation d_ι gehörige Faktoroid auf $\mathfrak{G}$. Die Elemente $\bar{a}_\iota \in \overline{\mathfrak{G}}_\iota$ sind dann mit ${}^{(\iota)}\overline{\mathfrak{A}}$ äquivalente Mengen und das Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_\iota$ ist mit $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, isomorph.

Beweis: Nach S 2/2 ist jedes Element $\bar{a}_\iota \in \overline{\mathfrak{G}}_\iota$, für welches $\bar{a}_\iota = \mathsf{d}^{-1}\bar{a}'_\iota = \mathsf{d}^{-1}(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\iota-1} \times \{a_\iota\} \times \mathfrak{A}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)$ gilt, eine mit ${}^{(\iota)}\mathfrak{A}$ äquivalente Menge. Das Element $\bar{a}_\iota$ ist dabei die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}$, die in der P-Deformation d_ι als Urbilder des Elements $a_\iota \in \mathfrak{A}_\iota$ vorkommen, dh. $\bar{a}_\iota$ ist ein Element des zu d_ι gehörigen Faktoroides $\overline{\mathfrak{G}}_\iota$. Nach S 1/4 ist $\overline{\mathfrak{G}}_\iota$ mit $\mathfrak{A}_\iota$ isomorph.

D 3/4: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{G}'$ und d_ι die, durch den Isomorphismus d von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}_\iota$ induzierte P-Deformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{A}_\iota$. Dann heißt das System $\{\overline{\mathfrak{G}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{G}}_\alpha\}$ von allen Faktoroiden aus S 2/4 *das vollständige, zu dem System* $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha\}$ *(oder zu dem System* $\{\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_\alpha\}$*) gehörige System von Faktoroiden*. Die Menge $\{\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_\alpha\}$ heißt dann *das vollständige, zu dem System* $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha\}$ *gehörige System von P-Deformationen*.

S 3/4: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{G}'$ und $\{\overline{\mathfrak{G}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{G}}_\alpha\}$ das vollständige, zu dem System $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha\}$ gehörige System von Faktoroiden. Dann gilt folgendes:

a) $[\overline{\mathfrak{G}}_\iota, \overline{\mathfrak{G}}_\varkappa] = \overline{\mathfrak{G}}_{\max}$ für $\iota \neq \varkappa$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$.

b) Je zwei Faktoroiden $\overline{\mathfrak{G}}_\iota$, $\overline{\mathfrak{G}}_\varkappa$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha)$ sind komplementär.

c) $(\overline{\mathfrak{G}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{G}}_\alpha) = \overline{\mathfrak{G}}_{\min}$.

Beweis: a), c) Nach S 3/2 ist unser Satz für die Felder der betrachteten Faktoroiden richtig. Weil $\overline{G}_\iota$ die erzeugenden Zerlegungen ([1], 89) sind, sind auch die Zerlegungen $[\overline{G}_\iota, \overline{G}_\varkappa]$ bzw. $(\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_\alpha)$ erzeugend ([1], 91 bzw. [3], 51). Sie sind also Felder der Faktoroiden $[\overline{\mathfrak{G}}_\iota, \overline{\mathfrak{G}}_\varkappa]$ bzw. $(\overline{\mathfrak{G}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{G}}_\alpha)$. Nach D 2/4 d) und S 3/2 gilt auch b).

S 4/4: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1' \times \mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{A}_2$ mit $\mathfrak{A}_2'$ isomorph. Es sei $\mathfrak{Z}$ das Zentrum in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_1', \mathfrak{Z}_2'$ die Zentren in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2'$. Dann gilt:

a) $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1'$ sind isomorph,

b) $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_1'$, $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_2'$ sind isomorph.

Beweis: Die Behauptung a) wird analog wie der Satz S 4/2 bewiesen, nur anstatt der schlichten Abbildung von Mengen muß man die isomorphe Abbildung von Gruppoiden in Betracht nehmen.

b) Aus dem Isomorphismus von $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_2'$ folgt der Isomorphismus der Zentren $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_2'$. Nach S 22/3 ist einerseits $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \mathfrak{Z}_2$, andererseits $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1' \times \mathfrak{Z}_2'$. Nach a) unseres Satzes ist also $\mathfrak{Z}_1$ mit $\mathfrak{Z}_1'$ isomorph.

D 4/4: *Das Gruppoid* $\mathfrak{G}$ heißt *direkt zerlegbar*, wenn es solche Gruppoide $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ gibt, daß

1. $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt dieser Gruppoide ist, dh. $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$.
2. jedes Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_\iota$ aus dem vollständigen, zu $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha\}$ gehörigen System $\{\overline{\mathfrak{G}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{G}}_\alpha\}$, von $\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$ verschieden ist, dh. $\overline{\mathfrak{G}}_\iota \neq \overline{\mathfrak{G}}_{\min}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ gilt.

In diesem Falle spricht man auch über *die direkte Zerlegung des Gruppoides* $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}_\iota$ heißt *der direkte Faktor* dieser direkten Zerlegung. Sonst sagt man, daß das Gruppoid $\mathfrak{G}$ *direkt unzerlegbar* ist.

S 5/4: Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn Gruppoide $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ der Eigenschaft existieren, daß

a) $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ ist,

b) keine der P-Deformationen d_ι aus dem vollständigen, zu $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha\}$ gehörigen System $\{\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_\alpha\}$, eine isomorphe Abbildung ist.

Der Beweis folgt unmittelbar aus S 5/2 und D 4/4.

S 6/4: Es sei $\mathfrak{G}$ ein direkt zerlegbares Gruppoid. Dann ist $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, wo

a) $\alpha \geqq 2$,

b) für Kardinalzahlen wenigstens zweier Gruppoide $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{A}_\varkappa$ $(\iota \neq \varkappa)$ gilt die Ungleichkeit Card $\mathfrak{A}_\iota > 1$, Card $\mathfrak{A}_\varkappa > 1$.

Der Beweis folgt leicht mit Benutzung von S 6/2.

D 5/4: Es seien $\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ je zwei komplementäre Faktoroide auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ und es gelte noch:

a) $[\overline{\mathfrak{A}}_\iota, \overline{\mathfrak{A}}_\varkappa] = \overline{\mathfrak{G}}_{\max}$ für $\iota \neq \varkappa$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$,

b) $(\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\alpha) = \overline{\mathfrak{G}}_{\min}$.

Dann heißen *die Faktoroide* $\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ *stark komplementär.*

S 7/2: Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn auf ihm nichttriviale, stark komplementäre Faktoroide $\overline{\mathfrak{A}}_1$, $\overline{\mathfrak{A}}_2$ existieren.
Gibt es solche Faktoroide, dann gilt $\mathfrak{G} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}}_1 \times \overline{\mathfrak{A}}_2$.

Beweis: Der Satz ist nach S 7/2 für die Felder der betrachteten Gruppoide und Faktoroide gültig. Sind nun $\overline{\mathfrak{A}}_1$, $\overline{\mathfrak{A}}_2$, die Faktoroide auf $\mathfrak{G}$, kann man nach dem Beweis von S 7/2 die schlichte Abbildung d des Feldes G auf $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ so definieren, daß $\mathsf{d}a = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ dann und nur dann, wenn $a \in \bar{a}_1 \in \bar{A}_1$, $a \in \bar{a}_2 \in \in A_2$ ist. Es sei weiter $\mathsf{d}b = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. Die Zerlegungen $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ sind erzeugend, und darum gilt $ab \in \bar{a}_\iota \bar{b}_\iota \subset \bar{a}_\iota \bigcirc \bar{b}_\iota \in \bar{A}_\iota$, $\iota = 1, 2$. Dann gilt $\mathsf{d}(ab) = (\bar{a}_1 \bigcirc \bar{b}_1, \bar{a}_2 \bigcirc \bar{b}_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \bigcirc (\bar{b}_1, \bar{b}_2) = (\mathsf{d}a) \bigcirc (\mathsf{d}b)$. Es ist also d ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\overline{\mathfrak{A}}_1 \times \overline{\mathfrak{A}}_2$ und der Satz ist bewiesen.

D 6/4: *Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ heißt einfach*, wenn die einzigen Faktoroide auf ihm $\overline{\mathfrak{G}}_{\max}$ und $\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$ sind.

S 8/4: Ein einfaches Gruppoid ist direkt unzerlegbar.

Beweis: $\overline{\mathfrak{G}}_{\max}$ und $\overline{\mathfrak{G}}_{\min}$ sind die einzigen möglichen Faktoroide auf $\mathfrak{G}$ und also nach S 7/4 ist $\mathfrak{G}$ direkt unzerlegbar.

D 7/4: *Ein Gruppoid $\mathfrak{G}$ heißt direkt vollständig zerlegbar*, wenn es direkt zerlegbar ist und wenn für jeden Faktor $\mathfrak{A}_\iota$ der direkten Zerlegung $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ die Bedingungen
a) $\mathfrak{A}_\iota$ ist ein direkt unzerlegbares Gruppoid,
b) Card $\mathfrak{A}_\iota > 1$
für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ gelten. In diesem Falle spricht man auch über *die vollständige direkte Zerlegung*.

Andererfalls sagt man, daß $\mathfrak{G}$ *nicht direkt vollständig zerlegbar ist.*

S 9/4: Es sei $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ die direkte Zerlegung von $\mathfrak{G}$ und es gelte für jeden Faktor $\mathfrak{A}_\iota$, daß
a) $\mathfrak{A}_\iota$ einfach ist,
b) Card $\mathfrak{A}_\iota > 1$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$ ist.
Dann ist $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$ die vollständige direkte Zerlegung.

Beweis: Nach S 8/4 ist $\mathfrak{A}_\iota$ ein direkt unzerlegbares Gruppoid und somit ist der Satz bewiesen.

D 8/4: Es seien $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta$ die direkten Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$. Wenn es eine starke Abbildung i des Gruppoides $(\mathfrak{A}_1 \times \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)$ auf das Gruppoid $(\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta)$ gibt, dann sagen wir, daß die betrachteten *Zerlegungen isomorph sind.*

S 10/4: a) Es seien $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}^{[\beta]}$ vollständige direkten Zerlegungen des Gruppoides $\mathfrak{G}$, e das idempotente Element in $\mathfrak{G}$, $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha) \in \mathfrak{A}^{[\alpha]}$, $e \leftrightarrow (e_1', \ldots, e_\beta') \in \mathfrak{B}^{[\beta]}$, $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}_\iota^\circ \leftrightarrow (\{e_1\} \times \times \ldots \times \mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \{e_\alpha\})$, $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{B}_\varkappa^\circ (\{e_1'\} \times \ldots \times \mathfrak{B}_\varkappa \times \ldots \times \{e_\beta'\})$. Wenn noch eine der folgenden Bedingungen gilt

1. $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ ist in bezug auf $\mathfrak{B}^{[\beta]}$ und $\mathfrak{B}_\iota^\circ$ ist in bezug auf $\mathfrak{A}^{[\alpha]}$ für $\iota = 1, \ldots \alpha$, $\varkappa = = 1, \ldots, \beta$ konvex,

2. $$\mathfrak{A}_\iota \leftrightarrow \mathfrak{B}_{1\iota}^* \times \ldots \times B_{\beta\iota}^* \quad \text{für} \quad \iota = 1, \ldots, \alpha,$$
$$\mathfrak{B}_\varkappa \leftrightarrow \mathfrak{A}_{1\varkappa}^* \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\alpha\varkappa}^* \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, \beta$$

wo $\mathfrak{A}_{\iota\varkappa}^*$ die Projektion von $\mathfrak{A}_\iota^\circ$ in $\mathfrak{B}_\varkappa$ und $\mathfrak{B}_{\varkappa\iota}^*$ die Projektion von $\mathfrak{B}_\iota^\circ$ in $\mathfrak{A}_\iota$ ist, so sind die betrachteten Zerlegungen isomorph.

b) Es gelten die Voraussetzungen aus a) und es sei $\mathfrak{Z}$ das Zentrum in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_\iota$ das Zentrum in $\mathfrak{A}_\iota$ ($\iota = 1, \ldots, \alpha$), $\mathfrak{Z}'_\varkappa$ das Zentrum in $\mathfrak{B}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, \beta$). Dann sind $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$, $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}'_\beta$ die direkten isomorphen Produkte.

Beweis: a) Nach S 18/3 sind die Bedingungen 1. und 2. äquivalent. Es genügt also den Beweis nur für die Bedingung 1. durchzuführen. Da $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta$ vollständige direkte Zerlegungen sind, sind die Gruppoide $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ direkt unzerlegbar. Dann ist der Beweis unseres Satzes dem des Satzes S 8/2 ähnlich, nur anstatt Mengen und Äquivalenz müssen wir Gruppoide und Isomorphismus betrachten und anstatt (13.1), (14.1), S 2/1b), D 7/2 müssen wir (14.3), (15.3), S 2/3 b), D 7/4 benutzen.

b) Nach S 22/3 gilt $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$, $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}'_\beta$. Ist nun $\{\mathfrak{B}_\varkappa\} = = \mathrm{i}\{\mathfrak{A}_\iota\}$ in der starken Abbildung i ($\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$), so existiert der Isomorphismus i_ι des Gruppoides $\mathfrak{A}_\iota$ auf das Gruppoid $\mathfrak{B}_\varkappa$, in dem das Zentrum $\mathfrak{Z}_\iota$ auf das Zentrum $\mathfrak{Z}'_\varkappa$ abgebildet wird und die Gruppoiden $\mathfrak{Z}_\iota$, $\mathfrak{Z}'_\varkappa$ sind isomorph. Es existiert also eine starke Abbildung i des direkten Produktes $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}_1 \times \times \ldots \times \mathfrak{Z}_\alpha$ auf das direkte Produkt $\mathfrak{Z} \leftrightarrow \mathfrak{Z}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}'_\beta$.

S 11/4: Es seien $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta$ die direkten Zerlegungen und es gelte für die direkten Faktoren:

a) $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ sind einfache Gruppoide,
b) Card $\mathfrak{A}_\iota > 1$, Card $\mathfrak{B}_\varkappa > 1$
für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$.

Es gelten weiter die Bedingungen des Satzes S 10/4 außer der Bedingung, daß die angegebenen direkten Zerlegungen vollständige Zerlegungen sind. Dann sind die betrachteten Zerlegungen isomorph.

Beweis: Nach S 8/4 ist jeder Faktor $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ direkt unzerlegbares Gruppoid. Die betrachteten direkten Zerlegungen sind also vollständige direkte Zerlegungen und in bezug auf S 10/4 a) ist der Satz bewiesen.

Zum Schluß können wir noch folgendes sagen: Nehmen wir die direkten Produkte und Zerlegungen der Gruppen im gewöhnlichen Sinne (z. B. [6]), so ist leicht zu zeigen, daß jede Kommutatorgruppe einer Gruppe konvexe Untergruppe ist ([8]). Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ kein nichttriviales Zentrum hat und wenn sie das direkte Produkt seiner Untergruppen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\alpha$, $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\beta$ ist, dh. wenn $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_\alpha$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_\beta$ ist, so ist $\mathfrak{R}_\iota$ in bezug auf $\mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_\beta$ und $\mathfrak{S}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_\alpha$ konvex. Darum haben diese direkten Produkte ([8]) isomorphe Verfeinerungen und es gilt $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{C}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{C}_{\alpha\beta}$, wo $\mathfrak{C}_{\iota\varkappa} = \mathfrak{R}_\iota \cap \mathfrak{S}_\varkappa$ ($\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$) ist.

Weiter ist es noch zu bemerken, daß die ganze Theorie schon von Anfang an für Mengen und Gruppoiden mit Operatoren aufgebaut werden kann, wie es z. B. in [8] bzw. [9] angeführt ist. Eine andere Betrachtungsweise zu dieser Problematik können wir in [8] bzw. [9] finden, und zwar das Problem der isomorphen Zerlegungen wird auf Grund der Kettentheorie von Zerlegungen in Mengen ([1]) gelöst.

LITERATUR

[1] *Borůvka O.*: Grundlagen der Gruppoid — und Gruppentheorie, Berlin, 1960.
[2] *Borůvka O.*: Základy teorie grupoidů a grup, Praha, 1962.
[3] *Borůvka O.*: Über Ketten von Faktoroiden, Math. Ann. 118 (1941—43), 41—64.
[4] *Dubreil P.—Dubreil-Jacotin M. L.*: Leçons d'algèbre moderne, Paris, 1961.
[5] *Jakubík J.*: Direktné súčiny sväzov, Dissertation (nicht pub.), J. A. Komenský — Universität, Bratislava, 1950.
[6] *Kurosch A. G.*: Gruppentheorie, Berlin, 1953.
[7] *Rédei L.*: Algebra I., Leipzig, 1959.
[8] *Sedláček L.*: Direktní součiny grupoidů s operátory, Habilitierungschrift (nicht pub.), Palacký — Universität, Olomouc, 1964.
[9] *Sedláček L.*: Užití zobecněné věty Jordan-Hölderovy v teorii direktních součinů množin s operátory, Acta Univ. Pal. Olomucensis, fac. rerum nat., T 21 (1966), 45—57.
[10] *Szász G.*: Einführung in die Verbandstheorie, Leipzig, 1962.

Shrnutí

K PROBLÉMU IZOMORFISMU DIREKTNÍCH SOUČINŮ GRUPOIDŮ

Ladislav Sedláček

V předložené práci jsou zkoumány některé postačující podmínky pro to, aby dva direkní součiny daného grupoidu měly izomorfní zjemnění, případně aby dva direktní rozklady byly izomorfní.

Teorie direktních součinů a rozkladů grupoidů je budována na množinovém základě a je v určitém slova smyslu pokračováním prací [1] a [2], které tuto teorii neobsahují. V první části práce je vybudován množinově teoretický základ tak, že pojmy a výsledky zde uvedené se dají v druhé části ihned přenést na teorii grupoidů. I když i v jiných pracích (např. [7]) je teorie direktních součinů grupoidů budována pomocí izomorfismu, přece výchozím bodem této práce je práce [5]. Odtud byl také přejat pojem konvexního podgrupoidu a rozšířen na pojem relativně konvexního podgrupoidu resp. konvexní či relativně konvexní podmnožiny.

Studium izomorfního zjemnění direktních součinů je prováděno pomocí relativně konvexního podgrupoidu a podmínek s ním ekvivalentních (věty S 10/3, S 17/3 a S 19/3). Postačující podmínky pro to, aby dva direktní rozklady daného grupoidu byly izomorfní, jsou uvedeny ve větách S 10/4 a S 11/4. Oprávněnost zavedení pojmu konvexního podgrupoidu plyne z věty S 20/3 a poznámek na konci posledního paragrafu.

Jiný přístup k řešení uvedených otázek pomocí teorie rozkladů a faktoroidů, případně jejich řetězců najdeme v práci [8] a [9].